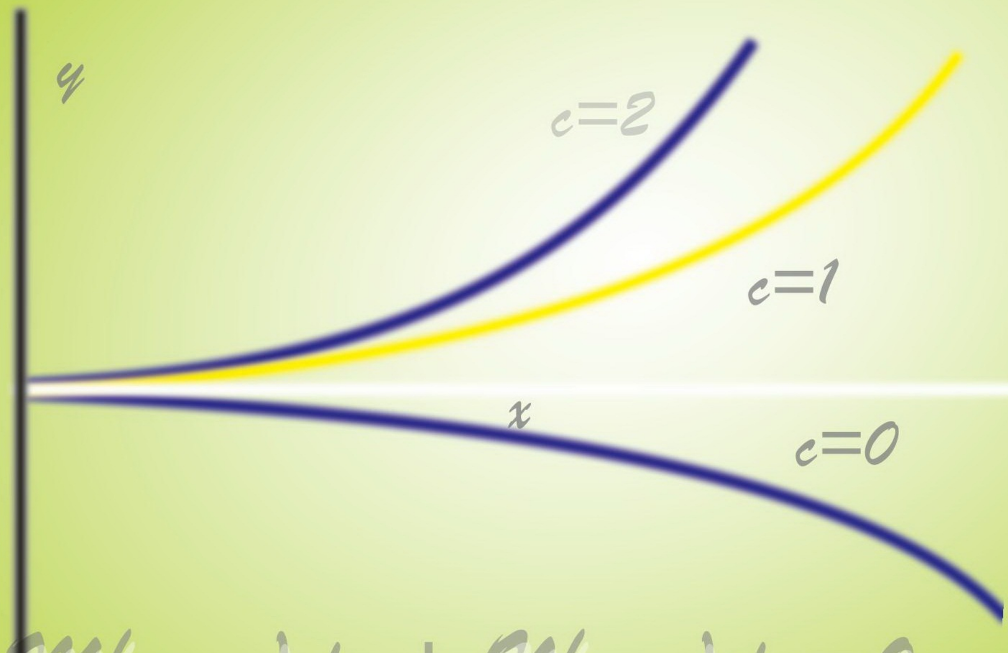


$$M(x, y)dx + N(x,y)dy=0$$

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Firdaus Ubaidillah

JEMBER UNIVERSITY PRESS

Membangun Generasi
Menuju Insan Berprestasi

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Penulis:
Firdaus Ubaidillah

ISBN: 978-623-7973-23-2

Penerbit:
UPT Percetakan & Penerbitan Universitas Jember

Redaksi:
Jl. Kalimantan 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip 00319
e-mail : upt-penerbitan@unej.ac.id

Distributor Tunggal:
UNEJ Press
Jl. Kalimantan 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip 0319
e-mail : upt-penerbitan@unej.ac.id

Kata Pengantar

Puji dan syukur saya panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan nikmat, rahmat, dan hidayahNya sehingga kita dapat beraktivitas sesuai dengan apa yang telah direncanakan. Shalawat beserta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita nabi Muhammad SAW.

Penyusunan buku ajar Persamaan Diferensial Biasa ini dimulai dengan mengenalkan pengertian persamaan diferensial, baik itu persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial. Setelah itu diberikan klasifikasi persamaan diferensial biasa. Dalam penjabaran persamaan diferensial biasa, Anda akan diajak untuk mengenali bentuk-bentuk persamaan diferensial, kemudian penyelesaian persamaan diferensial mulai dari orde satu hingga orde tinggi. Pada umumnya yang dibahas di buku ajar ini adalah persamaan diferensial berbentuk linear, namun untuk persamaan diferensial orde satu diberikan dalam bentuk linear maupun nonlinear. Selain itu, diberikan penerapannya pada permasalahan sehari-hari misalkan pada peluruhan radio aktiv, persamaan pertumbuhan, rangkaian listrik, persamaan getaran, dan lain-lain. Dengan demikian, saya merekomendasikan buku ajar ini bisa juga digunakan oleh mahasiswa di luar program studi matematika misalkan dari program studi fisika dan program-program studi di fakultas teknik. Beberapa metode dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa juga diberikan di sini. Selain itu, pada bab-bab terakhir dibahas tentang sistem persamaan diferensial dan penyelesaiannya baik yang berbentuk linear maupun nonlinear, hingga membahas masalah kestabilan sistem persamaan diferensial linear.

Secara umum, Anda akan menemukan bahwa penyajian materi dalam buku ajar ini mengikuti alur penyajian pada perkuliahan Persamaan Diferensial Biasa di kelas. Dengan demikian, bisa dikatakan bahwa untuk memahami materi perkuliahan Persamaan Diferensial Biasa perlu mempelajari buku ajar ini.

Selain pembahasan materinya yang disajikan secara terstruktur, buku ajar ini juga dilengkapi dengan contoh-contoh penyelesaian persamaan diferensial maupun masalah nilai awal, yang hasilnya sebagian dilengkapi dengan visualisasi dalam bentuk gambar. Penyajian tersebut akan memudahkan pembaca untuk merelasikan apa yang dijelaskan dalam contoh dengan bentuk tampilan grafik penyelesaiannya.

Buku ajar ini juga menyediakan rangkuman materi, bahan diskusi, dan soal-soal latihan yang dapat Anda gunakan untuk mengetahui sejauh mana Anda memahami materi yang telah dipelajari di tiap-tiap bab.

Jember, November 2020
Dr. Mohammad Fatekurrohman, S.Si., M.Si.

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya sehingga penulisan buku ajar **Persamaan Diferensial Biasa** ini dapat diselesaikan dengan baik tanpa kendala yang berarti. Tidak lupa, ucapan terima kasih disampaikan kepada rekan-rekan dosen tim pengajar matakuliah Persamaan Diferensial Biasa di Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah ikut memberikan kontribusi dalam penulisan buku ajar ini.

Persamaan Diferensial Biasa merupakan matakuliah wajib semester ketiga pada program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember semenjak diberlakukan Kurikulum 2017, terdiri dari 3 sks (2 sks kuliah dan 1 sks praktikum).

Buku ajar Persamaan Diferensial Biasa ini ditulis untuk digunakan pada perkuliahan Persamaan Diferensial Biasa di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, meskipun tidak menutup kemungkinan bisa dipakai pada perkuliahan di prodi lain bahkan di luar fakultas MIPA. Penyusunan buku ajar ini dalam rangka untuk mengefektifkan proses pembelajaran, apalagi di masa pandemi covid 19 yang mana hampir seluruh perkuliahan dan praktikum dilaksanakan secara daring. Pada proses pembelajaran di kelas secara daring, biasanya dosen menjelaskan perkuliahan dengan mencatat atau melalui media presentasi atau bahkan video. Mahasiswa umumnya menyalin catatan tersebut sambil menyimak dan mengikuti penjelasan dosen. Proses pembelajaran lebih banyak mendengarkan ceramah dari dosen.

Fungsi dari buku ajar ini, untuk dosen digunakan dalam menjelaskan materi kuliah, sedangkan untuk mahasiswa sebagai pengganti catatan kuliah. Oleh karena itu waktu pembelajaran di kelas dapat digunakan lebih efektif untuk caramah dan diskusi. Pada buku ajar ini, diberikan banyak contoh (teladan) soal yang telah diberikan penyelesaiannya. Harapannya soal-soal yang diberikan di tiap akhir bab dapat diselesaikan oleh mahasiswa sebagai alat ukur keberhasilan memahami materi, begitu juga bahan diskusi yang sudah diberikan di tiap bab.

Buku ajar ini dalam penyusunannya didasarkan pada beberapa buku teks mutahir yang digunakan seperti dituliskan dalam Bibliografi (Daftar Pustaka). Semoga buku ajar ini dapat berguna untuk meningkatkan kualitas pembelajaran matakuliah Persamaan Diferensial Biasa, terlebih khusus di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Jember, November 2020
Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar **iii**

Prakata **v**

Daftar Isi **ix**

Daftar Gambar **xi**

Daftar Tabel **xiii**

1 Konsep Dasar Persamaan Diferensial Biasa **1**
1.1 Klasifikasi Persamaan Diferensial 2
1.1.1 Orde Persamaan Diferensial 4
1.1.2 Persamaan Diferensial Linear dan Nonlinear . . . 5
1.1.3 Persamaan Diferensial Linear Homogen dan Nonhomogen 7
1.2 Sistem Persamaan Diferensial 7
1.3 Penyelesaian Persamaan Diferensial 8
1.4 Rangkuman 9
1.5 Bahan Diskusi 10
1.6 Rujukan/Daftar Pustaka 10
1.7 Soal-soal Latihan 10

2 Persamaan Diferensial Orde Satu dan Aplikasinya **15**
2.1 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu 16
2.2 Persamaan Diferensial Peubah Terpisah (Separabel) . . 18
2.3 Persamaan Diferensial Eksak 22
2.4 Persamaan Diferensial Noneksak dan Faktor Integrasi . 25
2.5 Persamaan Diferensial Bernoulli 31
2.6 Persamaan Diferensial Euler 33

2.7 Masalah Nilai Awal 36
2.8 Aplikasi Persamaan Diferensial Orde Satu 38
2.9 Rangkuman 41
2.10 Bahan Diskusi 42
2.11 Rujukan/Daftar Pustaka 42
2.12 Soal-soal Latihan 43

3 Persamaan Diferensial Orde Dua dan Aplikasinya 47
3.1 Persamaan Diferensial Linear Orde Dua 48
3.2 Persamaan Linear Homogen dengan Koefisien Konstan . 49
3.3 Persamaan Linear Orde Dua Nonhomogen dengan Koefisien Konstan 53
3.4 Aplikasi Persamaan Diferensial Orde Dua 61
3.5 Rangkuman 65
3.6 Bahan Diskusi 66
3.7 Rujukan/Daftar Pustaka 66
3.8 Soal-soal Latihan 67

4 Persamaan Diferensial Linear Orde Lebih dari Dua 69
4.1 Persamaan Linear Homogen dengan Koefisien Konstan . 70
4.2 Persamaan Linear Orde Tinggi Nonhomogen dengan Koefisien Konstan 73
4.3 Rangkuman 76
4.4 Bahan Diskusi 78
4.5 Rujukan/Daftar Pustaka 78
4.6 Soal-soal Latihan 79

5 Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Operator D 81
5.1 Pengertian Operator Diferensial dan Sifat-sifatnya . . . 82
5.2 Kernel Operator D 87
5.3 Invers Operator D 89
5.4 Penyelesaian Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen dengan Koefisien Konstan 92
5.5 Rangkuman 107
5.6 Bahan Diskusi 109
5.7 Rujukan/Daftar Pustaka 109
5.8 Soal-soal Latihan 109

6 Penyelesaian Masalah Nilai Awal dengan Transformasi Laplace 111

6.1 Transformasi Laplace . . . 112
6.2 Sifat-sifat Transformasi Laplace . . . 114
6.3 Transformasi Laplace Invers . . . 117
6.4 Penyelesaian Masalah Nilai Awal dengan Transformasi Laplace . . . 119
6.5 Rangkuman . . . 121
6.6 Bahan Diskusi . . . 122
6.7 Rujukan/Daftar Pustaka . . . 123
6.8 Soal-soal Latihan . . . 123

7 Sistem Persamaan Diferensial Linear Orde Satu 125

7.1 Sistem Persamaan Linear Homogen dengan Koefisien Konstan . . . 127
7.2 Sistem Persamaan Linear Nonhomogen dengan Koefisien Konstan . . . 132
7.3 Rangkuman . . . 136
7.4 Bahan Diskusi . . . 137
7.5 Rujukan/Daftar Pustaka . . . 137
7.6 Soal-soal Latihan . . . 137

8 Kestabilan Sistem Persamaan Diferensial 139

8.1 Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear . . . 140
8.2 Kestabilan Sistem Persamaan Diferensial . . . 143
8.3 Rangkuman . . . 146
8.4 Bahan Diskusi . . . 147
8.5 Rujukan/Daftar Pustaka . . . 148
8.6 Soal-soal Latihan . . . 148

Daftar Pustaka/Bibliografi 150

Glosarium 153

Indeks 155

Biografi 157

Daftar Gambar

1.1 Bandul matematis 5

2.1 Grafik $y = ce^{2x} - 3/2$, untuk beberapa nilai c 18
2.2 Grafik penyelesaian $y' - \frac{y}{2} = e^{-x}$, dengan $y(0) = 7/3$ . . 31

3.1 Grafik penyelesaian masalah nilai awal $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -3$ 52
3.2 Grafik solusi $y'' + 4y = x + 2e^{-3x}, y(0) = 1, y'(0) = -1$. 60
3.3 Ilustrasi permasalahan pada soal 61
3.4 Grafik pergerakan partikel 62
3.5 Grafik pergerakan partikel dengan peredaman 63
3.6 Grafik (a) muatan listrik, dan (b) arus listrik 64

6.1 Rangkaian listrik soal nomor 14 124

8.1 Bidang fasa x_1 vs t kasus nilai-nilai karakteristik bertanda negatif 143
8.2 Bidang fasa x_1 vs t kasus nilai-nilai karakteristik berbeda tanda 144
8.3 Bidang fasa x_1 vs t kasus nilai-nilai karakteristik bertanda sama 144

Daftar Tabel

1.1 Persamaan diferensial biasa dengan nama-nama khusus 3
1.2 Persamaan diferensial parsial dengan nama-nama khusus 4
1.3 Beberapa contoh persamaan diferensial linear dan non-linear 6

6.1 Tabel Transformasi Laplace Fungsi-fungsi Khusus 113

8.1 Sifat-sifat kestabilan sistem persamaan linear 146

Bab 1

Konsep Dasar Persamaan Diferensial Biasa

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami konsep dasar persamaan diferensial biasa;
2. mampu berpikir kritis dan logis;
3. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. mengklasifikasi persamaan diferensial (PDB dan PDP, persamaan diferensial orde satu dan orde tinggi, persamaan diferensial linear dan nonlinear, dan persamaan diferensial linear homogen dan nonhomogen);
2. menjelaskan pengertian persamaan diferensial linear dan membedakan dengan persamaan diferensial nonlinear;
3. menjelaskan pengertian penyelesaian umum, masalah nilai awal, dan metode penyelesaian persamaan diferensial.

1.1 Klasifikasi Persamaan Diferensial

Untuk mempelajari persamaan diferensial biasa, yang pertama adalah perlu memahami klasifikasi persamaan diferensial. Untuk itu, terlebih dahulu diberikan pengertian persamaan diferensial.

Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan (derivatif) satu atau lebih peubah tak bebas (peubah terikat) terhadap satu atau lebih peubah bebas suatu fungsi. Berikut beberapa contoh persamaan diferensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = \cos t \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial t} = 2v \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.4}$$

Klasifikasi persamaan diferensial tergantung pada banyaknya peubah bebas. Jika persamaan diferensial tergantung hanya pada satu peubah bebas dikatakan **persamaan diferensial biasa** (PDB), dan jika bergantung pada lebih dari satu peubah bebas dikatakan **persamaan diferensial parsial** (PDP). Berikut diberikan contoh masing-masing persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.
Persamaan

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sin t\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = 2t \tag{1.5}$$

merupakan persamaan diferensial biasa dengan satu peubah tak bebas y dan satu peubah bebas t, sedangkan

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{1.6}$$

merupakan persamaan diferensial parsial dengan satu peubah tak bebas u dan dua peubah bebas x dan t.

Untuk selanjutnya, terkadang penulisan $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ cukup ditulis $\frac{d^2y}{dt^2}$ saja, penulisan $\frac{dy(x)}{dx}$ cukup ditulis $\frac{dy}{dx}$ saja, dan sebagainya. Persamaan (1.6) dapat pula dituliskan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ yang dapat dipahami bahwa u

adalah fungsi dari x dan t. Selain itu, terkadang penulisan $\frac{dy}{dx}$ diganti dengan y', penulisan $\frac{d^2y}{dx^2}$ diganti dengan y'', penulisan $\frac{d^3y}{dx^3}$ diganti dengan y''', dan penulisan $\frac{d^4y}{dx^4}$ diganti dengan y^{iv}. Sedangkan untuk turunan lebih tinggi dari empat, misalkan $\frac{d^7y}{dx^7}$ dituliskan dengan $y^{(7)}$ dan ini tentunya berbeda dengan y^7.

Beberapa persamaan diferensial terkadang secara khusus memiliki nama sendiri. Persamaan diferensial biasa dan parsial dengan nama-nama khusus masing-masing diberikan pada Tabel 1.1 dan Tabel 1.2.

Tabel 1.1: Persamaan diferensial biasa dengan nama-nama khusus

No.	Bentuk persamaan diferensial	Nama persamaan
1.	$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + p(p+1)y = 0$	Persamaan Legendre
2.	$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-p^2)y = 0$	Persamaan Bessel
3.	$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$	Persamaan Airy
4.	$(1-x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$	Persamaan Chebyshev
5.	$y'' - 2xy' + 2py = 0$	Persamaan Hermite
6.	$y' = p(x)y + q(x)y^n$	Persamaan Bernoulli
7.	$x^2y'' + axy' + by = 0$	Persamaan Euler

Tabel 1.2: Persamaan diferensial parsial dengan nama-nama khusus

No.	Bentuk pers. diferensial	Nama persamaan
1.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	Persamaan Laplace dimensi dua
2.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	Persamaan Laplace dimensi tiga
3.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$	Persamaan Poisson
4.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	Persamaan gelombang
5.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t}$	Persamaan panas

1.1.1 Orde Persamaan Diferensial

Penentuan orde dari suatu persamaan diferensial tergantung pada kandungan fungsi turunan yang ada di dalam persamaan diferensial tersebut. **Orde persamaan diferensial** adalah orde tertinggi turunan yang muncul pada persamaan diferensial. Persamaan diferensial (1.1), (1.4), (1.5) dan (1.6) merupakan contoh-contoh persamaan diferensial orde dua. Sedangkan persamaan diferensial (1.2) dan (1.3) masing-masing berorde empat dan satu.

Definisi 1.1. **Persamaan diferensial biasa orde satu**, *atau cukup dikatakan* **persamaan diferensial orde satu**, *adalah persamaan diferensial yang berbentuk*

$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{1.7}$$

Secara umum, **persamaan diferensial orde** n *adalah persamaan diferensial yang berbentuk*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}). \tag{1.8}$$

1.1.2 Persamaan Diferensial Linear dan Nonlinear

Persamaan diferensial orde satu (1.7) dikatakan **linear** jika persamaan (1.7) dapat dinyatakan dengan

$$y'(x) = r(x)y + s(x). \tag{1.9}$$

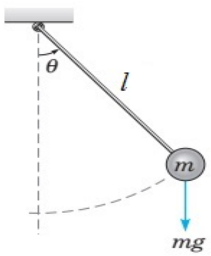
Jika tidak demikian maka persamaan diferensial dikatakan **tidak linear** atau **nonlinear**. Secara umum, persamaan diferensial dikatakan **linear** orde n jika persamaan diferensial tersebut dapat dituliskan sebagai

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \tag{1.10}$$

dengan $a_n \neq 0$.
Persamaan diferensial biasa dikatakan **nonlinear** jika ia tidak linear, yakni tidak dapat dinyatakan dalam persamaan (1.10). Salah satu contoh persamaan diferensial nonlinear yang sering muncul dalam fisika adalah persamaan bandul matematis yang diberikan

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \tag{1.11}$$

dengan θ menyatakan besar sudut simpangan, g gaya gravitasi bumi dan l panjang tali (Gambar 1.1).



Gambar 1.1: Bandul matematis

Untuk kasus θ yang cukup kecil, nilai $\sin\theta$ dapat dihampiri oleh θ, yakni $\sin\theta \approx \theta$, sehingga persamaan (1.11) dapat diganti menjadi persamaan linear

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Beberapa contoh persamaan diferensial biasa linear dan nonlinear yang lain diberikan pada Tabel 1.3.

Tabel 1.3: Beberapa contoh persamaan diferensial linear dan nonlinear

No.	Persamaan diferensial	Linear/Nonlinear
1.	$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + p(p+1)y = 0$	Linear
2.	$\frac{d^4x}{dt^4} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = \cos t$	Linear
3.	$\frac{d^2y}{dx^2} + 3y(\frac{dy}{dx} - 4) = x$	Nonlinear
4.	$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 3x\frac{dy}{dx} = 0$	Nonlinear
5.	$y'' - 2xy' + \sqrt{y} = 0$	Nonlinear

Persamaan (1.10) dikatakan **persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan** jika $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ semuanya konstan, jika tidak maka dikatakan **persamaan diferensial dengan koefisien peubah**. Berikut beberapa contoh persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan dan dengan koefisien peubah:

1. $y'' + 5y' - 3y = \cos x$ merupakan persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan.

2. Persamaan-persamaan diferensial yang diberikan pada Tabel 1.1 (persamaan Legendre, Bessel, Airy, Chebyshev, Hermite, dan Euler) semuanya merupakan persamaan diferensial linear dengan koefisien peubah.

1.1.3 Persamaan Diferensial Linear Homogen dan Nonhomogen

Persamaan diferensial linear (1.10), yakni

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

dengan $a_n \neq 0$, dikatakan **homogen** atau **tereduksi** jika $b(x) = 0$ dan dikatakan **nonhomogen** atau **lengkap** jika $b(x) \neq 0$. Berikut beberapa contoh persamaan diferensial linear homogen dan nonhomogen:

1. $y'' + 5y' - 3y = \cos x$ merupakan persamaan diferensial linear nonhomogen.

2. Persamaan-persamaan diferensial yang diberikan pada Tabel 1.1 (persamaan Legendre, Bessel, Airy, Chebyshev, Hermite, dan Euler) semuanya merupakan persamaan diferensial linear homogen.

1.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan kumpulan dari beberapa persamaan diferensial yang saling berkaitan. Berdasarkan kelinearannya, sistem persamaan diferensial dibedakan menjadi sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear. Sebagai contoh sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y + 2t \\ \frac{dy}{dt} &= 3y - 2 \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t \\ -2 \end{bmatrix}$$

merupakan sistem persamaan diferensial linear orde satu. Contoh lain, **persamaan Lorenz** sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \sigma(-x+y) \\
\frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\
\frac{dz}{dt} &= -bz + xy
\end{aligned}
$$

merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu.

1.3 Penyelesaian Persamaan Diferensial

Penyelesaian atau **solusi** persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial yang dimaksudkan. Sebagai contoh, fungsi $y = e^x - 1$ adalah penyelesaian dari persamaan diferensial $y' = y + 1$. Perhatikan bahwa fungsi lain $y = 3e^x - 1$, juga merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial $y' = y + 1$. Ini artinya bahwa penyelesaian dari persamaan $y' = y + 1$ tidak tunggal. Secara umum, penyelesaian persamaan diferensial $y' = y + 1$ adalah $y = ce^x - 1$ dengan c konstanta sebarang.

Penyelesaian umum persamaan diferensial adalah koleksi (keluarga) fungsi yang memenuhi persamaan diferensial yang dimaksudkan, dalam hal ini penyelesaiannya masih mengandung konstanta esensial. **Penyelesaian khusus** persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial yang dimaksudkan, dalam hal ini penyelesaiannya tidak mengandung konstanta esensial. **Penyelesaian singular** adalah penyelesaian persamaan diferensial yang tidak didapat dari hasil mensubstitusikan nilai konstanta pada penyelesaian umumnya.

Penyelesaian persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan lebih sederhana dibandingkan dengan koefisien peubah. Namun begitu, dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (1.9) terhadap peubah x, terkadang tidak menghasilkan seperti yang diharapkan. Sebagai contoh, untuk menyelesaikan persamaan

$$y' = 2y + 1$$

dengan cara mengintegralkan kedua ruas terhadap peubah x diperoleh

$$\int y'(x)\; dx = 2\int y(x)\; dx + x + C,$$

dengan C sebarang bilangan real. Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus berakibat $\int y'(x)dx = y(x)$, sehingga didapatkan

$$y = 2\int y\ dx + x + C.$$

Pengintegrasian kedua ruas persamaan tidak cukup untuk menentukan penyelesaian y, karena masih perlu menentukan primitif dari y.

1.4 Rangkuman

1. Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat turunan (derivatif) satu atau lebih peubah tak bebas (peubah terikat) terhadap satu atau lebih peubah bebas suatu fungsi.

2. Klasifikasi persamaan diferensial (biasa atau parsial) tergantung pada banyaknya peubah bebas. Jika hanya tergantung hanya pada satu peubah bebas maka dikatakan persamaan diferensial biasa, dan jika bergantung pada dua atau lebih peubah bebas dikatakan persamaan diferensial parsial.

3. Orde persamaan diferensial adalah orde tertinggi turunan yang muncul pada persamaan diferensial.

4. Persamaan diferensial berbentuk
$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = b(x)$$
merupakan persamaan diferensial linear jika $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ merupakan fungsi-fungsi dari x saja (tidak mengandung y dan turunannya), jika tidak maka dikatakan persamaan nonlinear.

5. Persamaan diferensial linear
$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0 y = b(x)$$
dikatakan homogen jika $b(x) = 0$, dan dikatakan nonhomogen jika $b(x) \neq 0$.

6. Sistem persamaan diferensial merupakan kumpulan dari beberapa persamaan diferensial yang saling berkaitan.

7. Penyelesaian persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial.

1.5 Bahan Diskusi

Diskusikan beberapa hal berikut

1. Berikan satu buah contoh persamaan diferensial biasa nonlinear orde tiga.

2. Berikan satu buah contoh persamaan diferensial biasa linear orde dua nonhomogen dengan koefisien tidak konstan.

3. Berikan alasan mengapa persamaan diferensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin(x + y) = \sin x.$$

bukan merupakan persamaan diferensial linear.

1.6 Rujukan/Daftar Pustaka

1 Boyce, W.E., R.C. DiPrima, dan D.B. Meade, 2017, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th edition, John Wiley & Sons

2 Howell, K.B, 2019, *Ordinary Differential Equations: An Introduction to the Fundamentals*, CRC Press

3 Simmons, G.F. dan S.G. Krantz, 2007, *Differential Equations Theory, Technique, and Practice.* International Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc.

1.7 Soal-soal Latihan

1. Klasifikasikan persamaan-persamaan diferensial berikut berdasarkan PDB atau PDP dan tentukan peubah bebas dan peubah terikat (peubah tak bebas)

No.	Pers. diferensial	PDB/PDP	Peub. bebas/terikat
a.	$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0$	PDB	x/y
b.	$y''' - 2y' + y = \cos t$	$\cdots$	$\cdots$
c.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$	$\cdots$	$\cdots$
d.	$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2t$	$\cdots$	$\cdots$
e.	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$	$\cdots$	$\cdots$

2. Klasifikasikan persamaan-persamaan diferensial biasa berikut berdasarkan orde dan kelineararan

No.	Persamaan diferensial	Orde	Linear/Nonlinear
a.	$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0$	Dua	Linear
b.	$(t-1)\frac{d^4x}{dt^4} + 3\frac{dx}{dt} - 4\sqrt{x} = \cos t$	$\cdots$	$\cdots$
c.	$yy'' - 3y' = 2x$	$\cdots$	$\cdots$
d.	$y^{(5)} + 3xy'' = x^{3/2}$	$\cdots$	$\cdots$
e.	$\frac{dy}{dt} - t\sqrt{y} = 0$	$\cdots$	$\cdots$

3. Klasifikasikan persamaan-persamaan diferensial biasa linear berikut berdasarkan koefisien-koefisiennya

No.	Persamaan diferensial	Koef. konstan / peubah
a.	$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0$	Koefisien peubah
b.	$\frac{d^4x}{dt^4} + 3\frac{dx}{dt} - 4x - \cos t = 0$	$\cdots$
c.	$y^{iv} - y = x$	$\cdots$
d.	$xy'' - 1 = 0$	$\cdots$
e.	$\frac{d^2s}{dt^2} + ts = \cos t$	$\cdots$

4. Klasifikasikan persamaan-persamaan diferensial biasa linear berikut berdasarkan kehomogenannya:

No.	Persamaan diferensial	Homogen/Nonhomogen
a.	$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0$	Homogen
b.	$\frac{d^4x}{dt^4} + 3\frac{dx}{dt} - 4x - \cos t = 0$	$\cdots$
c.	$y^{iv} - y = x$	$\cdots$
d.	$xy'' - 1 = 0$	$\cdots$

5. Periksa, apakah $y(t) = 3t + t^2$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial
$$ty' - y = t^2.$$

6. Periksa bahwa fungsi implisit $y = \arcsin(xy)$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial
$$xy' + y = y'\sqrt{1 - x^2y}$$

7. Periksa, apakah fungsi $y(x) = \cos 2x$ merupakan penyelesaian masalah nilai awal
$$y'' + 4y = 0; \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

8. Diberikan persamaan diferensial
$$y'' + y' - 6y = 0.$$
Jika penyelesaian persamaan diferensial tersebut berbentuk $y = e^{px}$, tentukan nilai-nilai dari p yang memenuhi.

9. Tunjukkan bahwa fungsi
$$y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$
merupakan penyelesaian persamaan diferensial
$$y' = 2xy + 1.$$

10. Diberikan persamaan diferensial
$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$
Periksa bahwa
    (a) fungsi $y = e^x$ dan fungsi $y = e^{4x}$ keduanya merupakan penyelesaian persamaan diferensial yang diberikan tersebut.
    (b) fungsi $y = c_1e^x + c_2e^{4x}$ dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang, merupakan penyelesaian persamaan diferensial yang diberikan tersebut.

11. Periksa bahwa $x^2y = \ln y + C$ dengan C konstanta sebarang, merupakan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{(1 - x^2y)}.$$

12. Untuk nilai-nilai m berapa saja sehingga fungsi $y = y_m = e^{mx}$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial

$$2y''' + y'' - 5y' + 2y = 0?$$

Bab 2

Persamaan Diferensial Orde Satu dan Aplikasinya

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami bentuk-bentuk persamaan diferensial orde satu;
2. mampu berpikir kritis dan logis;
3. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menyelesaikan persamaan diferensial orde satu baik linear maupun nonlinear dalam bentuk persamaan peubah terpisah (separabel), persamaan diferensial eksak, noneksak, maupun bentuk-bentuk persamaan diferensial yang lain;
2. mengaplikasikan persamaan diferensial orde satu pada kasus-kasus pertumbuhan populasi, peluruhan radioaktiv, dan lain-lain.

Pada bab in akan dibahas penyelesaian persamaan diferensial, baik yang berbentuk linear maupun nonlinear.

Persamaan diferensial orde satu dapat dinyatakan dalam bentuk

$$y'(x) = f(x, y),$$

dengan f fungsi sebarang. Atau jika dinyatakan dalam bentuk derivatif adalah

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

dengan M dan N fungsi-fungsi sebarang.

2.1 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde satu adalah

$$y'(x) = a(x)y + b(x), \tag{2.1}$$

dengan a dan b fungsi-fungsi sebarang dari x. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde satu (2.1), terlebih dahulu diawali dengan hal sederhana, yakni menganggap a dan b konstanta. Untuk hal itu, diberikan teorema berikut.

Teorema 2.1. *Persamaan diferensial linear*

$$y' = ay + b \tag{2.2}$$

dengan a dan b konstan dan $a \neq 0$, mempunyai tak berhingga banyak penyelesaian dalam bentuk

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Bukti. Pertama pandang kasus $b = 0$, sehingga $y' = ay$ dengan a sebarang bilangan real. Oleh karena itu, diperoleh

$$y' = ay \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = a \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|)' = a \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = ax + C_0$$

dengan $C_0 \in \mathbb{R}$ adalah konstanta integrasi. Karena itu diperoleh

$$y(x) = \pm e^{ax+C_0} = \pm e^{C_0}e^{ax} = Ce^{ax}$$

dengan $C = \pm e^{C_0}$. Ini merupakan penyelesaian persamaan diferensial untuk kasus $b = 0$.
Untuk kasus $b \neq 0$ dapat dikonversi ke dalam kasus di atas, yakni dengan cara menuliskan

$$y' = ay + b \Rightarrow y' = a\big(y + b/a\big) \Rightarrow \big(y + b/a)' = a\big(y + b/a).$$

Dengan menotasikan $\overline{y} = y + (b/a)$, persamaan di atas dapat ditulis sebagai $\overline{y}' = a\overline{y}$. Dari hasil penyelesaian sebelumnya, diperoleh penyelesaian

$$\overline{y}(x) = Ce^{ax}$$

Oleh karena itu, dengan mengembalikan $\overline{y}$, diperoleh penyelesaian umum

$$y(x) + \frac{b}{a} = Ce^{ax} \Rightarrow y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a},$$

dengan C konstanta sebarang.
Bukti selesai. □

Pada Teorema 2.1 mengatakan bahwa persamaan diferensial mempunyai penyelesaian yang tak berhingga banyak. Argumen yang kita gunakan untuk membuktikan Teorema 2.1 tidak dapat digeneralisasi dengan sederhana ke semua bentuk persamaan linear dengan koefisien peubah. Namun, ada cara untuk menyelesaikan persamaan linear dengan koefisien-koefisien peubah dengan menggunakan teknik faktor integrasi. Untuk itu diberikan contoh berikut.

Contoh 2.2. *Tentukan semua penyelesaian persamaan diferensial dengan koefisien konstan*

$$y' = 2y + 3$$

Penyelesaian:
Tulis persamaan diferensial sebagai berikut

$$y' - 2y = 3$$

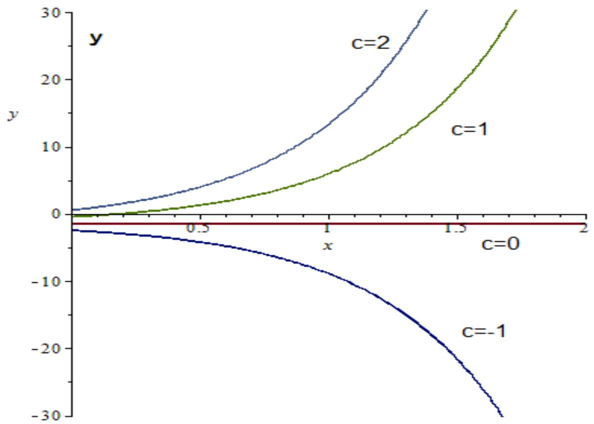
Kalikan persamaan ini dengan $\mu(x) = e^{-2x}$, diperoleh

$$\begin{aligned} e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y = 3e^{-2x} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-2x}y' + (e^{-2x})'y = 3e^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \quad (e^{-2x}y)' = 3e^{-2x} \end{aligned}$$

yang selanjutnya dengan mengintegralkan diperoleh penyelesaian

$$e^{-2x}y = -\frac{3}{2}e^{-2x} + C \qquad \text{atau} \qquad y = Ce^{2x} - \frac{3}{2}$$

dengan C konstanta sebarang. Grafik penyelesaian diberikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1: Grafik $y = ce^{2x} - 3/2$, untuk beberapa nilai c

Penggunaan faktor integrasi lebih jauh akan diberikan pada subbab 2.4.

2.2 Persamaan Diferensial Peubah Terpisah (Separabel)

Bentuk umum **persamaan diferensial peubah terpisah** atau **separabel** dalam bentuk derivatif adalah

$$M(x)\ dx + N(y)\ dy = 0. \tag{2.4}$$

Sebagai contoh, persamaan diferensial

$$y' = xy, \tag{2.5}$$

merupakan persamaan diferensial peubah terpisah karena persamaan (2.5) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x\ dx - \frac{1}{y}\ dy = 0,$$

dengan menganggap $y \neq 0$. Sedangkan persamaan diferensial

$$y' = \sin x + y$$

bukan merupakan persamaan diferensial peubah terpisah karena tidak dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (2.4).

Untuk penyelesaian persamaan diferensial peubah terpisah dalam bentuk persamaan (2.4), cukup kedua ruas persamaan diintegralkan secara langsung, yakni

$$\int M(x)\ dx + \int N(y)\ dy = 0,$$

asalkan M dan N keduanya terintegralkan (misalkan M dan N keduanya fungsi kontinu).
Untuk memperjelas penyelesaian persamaan diferensial peubah terpisah, diberikan contoh-contoh berikut.

Contoh 2.3. *Tentukan penyelesaian persamaan diferensial*

$$2yy' + 9x = 0.$$

Penyelesaian:
Persamaan diferensial di atas merupakan persamaan diferensial peubah terpisah karena dapat dinyatakan sebagai

$$9x\ dx + 2y\ dy = 0.$$

Untuk mendapatkan penyelesaiannya, dengan cara berikut

$$\begin{aligned} & 9x\ dx + 2y\ dy = 0 \\ \Rightarrow \quad & \int 9x\ dx + \int 2y\ dy = \int 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{9}{2}x^2 + y^2 = c \end{aligned}$$

Jadi penyelesaian persamaan diferensialnya adalah $\frac{9}{2}x^2 + y^2 = c$, dengan c konstanta sebarang. □

Contoh 2.4. *Tentukan penyelesaian persamaan diferensial*

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Penyelesaian:
Persamaan diferensial ini merupakan persamaan diferensial peubah terpisah karena dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{y}\,dy = 0.$$

Untuk mendapatkan penyelesaiannya, dengan cara berikut

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{y}\,dy = 0 & \\
\Rightarrow\quad & \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx & \\
\Rightarrow\quad & \ln y = \ln x + c_1 & ; c_1 \text{ konstanta integrasi} \\
\Rightarrow\quad & \ln y = \ln x + \ln c & ; \text{di sini } \ln c = c_1 \\
\Rightarrow\quad & \ln y = \ln (cx) & ; \text{sifat logaritma} \\
\Rightarrow\quad & y = cx &
\end{aligned}$$

Jadi penyelesaian persamaan diferensialnya adalah $y = cx$, dengan c konstanta sebarang, yakni penyelesaiannya merupakan koleksi semua persamaan garis yang melalui titik asal (kecuali sumbu-y). $\square$

Teorema 2.5. *Jika h dan g keduanya fungsi kontinu, dengan $h \neq 0$, maka*

$$h(y)y' = g(x)$$

mempunyai penyelesaian y tak berhingga banyak yang memenuhi

$$H(y) = G(x) + c,$$

dengan H dan G berturut-turut anti turunan h dan g, dan c konstanta sebarang.

Bukti. Integralkan kedua ruas persamaan terhadap x,

$$h(y)y' = g(x) \quad \Rightarrow \quad \int h(y(x))y'(x)\;dx = \int g(x)\;dx + c,$$

dengan c konstanta sebarang. Karena $y = y(x)$ berakibat $dy = y'(x)dx$, dan mensubstitusikan ke persamaan di atas, diperoleh

$$\int h(y(x))y'(x)\;dx = \int h(y)\;dy \quad \Rightarrow \quad \int h(y)\;dy = \int g(x)\;dx + c.$$

Selanjutnya, tulis H dan G masing-masing primitif dari h dan g

$$H(y) = \int h(y)\ dx, \qquad G(x) = \int g(x)\ dx.$$

Dengan demikian diperoleh hubungan

$$H(y) = G(x) + c,$$

yang mana ini secara implisit mendefinisikan fungsi y yang bergantung pada x.
Bukti selesai. □

Contoh 2.6. *Tentukan semua penyelesaian y dari persamaan diferensial*

$$y' = \frac{x^2}{1 - y^2}.$$

Penyelesaian:
Nyatakan persamaan diferensial dalam bentuk

$$(1 - y^2)y' = x^2.$$

Karena $h(y) = 1 - y^2$ dan $g(x) = x^2$ keduanya fungsi kontinu, dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan diperoleh

$$\int (1 - y^2)y'(x)\ dx = \int x^2\ dt + c,$$

dengan c konstanta sebarang. Ini memberikan

$$\int (1 - y^2)\ dy = \int x^2\ dx + c,$$

sehingga diperoleh penyelesaian

$$y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c,$$

dengan c konstanta sebarang. □

Contoh 2.7. *Tentukan penyelesaian masalah nilai awal*

$$(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0, \qquad y(0) = 2.$$

Penyelesaian:
Persamaan diferensial $(x^2+1)y' + y^2 + 1 = 0$ merupakan persamaan diferensial peubah terpisah karena dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{x^2+1} + \frac{dy}{y^2+1} = 0.$$

Untuk mendapatkan penyelesaian persamaan terakhir di atas, dengan cara berikut

$$\begin{aligned}
& \frac{dx}{x^2+1} + \frac{dy}{y^2+1} = 0 \\
\Rightarrow \quad & \int \frac{dy}{y^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = 0 \\
\Rightarrow \quad & \arctan y + \arctan x = c_1 \\
\Rightarrow \quad & \tan(\arctan y + \arctan x) = c, \quad (c = \tan c_1) \\
\Rightarrow \quad & \frac{x+y}{1-xy} = c
\end{aligned}$$

Jadi penyelesaian umum persamaan diferensialnya adalah $\frac{x+y}{1-xy} = c$, dengan c konstanta sebarang. Selanjutnya, diberikan nilai awal $y(0) = 2$, sehingga

$$\frac{0+2}{1-0\cdot 2} = c \qquad \Rightarrow c = 2.$$

Jadi penyelesaian masalah nilai awal di atas adalah

$$\frac{x+y}{1-xy} = 2 \quad \text{atau} \quad y = \frac{2-x}{1+2x}.$$

□

2.3 Persamaan Diferensial Eksak

Suatu persamaan dikatakan **persamaan diferensial eksak** jika ia merupakan turunan total dari suatu fungsi, yang disebut **fungsi potensial**. Persamaan diferensial eksak mudah untuk diintegralkan. Penyelesaian dari persamaan diferensial ini merupakan permukaan dari fungsi potensial. Definisi persamaan diferensial eksak secara matematis diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.8. Persamaan diferensial eksak *adalah persamaan diferensial yang berbentuk*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

dengan M dan N adalah fungsi-fungsi yang memenuhi

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Dari definisi di atas, akan kita tunjukkan bahwa persamaan diferensial peubah terpisah (separabel) merupakan persamaan diferensial eksak melalui teorema berikut.

Teorema 2.9. *Setiap persamaan diferensial peubah terpisah merupakan persamaan diferensial eksak.*

Bukti. Diberikan sebarang persamaan diferensial peubah terpisah yang berbentuk $M(x)dx + N(y)dy = 0$. Akibatnya diperoleh

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0, \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Jadi

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

yang menunjukkan ini sebagai persamaan diferensial eksak. □

Persamaan diferensial eksak dapat ditulis ulang sebagai turunan total suatu fungsi, yang disebut fungsi potensial. Penyelesaian persamaan diferensial eksak diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.10. *Jika persamaan diferensial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

merupakan persamaan diferensial eksak, maka ia dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\psi}{dx}(x, y) = 0,$$

dengan ψ disebut **fungsi potensial** *dan memenuhi*

$$N = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \text{dan} \qquad M = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Oleh karena itu, penyelesaian persamaan diferensial eksak yang diberikan dalam bentuk implisit adalah

$$\psi(x, y) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Contoh 2.11. *Tentukan semua penyelesaian persamaan diferensial*

$$2xyy' + 2x + y^2 = 0$$

Penyelesaian:
Di sini tahap awal untuk menyelesaiakannya adalah memeriksa apakah persamaan diferensial tersebut eksak atau bukan.
Ambil

$$N(x,y) = 2xy \qquad \text{dan} \qquad M(x,y) = 2x + y^2.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y.$$

Karena $\partial_x N = \partial_y M$, hal ini menunjukkan persamaan diferensial eksak. Berdasarkan Teorema 2.10, terdapat fungsi potensial ψ yang memenuhi persamaan

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) \tag{2.6}$$

dan

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y). \tag{2.7}$$

Dengan mengintegralkan persamaan (2.6)terhadap y, diperoleh

$$\psi(x,y) = \int N(x,y)\; dy = xy^2 + g(x)$$

dengan $g(x)$ fungsi sebarang yang tergantung pada x.
Selanjutnya turunkan fungsi ψ terhadap x dan substitusikan ke persamaan (2.7), diperoleh

$$y^2 + g'(x) = \partial_x \psi(x,y) = M(x,y) = 2x + y^2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2x.$$

Integralkan persamaan terakhir di atas terhadap x, diperoleh

$$g(x) = x^2.$$

Dengan demikian diperoleh persamaan potensial

$$\psi(x,y) = xy^2 + x^2$$

Dengan menggunakan Teorema 2.10, diperoleh penyelesaian dalam bentuk implisit

$$xy^2 + x^2 = c,$$

dengan c konstanta sebarang. □

2.4 Persamaan Diferensial Noneksak dan Faktor Integrasi

Terkadang persamaan diferensial noneksak dapat ditulis ulang sebagai persamaan diferensial eksak. Salah satu caranya adalah mengalikan persamaan diferensial dengan fungsi yang sesuai. Jika hasil persamaan barunya merupakan persamaan diferensial eksak, fungsi perkaliannya disebut **faktor integrasi**.

Definisi 2.12. Persamaan diferensial semieksak *adalah persamaan diferensial noneksak yang dapat ditransformasi ke dalam persamaan diferensial eksak setelah dikalikan dengan faktor integrasi.*

Sebagai kejelasannya untuk mengetahui suatu persamaan diferensial semieksak, diberikan contoh berikut.

Contoh 2.13. *Persamaan diferensial linear berbentuk* $y' = a(x)y + b(x)$ *merupakan persamaan diferensial semieksak.*

Penyelesaian:
Pertama akan ditunjukkan persamaan diferensial noneksak.
Persamaan diferensial ditulis ulang menjadi

$$y' - ay - b = 0.$$

Diambil

$$N(x, y) = 1 \qquad \text{dan} \qquad M(x, y) = -a(x)y - b(x)$$

sehingga diperoleh

$$\partial_x N(x, y) = 1 \qquad \text{dan} \qquad \partial_y M(x, y) = -a(x).$$

Oleh karena itu

$$\partial_x N(x, y) \neq \partial_y M(x, y).$$

Ini menunjukkan persamaan diferensial noneksak.
Selanjutnya, untuk menunjukkan persamaan diferensial semieksak adalah dengan mengalikan persamaan diferensial dengan suatu fungsi, katakan μ, yang bergantung pada x

$$\mu(x)y' - \mu(x)a(x)y - \mu(x)b(x) = 0.$$

Perhatikan persamaan terakhir di atas, jika diambil $\overline{N} = \mu$ dan $\overline{M} = -a\mu y - \mu b$, maka persamaan diferensial tersebut berbentuk

$$\overline{M}dx + \overline{N}dy = 0,$$

yang merupakan persamaan diferensial eksak. Oleh karena itu, persamaan diferensial pada permasalahan di atas merupakan persamaan diferensial semieksak. □

Teorema 2.14. *Diberikan persamaan diferensial noneksak*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Jika didefinisikan fungsi

$$h = \frac{\partial_y M - \partial_x N}{N}$$

yang hanya bergantung pada x tetapi tidak bergantung pada y, maka persamaan diferensial

$$e^H M dx + e^H N dy = 0$$

dengan H anti turunan h, merupakan persamaan diferensial eksak.

Bukti. Diberikan persamaan diferensial

$$e^H M dx + e^H N dy = 0$$

Ambil

$$\overline{N}(x, y) = e^H N \qquad \text{dan} \qquad \overline{M} = e^H M.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\partial_x \overline{N} = e^H \Big(\frac{\partial_y M - \partial_x N}{N} \Big) = \partial_y \overline{M}.$$

Ini membuktikan persamaan $e^H M dx + e^H N dy = 0$ merupakan persamaan diferensial eksak. □

Dalam Teorema 2.14, faktor integrasinya adalah fungsi $\mu(x) = e^{H(x)}$, dan sebarang faktor integrasi μ merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial

$$\mu'(x) = h(x)\mu(x).$$

Contoh 2.15. *Tentukan semua penyelesaian y dari persamaan diferensial*

$$(x^2 + xy)y' + (3xy + y^2) = 0.$$

Penyelesaian:
Ambil

$$N(x,y) = x^2 + xy \qquad \text{dan} \qquad M(x,y) = 3xy + y^2.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\partial_x N = 2x + x, \qquad \text{dan} \qquad \partial_y M = 3x + 2y.$$

Karena $\partial_x N \neq \partial_y M$, ini menunjukkan persamaan diferensial noneksak.
Definisikan fungsi h

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial_y M(x,y) - \partial_x N(x,y)}{N(x,y)} \\ &= \frac{(3x+2y) - (2x+y)}{x^2 + xy} \\ &= \frac{(x+y)}{x(x+y)} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Di sini, fungsi h tidak bergantung pada y dan hanya bergantung pada x saja. Ini mengakibatkan persamaan diferensial noneksak dapat ditransformasikan ke dalam persamaan diferensial eksak. Selanjutnya kalikan persamaan diferensial di atas dengan fungsi μ yang memenuhi $\mu'(x) = h(x)\mu(x)$. Dengan demikian

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{x},$$

akibatnya diperoleh $\mu(x) = x + c$. Pilih $c = 0$, sehingga didapatkan

$$\mu(x) = x.$$

Kalikan persamaan diferensial semula dengan faktor integrasi μ, diperoleh

$$(x^3 + x^2 y)dy + (3x^2 y + xy^2)dx = 0.$$

Ambil

$$\overline{N}(x,y) = x^3 + x^2 y \qquad \text{dan} \qquad \overline{M}(x,y) = 3x^2 y + xy^2,$$

sehingga didapatkan kondisi $\partial_x \overline{N} = \partial_y \overline{M}$.
Untuk mendapatkan fungsi potensial ψ, seperti cara sebelumnya (sebagai latihan), diperoleh

$$\psi(x,y) = x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 + g(x),$$

dengan $g(x)$ fungsi sebarang. Dengan cara sebelumnya juga (sebagai latihan), diperoleh $g'(x) = 0$. Jadi $g(x) = c_1$. Dengan demikian diperoleh fungsi potensialnya adalah

$$\psi(x,y) = x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 + c_1,$$

dengan c_1 konstanta sebarang. Penyelesaian akhir y yang memenuhi persamaan diferensial adalah

$$x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 = c,$$

dengan c konstanta sebarang. □

Sesungguhnya, faktor integrasi tidak harus merupakan fungsi dari x saja, bisa fungsi dari y saja, atau x dan y. Untuk hal itu perhatikan berikut ini.
Bentuk umum persamaan diferensial orde satu (bentuk derivatif):

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0. \tag{2.8}$$

Jika

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \text{persamaan eksak}$$

dan jika

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \text{persamaan noneksak}$$

Jika persamaan (2.8) noneksak, akan ditentukan $\mu(x,y)$ sehingga

$$\mu(x,y)M(x,y)\ dx + \mu(x,y)N(x,y)\ dy = 0 \tag{2.9}$$

merupakan persamaan diferensial eksak. Untuk menentukan faktor integrasi μ adalah

a. Jika
$$\frac{1}{N}\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y}\Big) = f(x)$$
maka faktor integrasinya
$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}.$$

b. Jika
$$\frac{1}{N}\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y}\Big) = g(y)$$
maka faktor integrasinya
$$\mu(y) = e^{\int -g(y)dy}.$$

c. Jika
$$\frac{1}{N}\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y}\Big) = h(x, y)$$
maka faktor integrasinya $\mu(x, y)$ yang memenuhi
$$\mu(x, y) = \frac{\left(N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}$$

Contoh 2.16. *Diberikan persamaan diferensial*
$$y' - \frac{y}{2} = e^{-x}.$$

a. Tentukan faktor integrasi persamaan diferensial
b. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial
c. Sketsakan grafik penyelesaian dengan $y(0) = 7/3$

Penyelesaian:

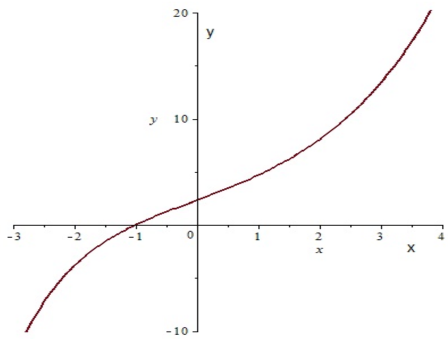
a. Faktor integrasi
Persamaan diferensial dapat diubah menjadi
$$(e^{-x} + y/2)dx - dy = 0.$$

Diperoleh
$$\begin{aligned} M &= (e^{-x} + y/2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{2} \\ N &= -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Karena
$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1/2 - 0}{-1} = -\frac{1}{2},$$
dipilih faktor integrasinya
$$\mu_1(x) = e^{\int -1/2dx} = e^{-x/2} \qquad \text{atau} \qquad \mu_2(y) = e^{\int 1/2dy} = e^{y/2}$$

b. Kalikan kedua ruas persamaan diferensial dengan faktor integrasi, misal diambil μ_1, diperoleh
$$e^{-x/2}(e^{-x} + y/2)dx - e^{-x/2}dy = 0,$$
yang mana merupakan persamaan diferensial eksak.
Fungsi potensial ψ, diperoleh
$$\begin{aligned}\psi(x,y) &= \int \mu_1 N dy + g(x)\\ &= \int -e^{-x/2}dy + g(x)\\ &= -ye^{-x/2} + g(x)\end{aligned}$$
Turunan ψ terhadap x, diperoleh
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{y}{2}e^{-x/2} + g'(x) = e^{-3x/2} + \frac{y}{2}e^{-x/2}$$
sehingga
$$g'(x) = e^{-3x/2} \qquad \Rightarrow \qquad g(x) = -\frac{2}{3}e^{-3x/2} + C_1$$
Jadi
$$\psi(x,y) = -ye^{-x/2} - \frac{2}{3}e^{-3x/2} + C_1$$
dengan penyelesaian persamaan diferensial
$$ye^{-x/2} = -\frac{2}{3}e^{-3x/2} + C$$
atau
$$y = -\frac{2}{3}e^{-x} + Ce^{x/2}.$$

c. Grafik penyelesaian untuk nilai $y(0) = 7/3$ diberikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2: Grafik penyelesaian $y' - \frac{y}{2} = e^{-x}$, dengan $y(0) = 7/3$

2.5 Persamaan Diferensial Bernoulli

Pada tahun 1696, Jacob Bernoulli menyelesaiakan persamaan diferensial nonlinear orde satu yang selanjutnya persamaan tersebut disebut dengan **persamaan diferensial Bernoulli**.

Definisi 2.17. *Persamaan diferensial Bernoulli adalah persamaan yang berbentuk*

$$y' = p(x)y + q(x)y^n,$$

dengan p dan q fungsi-fungsi yang diberikan dan n sebarang bilangan real.

Jika diperhatikan, untuk kasus $n \neq 0$ dan $n \neq 1$, persamaan diferensial Bernoulli berbentuk persamaan diferensial nonlinear. Untuk kasus $n = 2$, diperoleh persamaan logistik. Persamaan diferensial Bernoulli ini bukanlah persamaan Bernoulli yang biasa dijumpai dalam mekanika fluida. Persamaan diferensial Bernoulli merupakan persamaan diferensial nonlinear yang dapat ditransformasikan ke dalam persamaan diferensial linear.

Teorema 2.18. *Fungsi y merupakan penyelesaian persamaan diferensial Bernoulli*

$$y' = p(x)y + q(x)y^n, \qquad n \neq 1$$

jika dan hanya jika fungsi $v = 1/y^{(n-1)}$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial linear

$$v' = -(n-1)p(x)v - (n-1)q(x).$$

Bukti. Bagi kedua ruas persamaan diferensial Bernoulli dengan y^n, diperoleh

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{p(x)}{y^{n-1}} + q(x). \tag{2.10}$$

Misalkan $v = y^{-(n-1)}$, diperoleh

$$v' = [y^{-(n-1)}]' = -(n-1)y^{-n}y' \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{v'(x)}{(n-1)} = \frac{y'(x)}{y^n(x)}$$

Substitusikan hasil ini ke persamaan (2.10), diperoleh

$$-\frac{v'}{(n-1)} = p(x)v + q(x) \quad \Rightarrow \quad v' = -(n-1)p(x)v - (n-1)q(x).$$

Bukti selesai. □

Contoh 2.19. *Tentukan penyelesaian tidak nol persamaan diferensial*

$$y' = y + 2y^5.$$

Penyelesaian:
Ini merupakan persamaan diferensial Bernoulli dengan $n = 5$. Dengan membagi persamaan diferensial dengan y^5, diperoleh

$$\frac{y'}{y^5} = \frac{1}{y^4} + 2. \tag{2.11}$$

Misalkan $v = 1/y^4$, diperoleh $v' = -4(y'/y^5)$, dan substitusikan ke persamaan (2.11) diperoleh

$$-\frac{v'}{4} = v + 2 \quad \Rightarrow \quad v' = -4v - 8 \quad \Rightarrow \quad v' + 4v = -8.$$

Persamaan terakhir di atas merupakan persamaan diferensial linear atas fungsi v. Dengan menggunakan metode faktor integrasi dengan mengambil $\mu(x) = e^{4x}$, maka

$$(e^{4x}v)' = -8e^{4x} \quad \Rightarrow \quad e^{4x}v = -\frac{8}{4}e^{4x} + c.$$

Dari persamaan tersebut, diperoleh $v = ce^{-4x} - 2$. Karena $v = 1/y^4$, diperoleh $1/y^4 = ce^{-4x} - 2$. Dengan demikian diperoleh

$$y(x) = \pm\frac{1}{(ce^{-4x} - 2)^{1/4}},$$

dengan c konstanta sebarang. □

2.6 Persamaan Diferensial Euler

Definisi 2.20. Persamaan diferensial Euler *adalah persamaan diferensial homogen yang berbentuk*

$$y'(x) = F\Big(\frac{y(x)}{x}\Big)$$

dengan F fungsi sebarang.

Seringkali persamaan diferensial homogen Euler berasal dari persamaan diferensial yang berbentuk $Ny' + M = 0$ di mana N dan M keduanya fungsi homogen dengan derajat yang sama.

Teorema 2.21. *Jika N dan M keduanya fungsi homogen terhadap peubah x dan y dan keduanya berderajat sama, maka persamaan diferensial*

$$N(x,y)y'(x) + M(x,y) = 0$$

merupakan persamaan diferensial Euler.

Bukti. Nyatakan persamaan dalam bentuk

$$y'(x) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Misalkan $f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, maka

$$f(cx,cy) = -\frac{M(cx,cy)}{N(cx,cy)} = -\frac{c^n M(x,y)}{c^n N(x,y)} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y).$$

Selanjutnya akan ditentukan fungsi F sedemikian sehingga persamaan diferensial dapat dinyatakan sebagai $y' = F(y/x)$.
Karena M dan N berderajat n, kalikan persamaan diferensial dengan $(1/x)^n/(1/x)^n$, sehingga diperoleh

$$y'(x) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\frac{(1/x)^n}{(1/x)^n} = -\frac{M((x/x),(y/x))}{N((x/x),(y/x))} = -\frac{M(1,(y/x))}{N(1,(y/x))}$$

$$\Rightarrow y' = F\Big(\frac{y}{x}\Big),$$

dimana

$$F\Big(\frac{y}{x}\Big) = -\frac{M(1,(y/x))}{N(1,(y/x))}.$$

Bukti telah selesai. □

Contoh 2.22. *Tunjukkan bahwa persamaan*

$$(x-y)y' - 2y + 3x + \frac{y^2}{x} = 0$$

merupakan persamaan diferensial Euler.

Penyelesaian:
Nyatakan persamaan dalam bentuk

$$y' = \frac{\left(2y - 3x - \frac{y^2}{x}\right)}{(x-y)}.$$

Untuk itu didapatkan fungsi f yang diberikan sebagai

$$f(x,y) = \frac{\left(2y - 3x - \frac{y^2}{x}\right)}{(x-y)}.$$

Karena pembilang dan penyebut berderajat sama, yakni berderajat satu, maka

$$f(cx,cy) = \frac{\left(2cy - 3cx - \frac{c^2y^2}{cx}\right)}{(cx-cy)} = \frac{c\left(2y - 3x - \frac{y^2}{x}\right)}{c(x-y)} = f(x,y).$$

Selanjutnya akan dituliskan persamaan dalam bentuk $y' = F(y/x)$. Karena pembilang dan penyebut berderajat satu, kalikan persamaan dengan $(1/x)^1/(1/x)^1$, sehingga diperoleh

$$y' = \frac{\left(2y - 3x - \frac{y^2}{x}\right)}{(x-y)} \frac{(1/x)}{(1/x)} = \frac{\left(2(y/x) - 3 - (\frac{y}{x})^2\right)}{(1-(y/x))} = F(y/x).$$

Jadi, persamaan diferensial dalam masalah di atas merupakan persamaan diferensial Euler. □

Berikutnya dibahas penyelesaian persamaan diferensial Euler melalui teorema berikut.

Teorema 2.23. *Persamaan diferensial Euler*

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

untuk fungsi y menentukan persamaan peubah terpisah $v = y/x$ yang diberikan oleh

$$\frac{v'}{(F(v)-v)} = \frac{1}{x}.$$

Bukti. Misalkan $v = y/x$, substitusikan ke persamaan diferensial diperoleh

$$y' = F(v).$$

Dengan menggantikan y' dalam suku-suku v, diperoleh

$$y(x) = xv(x) \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = v(x) + xv'(x).$$

Oleh karena itu

$$v + xv' = F(v) \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{F(v) - v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{v'}{(F(v) - v)} = \frac{1}{x}.$$

Persamaan terakhir paling kanan menyatakan persamaan diferensial peubah terpisah, ini membuktikan teorema. □

Contoh 2.24. *Tentukan semua penyelesaian y yang memenuhi persamaan*

$$y' = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty}.$$

Penyelesaian:
Karena

$$f(ct, cy) = \frac{c^2t^2 + 3c^2y^2}{2c^2ty} = \frac{c^2(t^2 + 3y^2)}{c^2(2ty)} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty} = f(t, y),$$

ini menunjukkan bahwa persamaan merupakan persamaan diferensial Euler. Karena pembilang dan penyebut berderajat dua, kalikan ruas kanan dengan $(1/t^2)/(1/t^2)$, sehingga

$$y' = \frac{(t^2 + 3y^2)(1/t^2)}{(2ty)(1/t^2)} \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{1 + 3(y/t)^2}{2(y/t)}.$$

Nyatakan $y/t = v$, sehingga diperoleh

$$y' = \frac{1 + 3v^2}{2v}.$$

Karena $y = tv$, maka $y' = v + tv'$, yang berakibat

$$v + tv' = \frac{1 + 3v^2}{2v} \qquad \Rightarrow \qquad tv' = \frac{1 + 3v^2}{2v} - v = \frac{1 + v^2}{2v}.$$

Oleh karena itu diperoleh persamaan diferensial peubah terpisah

$$\left(\frac{2v}{1 + v^2}\right)v' = \frac{1}{t}.$$

Integralkan hasil persamaan di atas

$$\begin{aligned}\int \frac{2v}{1+v^2}\, v' dt = \int \frac{1}{t}\, dt + c_1 \quad &\Rightarrow \quad \ln(1+v^2) = \ln t + \ln c_2 \\ &\Rightarrow \quad (1+v^2) = c_2 t \\ &\Rightarrow \quad 1 + (y/t)^2 = c_2 t.\end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh penyelesaian

$$y(t) = \pm t\sqrt{ct-1}$$

dengan c konstanta sebarang. □

2.7 Masalah Nilai Awal

Di dalam fisika, terkadang kita tidak tertarik pada semua penyelesaian persamaan diferensial, tetapi hanya penyelesaian yang memenuhi syarat tambahan tertentu. Misalnya, dalam kasus hukum gerak kedua Newton untuk partikel berupa titik, kita tertarik hanya pada penyelesaian gerak partikel yang pada awal waktu diketahui posisinya. Kondisi seperti itu disebut **syarat awal** atau **kondisi awal**, dan ini merupakan himpunan bagian penyelesaian persamaan diferensial. Masalah nilai awal berarti menemukan penyelesaian persamaan diferensial yang memenuhi syarat awal.

Definisi 2.25. Masalah nilai awal *adalah mencari penyelesaian untuk y dari persamaan diferensial*

$$y' = ay + b \tag{2.12}$$

yang memenuhi syarat awal

$$y(t_0) = y_0 \tag{2.13}$$

dengan $a, b, t_0,$ dan y_0 konstanta-konstanta.

Persamaan (2.13) merupakan syarat awal masalah. Meskipun persamaan diferensial (2.12) memiliki tak berhingga banyak penyelesaian, namun masalah nilai awal mempunyai penyelesaian tunggal.

Teorema 2.26. *Diberikan konstanta-konstanta* a, b, t_0, y_0, *dengan* $a \neq 0$, *masalah nilai awal*

$$y' = ay + b; \quad y(t_0) = y_0 \tag{2.14}$$

mempunyai penyelesaian tunggal

$$y(t) = \Big(y_0 + \frac{b}{a}\Big)e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}.$$

Bukti. Penyelesaian umum dari persamaan diferensial di (2.14) adalah seperti yang sudah diberikan dalam persamaan sebelumnya, yakni

$$y(t) = ce^{at} - \frac{b}{a}$$

dengan c konstanta yang akan ditentukan. Kondisi awal menentukan nilai konstanta c, sebagai berikut

$$y_0 = y(t_0) = ce^{at} - \frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad c = \Big(y_0 + \frac{b}{a}\Big)e^{-at_0}$$

Substitusikan hasil ini untuk konstanta c ke dalam persamaan diferensial, diperoleh

$$y(t) = \Big(y_0 + \frac{b}{a}\Big)e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}.$$

Bukti selesai. □

Contoh 2.27. *Tentukan penyelesaian tunggal dari masalah nilai awal*

$$y' = 2y + 3, \qquad y(0) = 1. \tag{2.15}$$

Penyelesaian:
Penyelesaian umum dari persamaan diferensial yang diberikan adalah

$$y(t) = ce^{2t} - \frac{3}{2}$$

dengan c adalah konstanta sembarang. Syarat awal dalam persamaan (2.15) menentukan c,

$$1 = y(0) = c - \frac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \frac{5}{2}.$$

Dengan demikian, penyelesaian tunggal dari masalah nilai awal di atas adalah

$$y(t) = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{3}{2}.$$

□

Contoh 2.28. *Temukan penyelesaian y untuk masalah nilai awal*

$$y' = -3y + 1, \qquad y(0) = 1.$$

Penyelesaian:
Tuliskan persamaan diferensial sebagai $y' + 3y = 1$, dan kalikan persamaan dengan faktor integrasi $\mu = e^{3t}$, yang akan mengubah ruas kiri di atas menjadi turunan total,

$$e^{3t}y' + 3e^{3t}y = e^{3t} \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{3t}y' + (e^{3t})'y = e^{3t}$$

Karenanya, diperoleh

$$(e^{3t}y)' = e^{3t}.$$

Eksponensial e^{3t} adalah faktor integrasi. Integralkan kedua ruas persamaan di atas, diperoleh

$$e^{3t}y = \frac{1}{3}e^{3t} + c.$$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial di atas diberikan oleh

$$y(t) = ce^{-3t} + \frac{1}{3}$$

dengan c sebarang bilangan real.
Dengan memasukkan syarat awal $y(0) = 2$ menjadikan hanya ada satu penyelesaian, yakni

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}.$$

□

2.8 Aplikasi Persamaan Diferensial Orde Satu

Beberapa contoh aplikasi persamaan diferensial orde satu yang sering muncul dalam kehidupan sehari-hari, diberikan dalam contoh-contoh berikut.

Contoh 2.29. Peluruhan radioaktif *Radioaktif isotop Thorium-234 meluruh sebanding dengan jumlah isotopnya. Jika 100 mg dari material meluruh menjadi 82,04 mg dalam waktu satu minggu,*

a. *nyatakan jumlah material Thorium-234 pada saat tertentu;*

b. *tentukan waktu paruh isotop tersebut (Waktu paruh adalah waktu yang digunakan oleh radioaktif untuk meluruh menjadi separuhnya).*

Penyelesaian :
Untuk menyelesaian permasalahan ini, pertama misalkan $Q(t)$ menyatakan jumlah Thorium-234 (dalam mg) pada saat waktu t, dan r menyatakan waktu paruh radioaktif Thorium-234.
Selanjutnya, berdasarkan permasalahan pada contoh, diperoleh masalah nilai awal

$$\frac{dQ}{dt} = -rQ, \qquad Q(0) = 100.$$

Untuk menyelesaikan masalah nilai awal ini

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -rQ \\ \Rightarrow \qquad & \int \frac{dQ}{Q} = \int -r\ dt \\ \Rightarrow \qquad & \ln Q = -rt + c_1 \\ \Rightarrow \qquad & Q(t) = e^{-rt+c_1} = Ce^{-rt} \end{aligned}$$

Dengan kondisi $Q(0) = 100$, berakibat $C = 100$, sehingga diperoleh

$$Q(t) = 100e^{-rt}$$

Untuk menentukan waktu paruh, karena dalam waktu satu minggu (7 hari) isotop Thorium-234 meluruh menjadi 82,04 mg yang berarti $Q(7) = 82,04$, ini memberikan

$$82,04 = 100e^{-7r} \qquad \Rightarrow \qquad r = 0,02828.$$

Misalkan λ menyatakan waktu paruh radioaktif Thorium-234. Karena waktu paruh adalah waktu yang digunakan meluruh menjadi separuhnya, hal ini diperoleh hubungan

$$50 = 100e^{-r\lambda} \qquad \text{atau} \qquad r\lambda = \ln 2.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\lambda = \frac{\ln 2}{r} = \frac{\ln 2}{0,02828} \approx 24,5.$$

Jadi waktu paruh radio aktif Thorium-234 adalah $24,5$ hari. □

Contoh 2.30. Pertumbuhan populasi *Pertumbuhan populasi A memenuhi persamaan diferensial*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{100}y\Big(1 - \frac{1}{10^6}y\Big)$$

dengan $y(t)$ *menyatakan jumlah populasi A pada saat* t *(dalam tahun). Jika pada tahun 2020 diketahui jumlah populasi A sebanyak 100.000, tentukan*

a. *Jumlah populasi A pada tahun 2040*

b. *Bilamana jumlah populasi A menjadi 200.000*

Penyelesaian:

a. Untuk menentukan $y(t)$ adalah dengan cara merubah persamaan diferensial menjadi persamaan peubah terpisah

$$\frac{1}{\frac{1}{100}y\Big(1 - \frac{1}{10^6}y\Big)}dy = dt$$

Integralkan kedua ruas

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\frac{1}{100}y\Big(1 - \frac{1}{10^6}y\Big)}dy &= \int dt \\
100\int \Big(\frac{1}{y} + \frac{1}{10^6 - y}\Big)dy &= \int dt \\
100\big(\ln y - \ln{(1 - 10^{-6}y)}\big) &= t + c_1 \\
\ln\frac{y}{1 - 10^{-6}y} &= \frac{t}{100} + c_2 \\
\frac{y}{1 - 10^{-6}y} &= ce^{t/100} \\
y &= \frac{ce^{t/100}}{1 + 10^{-6}ce^{t/100}}
\end{aligned}$$

Jika tahun 2020 jumlah populasi 100.000 maka bisa dikatakan $y(2020) = 100.000$ sehingga dengan mensubstitusikan ini ke hasil persamaan terakhir di atas, diperoleh

$$c = \frac{10^6}{9e^{152}}$$

sehingga

$$y(t) = \frac{10^6}{1 + 9e^152 - t/100} \tag{2.16}$$

Jumlah populasi pada tahun 2040 diperkirakan mencapai

$$\begin{aligned} y(2040) &= \frac{10^6}{1 + 9e^152 - 2040/100} \\ &= 119.495 \end{aligned}$$

b. Jumlah populasi menjadi 200.000, ini berarti $y(t) = 200.000$. Dengan mensubstitusikan ke persamaan (2.16) diperoleh $t = 2081$. Jadi jumlah populasi A menjadi 200.000 ketika tahun 2081. □

2.9 Rangkuman

1. Bentuk umum persamaan diferensial peubah terpisah (separabel) adalah

   $$M(x)\ dx + N(y)\ dy = 0,$$

   dengan penyelesaian

   $$\int M(x)\ dx + \int N(y)\ dy = C,$$

   dengan C konstanta sebarang.

2. Persamaan diferensial eksak adalah persamaan diferensial yang berbentuk

   $$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

   dengan M dan N adalah fungsi-fungsi yang memenuhi

   $$\partial_x N(x, y) = \partial_y M(x, y).$$

3. Persamaan diferensial noneksak adalah persamaan diferensial yang berbentuk

   $$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

   dengan N dan M adalah fungsi-fungsi yang memenuhi

   $$\partial_x N(x, y) \neq \partial_y M(x, y).$$

4. Persamaan diferensial noneksak

$$M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0$$

mempunyai faktor integrasi $\mu(x, y)$ sehingga persamaan

$$\mu(x, y)M(x, y)\ dx + \mu(x, y)N(x, y)\ dy = 0$$

merupakan persamaan diferensial eksak.

2.10 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-teman Anda beberapa permasalahan berikut

1. Diberikan persamaan diferensial

$$y'' - x^2 y' = 0.$$

Dengan memisalkan $y' = p$, reduksikan persamaan diferensial di atas menjadi orde satu, lalu selesaikan dengan metode pemisah peubah. Kemudian dengan mensubstitusi kembali, tentukan penyelesaian persamaan diferensialnya.

2. Gunakan seperti nomor 1, untuk menyelesaikan persamaan diferensial

$$y'' \cdot y' = x + x^2.$$

2.11 Rujukan/Daftar Pustaka

1 Boyce, W.E., R.C. DiPrima, dan D.B. Meade, 2017, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th edition, John Wiley & Sons

2 Howell, K.B, 2019, *Ordinary Differential Equations: An Introduction to the Fundamentals*, CRC Press

3 Simmons, G.F. dan S.G. Krantz, 2007, *Differential Equations Theory, Technique, and Practice.* International Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc.

2.12 Soal-soal Latihan

1. Tentukan persamaan diferensial berbentuk $y' = f(y)$ yang terpenuhi oleh fungsi
$$y = 3e^{5x} - \frac{3}{7}$$

2. Tentukan konstanta a dan b sehingga
$$y = (x+2)e^{4x}$$
merupakan penyelesaian masalah nilai awal
$$y' = ay + e^{4x}, \qquad y(0) = b.$$

3. Diberikan persamaan diferensial
$$y' = -4y + 2$$
   (a). Tentukan faktor integrasi μ.
   (b). Tuliskan persamaan diferensial di atas sebagai derivatif total fungsi ψ, yakni
$$y' = -4y + 2, \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi' = 0.$$
   (c). Integralkan persamaan diferensial tersebut untuk ψ.
   (d). Hitung y dengan menggunakan hasil dari butir (c).

4. Tentukan semua penyelesaian (penyelesaian umum) persamaan diferensial
$$y' = 3y + 2$$

5. Tentukan penyelesaian nilai awal
$$y' = -4y + 2, \qquad y(0) = 5.$$

6. Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial
$$y' = 3xy.$$

7. Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial
$$y' = -y + e^{-x}.$$

8. Tentukan penyelesaian y dari masalah nilai awal

$$y' = y + 2xe^{2x}, \qquad y(0) = 0.$$

9. Tentukan semua fungsi y yang memenuhi

$$xy' + ny = x^2,$$

dengan n adalah bilangan bulat positif.

10. Tentukan semua fungsi y yang memenuhi

$$y' = y - 2 \sin x.$$

11. Tentukan penyelesaian penyelesaian masalah nilai awal

$$xy' = 2y + 4x^3 \cos 4x, \qquad y(\pi/8) = 0.$$

12. Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$y' = -xy + 6x\sqrt{y}.$$

13. Tentukan penyelesaian masalah nilai awal

$$y' = y + \frac{3}{y^2}, \qquad y(0) = 1.$$

14. Tentukan semua penyelesaian y dari persamaan diferensial

$$y' = \frac{x^2}{y}$$

dan nyatakan dalam bentuk eksplisit.

15. Tentukan penyelesaian masalah nilai awal

$$y' = x^2y^2, \qquad y(0) = 1.$$

16. Buktikan bahwa jika $y' = f(x, y)$ persamaan Euler dan $y_1(x)$ adalah penyelesaiannya, maka $y(x) = (1/k)y_1(kx)$ untuk setiap $k \in \mathbb{R}$ dan $k \neq 0$, juga merupakan penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

17. Tentukan penyelesaian eksplisit masalah nilai awal

$$y' = \frac{4x - 6x^2}{y}, \qquad y(0) = -3.$$

18. Pandang persamaan diferensial

$$(1 + x^2)y = -2xy.$$

   (a) Periksa, apakah persamaan diferensial tersebut eksak.
   (b) Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial tersebut.

19. Pandang persamaan diferensial

$$y' = \frac{-2 - ye^{xy}}{-2y + xe^{xy}}$$

   (a) Periksa, apakah persamaan diferensial tersebut eksak.
   (b) Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial tersebut

20. Pandang persamaan diferensial

$$\left(2x^2y + \frac{y}{x^2}\right)y' + 4xy^2 = 0,$$

   dengan syarat awal $y(0) = -2$.

   (a) Tentukan faktor integrasi persamaan diferensial tersebut.
   (b) Tentukan penyelesaian implisit masalah nilai awal tersebut.
   (c) Tentukan penyelesaian eksplisit masalah nilai awal tersebut.

21. Tentukan penyelesaian masalah nilai awal

$$2x^2y + 2x^2y^2 + 1 + (x^3 + 2x^3y + 2xy)y' = 0, \qquad y(1) = 2.$$

22. Selesaikan persamaan Bernoulli

$$xy' + y = x^4y^3.$$

23. Tunjukkan bahwa persamaan diferensial

$$y' + p(x)y = q(x)y \ln y$$

dapat diselesaikan dengan cara mengubah peubah $z = \ln y$. Aplikasikan cara ini untuk menyelesaikan persamaan

$$xy' = 2x^2y + y \ln y.$$

24. Suatu tangki awal mula berisikan 300 liter larutan yang mengandung 150 gram garam. Kemudian, larutan lain yang mengandung garam dengan konsentrasi 1 gram/liter dimasukkan ke dalam tangki dengan laju 5 liter/menit dan bercampur sempurna, kemudian campuran itu dikeluarkan dengan laju 5 liter/menit. Jika Q menyatakan jumlah garam pada saat t,
    (a) rumuskan masalah nilai awal tersebut
    (b) tentukan jumlah garam Q setiap saat.

25. Udin menuangkan secangkir minuman kopi dengan suhu 95^0C dari termos pada jam 11.00 dan meletakkan di meja dengan maksud meminumnya setelah berkurang panasnya. Setelah 10 menit kemudian, suhu kopi menjadi 75^0C. Anggap suhu ruang di sekitar meja tersebut konstan 27^0C.
    (a) Tentukan suhu minuman kopi pada jam 11.20,
    (b) Jika Udin suka meminum kopi pada suhu $55^0C - 60^0C$, tentukan antara jam berapa Udin harus minum kopi itu.

Bab 3

Persamaan Diferensial Orde Dua dan Aplikasinya

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami bentuk-bentuk persamaan diferensial orde dua;
2. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
3. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menyelesaiakan persamaan diferensial linear orde dua homogen dengan koefisien konstan;
2. menyelesaiakan persamaan diferensial linear orde dua nonhomogen dengan koefisien konstan;
3. mengaplikasikan persamaan diferensial orde dua dalam kehidupan sehari-hari.

3.1 Persamaan Diferensial Linear Orde Dua

Kita mulai dengan definisi persamaan diferensial linear orde dua.

Definisi 3.1. **Persamaan diferensial linear orde dua** *dari fungsi y adalah persamaan diferensial yang berbentuk*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{3.1}$$

dengan a_1, a_0, dan b fungsi-fungsi yang diberikan pada selang $I \subset \mathbb{R}$. Persamaan diferensial (3.1) dikatakan

(a) **homogen** *jika $b(x) = 0$ untuk setiap $x \in I$, dan dikatakan* **nonhomogen** *jika $b(x) \neq 0$;*

(b) **dengan koefisien konstan** *jika a_1 dan a_0 keduanya konstan;*

(c) **dengan koefisien peubah** *jika a_1 atau a_0 tidak konstan.*

Sebagai contoh, persamaan diferensial $y'' + 4y - 3 = 0$ merupakan persamaan diferensial linear homogen dengan koefisien konstan. Untuk persamaan diferensial $y'' + 2y - 2 = 3\cos 2x$ merupakan contoh persamaan diferensial linear nonhomogen dengan koefisien konstan. Sedangkan, persamaan diferensial $y'' - xy' - y = e^{5x}$ merupakan contoh persamaan diferensial linear nonhomogen dengan koefisien peubah.

Contoh 3.2. *Tentukan persamaan diferensial yang memiliki penyelesaian umum*

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x},$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang.

Penyelesaian:
Dari definisi y yang diberikan, diperoleh

$$c_1 = ye^{-4x} - c_2 e^{-8x}.$$

Turunan dari fungsi y adalah

$$y' = 4c_1 e^{4x} - 4c_2 e^{-4x}.$$

Dengan menggantikan c_1 dari persamaan pertama di atas ke dalam ekspresi y',

$$y' = 4(ye^{-4x} - c_2 e^{-8x})e^{4x} - 4c_2 e^{-4x} \quad \Rightarrow \quad y' = 4y + (-4-4)c_2 e^{-4x},$$

sehingga didapatkan ekspresi untuk c_2 dalam suku-suku y dan y',

$$c_1 = ye^{-4x} - \frac{1}{8}(4y - y')e^{4x}e^{-8x} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{8}(4y + y')e^{-4x}.$$

Dengan menghitung turunan persamaan,

$$0 = c_2' = \frac{1}{2}(4y - y')e^{4x} + \frac{1}{8}(4y' - y'')e^{4x}$$

akibatnya diperoleh

$$4(4y - y') + (4y' - y'') = 0$$

yang memberikan hasil persamaan diferensial linear orde dua

$$y'' - 16y = 0.$$

□

Teorema 3.3. *Jika a_0, a_1, dan b fungsi-fungsi kontinu yang terdefinisi pada selang tertutup $I \subset \mathbb{R}$, konstanta $x_0 \in I$, dan $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ konstanta-konstanta sebarang, maka terdapat dengan tunggal penyelesaian y yang terdefinisi pada I dari masalah nilai awal*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_1) = y_1.$$

3.2 Persamaan Linear Homogen dengan Koefisien Konstan

Bentuk umum persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan adalah

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad \text{atau} \quad ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.2}$$

dengan a, b, dan c konstanta-konstanta dan $a \neq 0$. Sebagai ilustrasi, jika $b = c = 0$, bentuk persamaan linear homogen orde dua adalah $y'' = 0$ yang mempunyai penyelesaian umum $y = c_1x + c_2$ dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang, yakni dengan cara mengintegralkan dua kali kedua ruas persamaan. Untuk kasus $a = 1, b = 0$, dan $c = -1$, diperoleh persamaan $y'' - y = 0$ atau $y'' = y$. Untuk mendapatkan penyelesaian persamaan ini, sama halnya dengan mencari bentuk fungsi yang turunannya dua kali sama dengan dirinya sendiri. Jawabannya adalah fungsi eksponensial, yakni $y = c_1 e^x$ dan $y = c_2 e^{-x}$ dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang, keduanya memenuhi penyelesaian persamaan tersebut.

Dari dua contoh kasus persamaan linear orde dua tersebut, muncul dua konstanta sebarang yang mana berbeda dengan penyelesaian umum persamaan orde satu yang menghasilkan satu konstanta sebarang. Jadi penyelesaian umum dari persamaan orde dua akan menghasilkan dua konstanta sebarang. Lebih jelasnya, terdapat cara mudah untuk menemukan penyelesaian umum persamaan differensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstan.
Dengan mengasumsikan penyelesaiannya berbentuk $y = e^{kx}$, maka diperoleh persamaan kuadrat dalam k, disebut **persamaan karakteristik**, yakni

$$ak^2 + bk + c = 0$$

dengan penyelesaian

$$k_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Untuk menentukan penyelesaian umum persamaan diferensial, akan dikelompokkan menjadi tiga kasus berdasarkan nilai karakteristiknya.

a. Kasus 1. Jika $k_1 \neq k_2$ keduanya bilangan real, maka penyelesaian umum persamaan (3.2) adalah

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang.

b. Kasus 2. Jika $k_1 = k_2 = m$ keduanya bilangan real, maka

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang.

c. Kasus 3. Jika k_1 dan k_2 keduanya bilangan kompleks sekawan misalkan $k_{12} = r \pm is$, maka

$$y = c_1 e^{rx} \cos(sx) + c_2 e^{rx} \sin(sx).$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang.

Contoh 3.4. *Tentukan penyelesaian umum persamaan*

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristik persamaan diferensial di atas adalah

$$k^2 + k - 6 = 0$$

dengan penyelesaian

$$k_1 = 2 \quad \text{dan} \quad k_2 = -3.$$

Jadi penyelesaian umum persamaan diferensial adalah

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang. □

Contoh 3.5. *Tentukan penyelesaian masalah nilai awal*

$$y'' + 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristik persamaan diferensialnya adalah

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

dengan penyelesaian

$$k_1 = k_2 = -1.$$

Karena akar-akar karakteristik berupa bilangan real kembar, maka penyelesaian umum persamaan diferensialnya

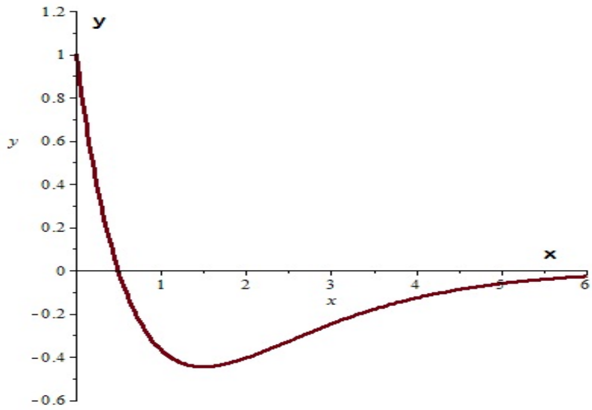
$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \tag{3.3}$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta yang akan dicari.
Dengan memasukkan nilai $y(0) = 1$ ke persamaan (3.3), diperoleh $c_1 = 1$, sehingga

$$y(x) = e^{-x} + c_2 x e^{-x} \tag{3.4}$$

Selanjutnya, turunkan persamaan (3.4) terhadap x diperoleh

$$y'(x) = -e^{-x} + c_2[e^{-x} - xe^{-x}] \tag{3.5}$$



Gambar 3.1: Grafik penyelesaian masalah nilai awal $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -3$

Dengan memasukkan nilai $y'(0) = -3$ ke persamaan (3.5), diperoleh $c_2 = -2$. Lalu mensubstitusikan c_2 ke persamaan (3.4) diperoleh penyelesaian akhir

$$y(x) = e^{-x} - 2xe^{-x}$$

yang grafiknya diberikan dalam Gambar 3.1.

Contoh 3.6. *Tentukan penyelesaian umum persamaan*

$$y'' - y' + y = 0.$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristik persamaan diferensial

$$k^2 - k + 1 = 0$$

dengan penyelesaian

$$k_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \quad k_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

yang berupa kompleks sekawan.
Jadi penyelesaian umum persamaan diferensial

$$y(x) = c_1 e^{x/2} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c_2 e^{x/2} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang. □

3.3 Persamaan Linear Orde Dua Nonhomogen dengan Koefisien Konstan

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde dua nonhomogen dengan koefisien konstan adalah

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \quad \text{atau} \quad ay'' + by' + cy = g(x) \tag{3.6}$$

dengan a, b, dan c konstanta-konstanta, $a \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$.
Penyelesaian persamaan (3.6) adalah jumlahan dari penyelesaian homogen dan penyelesaian partikular. **Penyelesaian homogen**, selanjutnya dinotasikan dengan y_h, adalah penyelesaian persamaan (3.6) ketika $g(x) = 0$ seperti telah dibahas pada subbab 3.2. Sedangkan **penyelesaian partikular**, selanjutnya dinotasikan dengan y_p, dari (3.6) akan dijelaskan berikutnya. Jadi penyelesaian umum dari persamaan (3.6) adalah

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

dengan y_h penyelesaian homogen dan y_p penyelesaian partikular.

Untuk mendapatkan penyelesaian partikular persamaan (3.6) di sini akan menggunakan metode **koefisien tak tentu** yang dijelaskan sebagai berikut.

Pandang persamaan nonhomogen

$$y'' - p(x)y' + q(x)y = g(x),$$

dimana $p(x), q(x)$, dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada suatu selang I.
Untuk kasus ini, diberikan teorema berikut.

Teorema 3.7. *Jika Y_1 dan Y_2 adalah penyelesaian-penyelesaian dari persamaan nonhomogen, maka $Y_1 - Y_2$ adalah penyelesaian dari persamaan homogen. Dan jika y_1 dan y_2 adalah basis atau pembangun dari penyelesaian-penyelesaian untuk persamaan homogen, maka*

$$Y_1 - Y_2 = c_1y_1 + c_2y_2,$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta.

Teorema 3.8. *Penyelesaian umum persamaan diferensial linear orde dua dapat dinyatakan sebagai*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

dimana y_h adalah penyelesaian homogen dan y_p penyelesaian partikular.

Di sini akan dibahas cara mencari penyelesaian partikular untuk beberapa kasus $g(x)$ pada persamaan (3.6), diantaranya kasus $g(x)$ berupa fungsi eksponensial, kasus $g(x)$ berupa fungsi sinus atau cosinus, dan kasus $g(x)$ berupa fungsi polinomial. Diawali dengan contoh kasus $g(x)$ fungsi eksponensial.

Contoh 3.9. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$$

Penyelesaian:
Misalkan

$$y_p = Ae^{2x}, \tag{3.7}$$

dengan A adalah konstanta yang akan dicari. Turunan pertama dan kedua persamaan (3.7) masing-masing

$$y_p' = 2Ae^{2x} \qquad \text{dan} \qquad y_p'' = 4Ae^{2x}.$$

Substitusikan hasil-hasil ini ke persamaan diferensial, diperoleh

$$4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 3e^{2x}.$$

Karena $e^{2x} \neq 0$ untuk setiap x, bagi kedua ruas dengan e^{2x} yang berakibat diperoleh $A = -1/2$. Jadi penyelesaian partikular persamaan diferensial adalah

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}.$$

□

Contoh 3.10. *Tentukan penyelesaian partikular*

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}. \tag{3.8}$$

Penyelesaian:
Dalam kasus ini, jika kita mengikuti penyelesaian seperti pada Contoh (3.9) di sini dimisalkan $y_p(x) = Ae^{-x}$. Dengan menentukan y_p' dan y_p'' kemudian mensubstitusikan ke persamaan (3.8), diperoleh

$$(A + 3A - 4A)e^{-x} = e^{-x}. \tag{3.9}$$

Karena koefisien e^{-x} ruas kiri persamaan (3.9) sama dengan nol, ini tidak mungkin menyelesaikan persamaan untuk konstanta A. Oleh karena itu disimpulkan tidak ada penyelesaian persamaan (3.8) dalam bentuk Ae^{-x}. Untuk itu, dimisalkan penyelesaian partikularnya berbentuk

$$y_p(x) = Axe^{-x}.$$

Turunan pertama dan kedua persamaan ini berturut-turut

$$y_p' = (A - Ax)e^{-x} \qquad y_p'' = (-2A + Ax)e^{-x}.$$

Substitusikan hasil-hasil ini ke persamaan (3.8), diperoleh

$$\big[(A + 3A - 4A)x + (-2A - 3A)\big]e^{-x} = e^{-x},$$

yang menghasilkan $A = -1/5$. Dengan demikian diperoleh penyelesaian partikularnya

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}xe^{-x}.$$

□

Untuk mendapatkan penyelesaian persamaan nonhomogen (3.6) dengan $g(x)$ merupakan fungsi sinus atau cosinus, diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 3.11. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$$

Penyelesaian:
Misalkan

$$y_p = A\sin x + B\cos x, \tag{3.10}$$

dengan A dan B konstanta-konstanta yang akan dicari. Turunan pertama dan kedua persamaan (3.11) masing-masing

$$y_p' = A\cos x - B\sin x \qquad \text{dan} \qquad y_p'' = -A\sin x - B\cos x.$$

Substitusikan hasil-hasil ini ke persamaan diferensial, diperoleh

$$\begin{aligned}&-A\sin x - B\cos x - 3A\cos x + 3B\sin x - 4A\sin x\\&-4B\sin x - 4B\cos x = 2\sin x.\end{aligned}$$

Dengan mengumpulkan suku-suku sejenis, diperoleh persamaan

$$(-B - 3A - 4B)\cos x + (-A + 3B - 4A)\sin x = 2\sin x$$

Dengan menyesuaikan suku-suku ruas kiri dan ruas kanan, diperoleh dua persamaan

$$\begin{aligned}-3A - 5B &= 0,\\-5A + 3B &= 2.\end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan di atas, diperoleh

$$A = -\frac{5}{17} \qquad \text{dan} \qquad B = \frac{3}{17}.$$

Jadi penyelesaian partikular persamaan diferensial adalah

$$y_p(x) = -\frac{5}{17}\sin x + \frac{3}{17}\cos x.$$

□

Untuk mendapatkan penyelesaian persamaan nonhomogen (3.6) dengan $g(x)$ merupakan fungsi polinomial, misalkan $g(x)$ polinomial berderajat n yang dapat dinyatakan dengan

$$g(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

dengan $a_n \neq 0$, maka penyelesaian partikularnya dimisalkan

$$y_p(x) = A_1 + A_2x + \cdots + A_nx^n.$$

Untuk lebih jelasnya, diberikan contoh berikut.

Contoh 3.12. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$y'' - 3y' - 4y = 1 - 2x^2$$

Penyelesaian:
Misalkan

$$y_p = A + Bx + Cx^2 \tag{3.11}$$

dengan A, B dan C konstanta-konstanta yang akan dicari. Turunan pertama dan kedua persamaan (3.11) masing-masing

$$y_p' = B + 2Cx \qquad \text{dan} \qquad y_p'' = 2C.$$

Substitusikan hasil-hasil ini ke persamaan diferensial, diperoleh

$$2C - 3(B + 2Cx) - 4(A + Bx + Cx^2) = 1 - 2x^2$$

Dengan mengumpulkan suku-suku sejenis, diperoleh persamaan

$$(-4A - 3B + 2C) + (-4B - 6C)x + (-4C)x^2 = 1 - 2x^2.$$

Dengan menyesuaikan suku-suku ruas kiri dan ruas kanan, diperoleh tiga persamaan

$$\begin{aligned} -4A - 3B + 2C &= 1 \\ -4B - 6C &= 0, \\ -4C &= -2. \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan ketiga persamaan di atas secara simultan, diperoleh

$$A = \frac{9}{16}, \qquad B = -\frac{3}{4}, \qquad \text{dan} \qquad C = \frac{1}{2}.$$

Jadi penyelesaian partikular persamaan diferensial adalah

$$y_p(x) = \frac{9}{16} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x^2.$$

□

Untuk persamaan linear dengan koefisien konstan nonhomogen jika $g(x)$ merupakan kombinasi penjumlahan fungsi-fungsi eksponensial, fungsi sinus atau cosinus, dan fungsi polinomial, maka penyelesaian partikularnya adalah jumlahan dari masing-masing kasus tersebut. Misalkan diberikan contoh berikut.

Contoh 3.13. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$y'' - 3y' - 4y = 1 - 2x^2 + 2\sin x$$

Penyelesaian:
Dari dua contoh sebelumnya, penyelesaian partikular dari persamaan

$$y'' - 3y' - 4y = 1 - 2x^2$$

adalah

$$y_{p1} = \frac{9}{16} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x^2,$$

dan penyelesaian partikular persamaan

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$$

adalah

$$y_{p2}(x) = -\frac{5}{17}\sin x + \frac{3}{17}\cos x.$$

Oleh karena itu penyelesaian partikular dari $y'' - 3y' - 4y = 1 - 2x^2 + 2\sin x$ adalah

$$\begin{aligned} y_p &= y_{p1} + y_{p2} \\ &= \frac{9}{16} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{17}\sin x + \frac{3}{17}\cos x. \end{aligned}$$

□

Untuk persamaan linear dengan koefisien konstan nonhomogen jika $g(x)$ merupakan kombinasi perkalian fungsi-fungsi eksponensial, fungsi sinus atau cosinus, dan fungsi polinomial, maka penyelesaian partikularnya diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 3.14. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos 2x. \tag{3.12}$$

Penyelesaian:
Asumsikan bahwa penyelesaian partikular, y_p, merupakan perkalian dari e^x dan kombinasi linear $\cos 2x$ dan $\sin 2x$, yakni

$$y_p = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Turunan pertama dan kedua persamaan ini, masing-masing diperoleh

$$y_p' = (A + 2B)e^x \cos 2x + (-2A + B)e^x \sin 2x$$

dan

$$y_p'' = (-3A + 4B)e^x \cos 2x + (-4A - 3B)e^x \sin 2x.$$

Dengan mensubstitusikan hasil-hasil ini ke persamaan (3.12), diperoleh

$$(-10A - 2B)e^x \cos 2x + (2A - 10B)e^x \sin 2x = -8e^x \cos 2x,$$

sehingga diperoleh dua persamaan

$$\begin{aligned} 10A + 2B &= 8 \\ 2A - 10B &= 0, \end{aligned}$$

menghasilkan $A = 10/13$ dan $B = 2/13$. Oleh karena itu diperoleh penyelesaian partikular nya

$$y_p = e^x \Big(\frac{10}{13} \cos 2x + \frac{2}{13} \sin 2x\Big).$$

□

Contoh 3.15. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$y'' + 4y = x^2 e^{-3x} \sin x. \tag{3.13}$$

Penyelesaian:
Ruas kanan persamaan (3.13) berbentuk perkalian fungsi polinomial, fungsi eksponensial, dan fungsi sinus. Untuk kasus ini, misalkan penyelesaian partikularnya adalah

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{-3x} \cos x + (Dx^2 + Ex + F)e^{-3x} \sin x$$

Selanjutnya lakukan penyelesaian seperti pada contoh-contoh sebelumnya untuk mendapatkan konstanta-konstanta A, B, C, D, E, dan F. Dalam hal ini, diperoleh

$$A = \frac{1}{30},\ B = \frac{1}{25},\ C = \frac{46}{3375},\ D = \frac{1}{15},\ E = \frac{13}{225},\ F = \frac{19}{6750}$$

Oleh karena itu diperoleh penyelesaian partikularnya

$$\begin{aligned} y_p &= \Big(\frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{25}x + \frac{46}{3375}\Big)e^{-3x} \cos x \\ &\quad + \Big(\frac{1}{15}x^2 + \frac{13}{225}x + \frac{19}{6750}\Big)e^{-3x} \sin x. \end{aligned}$$

□

Contoh 3.16. *Selesaikan masalah nilai awal*

$$y'' + 4y = x + 2e^{-3x}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1. \tag{3.14}$$

Penyelesaian: Penyelesaian homogen persamaan (3.14) adalah

$$y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Penyelesaian partikular persamaan (3.14) adalah $y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$, dengan y_{p1} dan y_{p2} masing-masing penyelesaian partikular $y''+4y = x$ dan $y'' + 4y = 2e^{-3x}$. Untuk mendapatkan y_{p1} dan y_{p2} seperti telah diberikan pada contoh sebelumnya, diperoleh

$$y_{p1} = \frac{1}{4}x \qquad \text{dan} \qquad y_{p2} = \frac{2}{13}e^{-3x}.$$

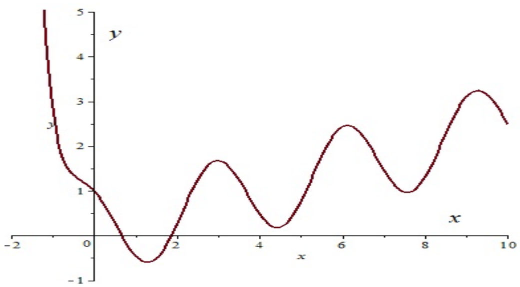
Dengan demikian penyelesaian umum persamaan (3.14) adalah

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p = y_h + y_{p1} + y_{p2} \\ &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x + \frac{2}{13}e^{-3x}. \end{aligned}$$

Dengan menurunkan persamaan ini dan memasukkan syarat awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = -1$, diperoleh $c_1 = 11/13$ dan $c_2 = -41/104$. Oleh karena itu diperoleh penyelesaian masalah nilai awal (3.14)

$$y(x) = \frac{11}{13}\cos 2x - \frac{41}{104}\sin 2x + \frac{1}{4}x + \frac{2}{13}e^{-3x}.$$

Grafik penyelesaian/solusi nilai awal diberikan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2: Grafik solusi $y'' + 4y = x + 2e^{-3x}, y(0) = 1, y'(0) = -1$

3.4 Aplikasi Persamaan Diferensial Orde Dua

Beberapa aplikasi persamaan diferensial orde dua pada mekanika dan rangkaian listrik diberikan dalam contoh-contoh berikut.

1. Aplikasi pada mekanika

Contoh 3.17. *Partikel P dengan massa 2 gram bergerak pada sumbu-x dan ditarik menuju titik asal O dengan gaya sama dengan $8X$. Jika partikel itu semula berdiam di $X = 10$, tentukan posisi partikel pada setiap saat dengan berasumsi*

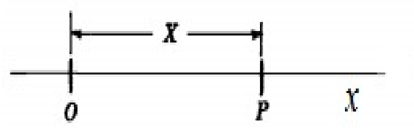
a. *tidak ada gaya lain yang bekerja;*

b. *gaya peredam bekerja sebesar 8 kali kecepatan sesaat.*

Penyelesaian:

a. Jika $X > 0$ (positif arah kanan), gaya total adalah ke arah kiri dan diberikan $-8X$. Jika $X < 0$ gaya total ke arah kanan dan diberikan $-8X$ (lihat Gambar 3.3). Sesuai hukum Newton, diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Massa} \times \text{Percepatan} &= \text{Gaya total} \\ 2 \cdot \frac{d^2X}{dt^2} &= -8X. \end{aligned}$$



Gambar 3.3: Ilustrasi permasalahan pada soal

Dengan demikian diperoleh masalah nilai awal

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 4X = 0, \qquad X(0) = 10, \qquad X'(0) = 0.$$

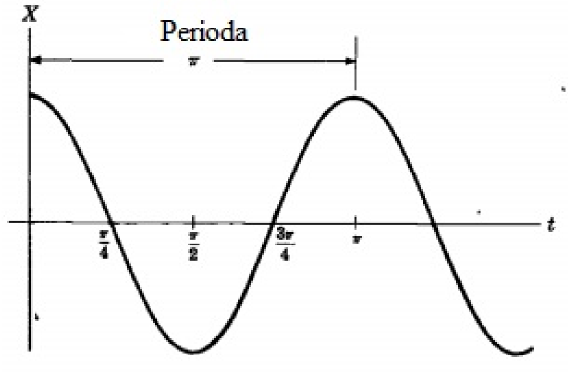
Penyelesaian persamaan diferensial ini adalah

$$X(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Dengan memasukkan syarat-syarat awalnya, diperoleh $c_1 = 10$ dan $c_2 = 0$.
Jadi penyelesaiannya adalah

$$X(t) = 10 \cos 2t.$$

Grafik pergerakan partikel yang merupakan penyelesaian nilai awal diberikan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4: Grafik pergerakan partikel

b. Jika $X > 0$ dan $dX/dt > 0$, titik P di sebelah kanan O dan bergerak ke arah kanan, sehingga

$$\begin{aligned} \text{Massa} \times \text{Percepatan} &= \text{Gaya total} \\ 2 \cdot \frac{d^2X}{dt^2} &= -8X - 8\frac{dX}{dt}. \end{aligned}$$

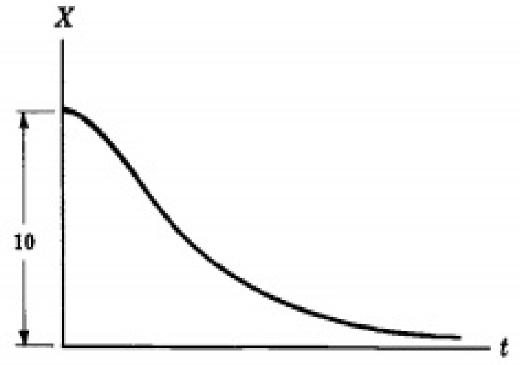
Masalah nilai awal adalah

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 4\frac{dX}{dt} + 4X = 0, \qquad X(0) = 10, \qquad X'(0) = 0.$$

Penyelesaian masalah nilai awal adalah

$$X(t) = 10e^{-2t}(1 + 2t).$$

Grafik penyelesaian diberikan pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5: Grafik pergerakan partikel dengan peredaman

2. Aplikasi pada rangkaian listrik

Contoh 3.18. *Sebuah rangkaian listrik terdiri dari induktor 2 henry, resistor 2 ohm, dan kapasitor 0,02 farad dihubungkan secara seri dengan tegangan E volt. Saat* $t = 0$*, muatan kapasitor dan arus dalam rangkaian sebesar nol. Tentukan muatan dan arus pada sebarang* $t > 0$ *jika (a).* $E = 300$ *volt, (b)*$E = 100 \sin 3t$ *volt.*

Penyelesaian:
Misalkan $Q(t)$ menyatakan muatan listrik pada saat t dan $I(t)$ menyatakan kuat arus pada saat t. Berdasarkan hukum Kirchoff, diperoleh

$$2\frac{dI(t)}{dt} + 16I(t) + \frac{Q(t)}{0,02} = E(t). \tag{3.15}$$

Karena $I(t) = dQ/dt$, persamaan (3.15) menjadi

$$2\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + 16\frac{dQ(t)}{dt} + 50Q(t) = E(t),$$

dengan syarat awal $Q(0) = 0, I(0) = Q'(0) = 0$.

a. Untuk $E(t) = 300$, diperoleh masalah nilai awal

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + 8\frac{dQ(t)}{dt} + 25Q(t) = 150, \quad Q(0) = 0, \quad Q'(0) = 0.$$

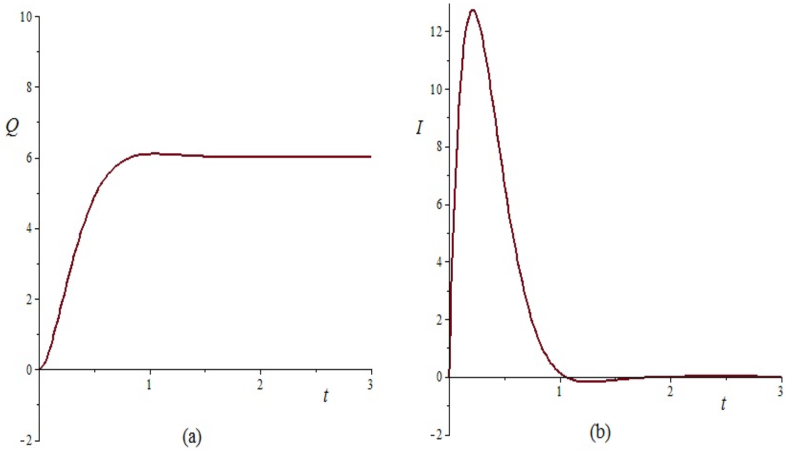
Penyelesaian masalah nilai awal ini, yakni besar muatan listrik pada saat t, diperoleh

$$Q(t) = 6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}\sin 3t.$$

Untuk besar kuat arus, diperoleh

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = 50e^{-4t}\sin 3t.$$

Grafik muatan (Q) dan arus (I) diberikan pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6: Grafik (a) muatan listrik, dan (b) arus listrik

b. Untuk $E(t) = 100\sin 3t$, diperoleh masalah nilai awal

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + 8\frac{dQ(t)}{dt} + 25Q(t) = 50\sin 3t, \quad Q(0) = 0, Q'(0) = 0.$$

Penyelesaian masalah nilai awal ini, yakni besar muatan listrik pada saat t, diperoleh

$$Q(t) = \frac{25}{52}(2\sin 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(2\sin 3t + 3\cos 3t)$$

Untuk besar kuat arus, diperoleh

$$I(t) = \frac{75}{52}(3\sin 3t + 2\cos 3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}(17\sin 3t + 6\cos 3t).$$

$\square$

3.5 Rangkuman

1. Persamaan diferensial linear orde dua dari fungsi y adalah persamaan diferensial yang berbentuk

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

dengan a_1, a_0, dan b fungsi-fungsi yang diberikan pada selang $I \subset \mathbb{R}$. Persamaan diferensial dikatakan

   (a) **homogen** jika $b(x) = 0$ untuk setiap $x \in I$, dan dikatakan **nonhomogen** jika $b(x) \neq 0$;

   (b) **dengan koefisien konstan** jika a_1 dan a_0 keduanya konstan;

   (c) **dengan koefisien peubah** jika a_1 atau a_0 tidak konstan.

2. Persamaan diferensial linear homogen

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

dengan a, b, dan c konstan, mempunyai akar-akar karakteristik

$$k_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Penyelesaian persamaan diferensial tersebut adalah

   (a) jika $k_1 \neq k_2$ keduanya real, maka

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x},$$

   dengan c_1 dan c_2 keduanya konstanta sebarang.

   (b) jika $k_1 = k_2 = m$ real, maka

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx},$$

   dengan c_1 dan c_2 keduanya konstanta sebarang.

   (c) jika $k_{12} = r \pm is$ keduanya kompleks sekawan, maka

$$y(x) = e^{rx}[c_1 \cos sx + c_2 \sin sx],$$

   dengan c_1 dan c_2 keduanya konstanta sebarang.

3. Persamaan diferensial linear nonhomogen

$$ay'' + by' + cy = g(x),$$

dengan a, b, dan c konstan dan $g(x) \neq 0$, mempunyai penyelesaian

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

dengan y_h adalah penyelesaian homogen (penyelesaian persamaan diferensial saat $g(x) = 0$) dan y_p adalah penyelesaian partikular.

3.6 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu permasalahan-permasalahan berikut

1. Diberikan persamaan diferensial

$$y'' - y = g(x)$$

dengan

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{jika } x < 0, \\ 1 - x & \text{jika } x \geq 0. \end{cases}$$

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

2. Suatu massa M bergerak pada sepanjang sumbu-x yang dipengaruhi suatu gaya sebanding laju sesaatnya dengan arah berlawanan. Misalkan saat $t = 0$ partikel berada di $x = a$ dan bergerak ke arah kanan dengan laju v_0. Tentukan kedudukan partikel tersebut berhenti.

3.7 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Boyce, W.E., R.C. DiPrima, dan D.B. Meade, 2017, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th edition, John Wiley & Sons

2. Simmons, G.F. dan S.G. Krantz, 2007, *Differential Equations Theory, Technique, and Practice.* International Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc.

3. Spiegel, M.R, P. Silaban, dan H. Wospakrik, 1999, *Transformasi Laplace: Teori dan Soal-soal*, UI-Press

3.8 Soal-soal Latihan

1. Tentukan konstanta c dan k sedemikian sehingga fungsi $y(t) = ct^k$ adalah penyelesaian dari

$$-t^3y'' + t^2y' + 4ty = 1.$$

2. Periksa bahwa $y_1(t) = t^2$ dan $y_2(t) = 1/t$ keduanya adalah penyelesaian dari persamaan diferensial

$$t^2y'' - 2y = 0, \quad t > 0.$$

3. Tentukan penyelesaian umum persamaan:

   (a) $y'' + 3y' + 2y = 0$
   (b) $2y'' - 3y' + y = 0$
   (c) $4y'' - 9y = 0$
   (d) $y'' - 2y' - 2y = 0.$

4. Selesaikan masalah nilai awal berikut:

   (a) $y'' + y' - 2y = 0, \qquad Y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
   (b) $6y'' - 5y' + y = 0, \qquad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$
   (c) $y'' + 3y' = 0, \qquad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$
   (d) $4y'' - y = 0, \qquad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1.$

5. Tentukan nilai r sehingga penyelesaian masalah nilai awal

$$y'' - y' - 2y = 0, \qquad y(0) = r, \quad y'(0) = 2,$$

   adalah $y(x)$ yang bersifat

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

6. Tentukan penyelesaian persamaan-persamaan diferensial berikut

   (a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$

(b) $y'' + 2y' + 5y = 2\sin 2x$

(c) $y'' - 2y' - 3 = 3xe^{-x}$

(d) $y'' + y' = x + \sin 2x$

(e) $y'' + y' + 4y = \sinh x$

(f) $y'' + y = 4\sin 2x + x\cos 2x$

7. Selesaikan masalah-masalah nilai awal berikut

(a) $y'' + y' - 2y = 2x, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$

(b) $y'' + 4y = x^2 + 3e^x, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 2$

(c) $y'' - 2y' - 3y = 3xe^{2x}, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$

(d) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$

8. Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$y'' + \alpha^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \sin(m\pi x),$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\alpha \neq m\pi$ untuk $m = 1, 2, \cdots, N$.

Bab 4

Persamaan Diferensial Linear Orde Lebih dari Dua

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami bentuk-bentuk persamaan diferensial orde tinggi lebih dari dua;
2. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
3. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menyelesaikan persamaan diferensial linear orde tinggi dengan koefisien konstan, baik homogen maupun nonhomogen;
2. mengaplikasikan persamaan diferensial linear orde tinggi dalam kehidupan sehari-hari;

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde n adalah

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g(x)$$

dengan $a_n \neq 0$.
Pada bab ini dibahas penyelesaian persamaan diferensial linear orde n homogen maupun nonhomogen hanya untuk kasus koefisien-koefisien konstan.

4.1 Persamaan Linear Homogen dengan Koefisien Konstan

Persamaan diferensial linear orde n homogen dengan koefisien konstan berbentuk

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \qquad (4.1)$$

dengan $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ semuanya konstanta real dengan $a_n \neq 0$. Persamaan karakteristik (4.1) adalah

$$a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1k + a_0 = 0,$$

dengan akar-akar penyelesaian $k_1, k_2, \cdots, k_n$.
Penyelesaian persamaan (4.1) dikelompokkan berdasarkan nilai akar-akar karakteristiknya.

1. Jika $k_1, k_2, \cdots, k_n$ semuanya real dan berbeda, maka penyelesaian persamaan (4.1) adalah

   $$y(x) = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + \cdots + c_ne^{k_nx},$$

   dengan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ konstanta-konstanta sebarang.

2. Jika $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = m$ real, maka penyelesaian persamaan (4.1) adalah

   $$y(x) = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx} + c_3x^2e^{mx} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{mx},$$

   dengan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ konstanta-konstanta sebarang.

3. Jika n genap dan $k_{12} = a_1 + \pm b_1, k_{34} = a_2 \pm b_2, \cdots$ semuanya pasangan kompleks sekawan dan berbeda, maka penyelesaian persamaan (4.1) adalah

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{a_1 x}(c_1 \cos b_1 x + c_2 \sin b_1 x) + e^{a_2 x}(c_3 \cos b_2 x + c_4 \sin b_2 x) \\ &\quad + \cdots + e^{a_{n/2} x}(c_{n-1} \cos b_{n/2} x + c_n \sin b_{n/2} x), \end{aligned}$$

dengan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ konstanta-konstanta sebarang.

Contoh 4.1. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$y^{iv} - 5y'' + 4y = 0. \tag{4.2}$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristik (4.2) adalah

$$k^4 - 5k^2 + 4 = 0,$$

dengan penyelesaian

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 2, \quad k_4 = -2.$$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial (4.2) adalah

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$$

dengan c_1, c_2, c_3, dan c_4 konstanta-konstanta sebarang. □

Contoh 4.2. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0. \tag{4.3}$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristik (4.3) adalah

$$k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0, \quad \text{atau} \quad (k-2)^3 = 0$$

dengan penyelesaian

$$k_1 = k_2 = k_3 = 2.$$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial (4.3) adalah

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$$

dengan c_1, c_2, dan c_3 konstanta-konstanta sebarang. □

Contoh 4.3. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$y^{iv} - 2y''' + 3y'' - 2y' + 2y = 0. \tag{4.4}$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristik (4.4) adalah

$$k^4 - 2k^3 + 3k^2 - 2k + 2 = 0$$

dengan penyelesaian

$$k_{12} = \pm i, \quad k_{34} = 1 \pm i$$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial (4.4) adalah

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 e^x \cos x + c_4 e^x \sin x$$

dengan c_1, c_2, c_3, dan c_4 konstanta-konstanta sebarang. □

Untuk kasus akar-akar persamaan karakteristiknya merupakan kombinasi dari bilangan real dan kompleks, diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 4.4. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$y^{(6)} - 2y^{(5)} + y^{iv} + 2y''' - 2y'' = 0 \tag{4.5}$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristik (4.5) adalah

$$k^6 - 2k^5 + k^4 + 2k^3 - 2k^2 = 0, \quad \text{atau} \quad k^2(k-1)(k+1)(k^2 - 2k + 2)$$

dengan penyelesaian

$$k_{12} = 0, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = -1, \quad k_{56} = 1 \pm i.$$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial (4.5) adalah

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 e^x \cos x + c_6 e^x \sin x$$

dengan c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, dan c_6 konstanta-konstanta sebarang. □

Contoh 4.5. *Selesaikan masalah nilai awal*

$$y''' - 2y'' + 3y' = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1. \tag{4.6}$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristik persamaan diferensial pada (4.6) adalah

$$k^3 - 2k^2 + 3k = 0,$$

dengan penyelesaian

$$k_1 = 0, \quad k_{23} = 1 \pm \sqrt{2}i.$$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial (4.6) adalah

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x \cos\sqrt{2}x + c_3 e^x \sin\sqrt{2}x.$$

Dengan memasukkan syarat $y(0) = 0, y'(0) = 1$, dan $y''(0) = 0$ diperoleh

$$c_1 = -\frac{2}{3}, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_3 = \frac{1}{6}\sqrt{2},$$

sehingga penyelesaian nilai awal adalah

$$y(x) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^x \cos\sqrt{2}x + \frac{1}{6}\sqrt{2}e^x \sin\sqrt{2}x.$$

□

4.2 Persamaan Linear Orde Tinggi Nonhomogen dengan Koefisien Konstan

Persamaan diferensial linear orde n nonhomogen dengan koefisien konstan berbentuk

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x), \tag{4.7}$$

dengan $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ semuanya konstanta real dengan $a_n \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$. Penyelesaian persamaan (4.7) adalah

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

dengan $y_h(x)$ dan $y_p(x)$ adalah masing-masing penyelesaian homogen dan penyelesaian partikular persamaan (4.7). Untuk mendapatkan penyelesaian homogen telah dijelaskan pada subbab 4.1, sedangkan untuk penyelesaian partikularnya akan dibahas berikut ini.

Penyelesaian partikular persamaan (4.7) ini dikelompokkan berdasarkan jenis fungsi $g(x)$nya.

1. $g(x) = e^{bx}$ (fungsi eksponensial).

   (a) Jika persamaan (4.7) tidak mempunyai penyelesaian homogen berbentuk $y = ce^{bx}$, maka penyelesaian partikular persamaan (4.7) dimisalkan

   $$y_p = Ae^{bx}$$

   dengan A konstanta yang akan dicari.

   (b) Jika persamaan (4.7) mempunyai penyelesaian homogen berbentuk $y = ce^{bx}$, maka penyelesaian partikular persamaan (4.7) dimisalkan

   $$y_p = Axe^{bx}$$

   dengan A konstanta yang akan dicari.

2. $g(x) = p_n(x)$ (polinom berderajat n).

   (a) Jika persamaan (4.7) tidak mempunyai penyelesaian homogen berbentuk $y = B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m$ dengan $m < n$, maka penyelesaian partikular persamaan (4.7) dimisalkan

   $$y_p = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$$

   dengan $A_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$ konstanta-konstanta yang akan dicari.

   (b) Jika persamaan (4.7) mempunyai penyelesaian homogen berbentuk $y = B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m$ dengan $m < n$, maka penyelesaian partikular persamaan (4.7) dimisalkan

   $$y_p = (A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)x^{m+1}$$

   dengan $A_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$ konstanta-konstanta yang akan dicari.

3. Jika $g(x) = \cos bx$ atau $g(x) = \sin bx$ (fungsi sinus atau cosinus), maka penyelesaian partikular persamaan (4.7) dimisalkan

   $$y_p = A\cos bx + B\sin bx.$$

Untuk memperjelas penyelesaian partikular persamaan diferensial linear nonhomogen, diberikan contoh-contoh berikut.

Contoh 4.6. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan diferensial*

$$y^{iv} - 5y'' + 4y = e^{3x}. \tag{4.8}$$

Penyelesaian:
Misalkan $y_p = Ae^{3x}$, maka diperoleh

$$y_p' = 3Ae^{3x}, \quad y_p'' = 9Ae^{3x}, \quad y_p''' = 27Ae^{3x}, \quad y_p^{iv} = 81Ae^{3x}.$$

Substitusikan y_p, y_p'', dan y_p^{iv} ini ke persamaan (4.8), diperoleh

$$[81A - 45A + 4A]e^{3x} = e^{3x}$$

sehingga berakibat $40A = 1$ atau $A = 1/40$.
Jadi penyelesaian partikularnya adalah

$$y_p(x) = \frac{1}{40}e^{3x}.$$

□

Contoh 4.7. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan diferensial*

$$y''' - 4y' = e^{2x}.$$

Penyelesaian:
Penyelesaian homogen persamaan diferensial adalah $y_h = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$. Karena dalam penyelesaian homogen terdapat suku e^{2x}, maka penyelesaian partikularnya dimisalkan

$$y_p = Axe^{2x}.$$

Dengan mencari turunan-turunannya, diperoleh

$$y_p' = Ae^{2x}(1 + 2x), \qquad y_p'' = 4Ae^{2x}(1 + x), \qquad y_p''' = 4Ae^{2x}(3 + 2x)$$

Substitusikan y_p' dan y_p''' ini ke persamaan diferensial, diperoleh

$$4Ae^{2x}(3 + 2x) - 4Ae^{2x}(1 + 2x) = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad 8A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{8}.$$

Dengan demikian, diperoleh penyelesaian partikular

$$y_p = \frac{1}{8}xe^{2x}.$$

□

Contoh 4.8. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan diferensial*

$$y''' - y'' = x.$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristiknya adalah $k^3 - k^2 = 0$ dengan akar-akar penyelesaian $k_1 = k_2 = 0$ dan $k_3 = 1$. Oleh karena itu penyelesaian homogen persamaan diferensial adalah

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3e^x.$$

Karena penyelesaian homogen memuat suku konstan dan suku x, maka untuk memisalkan penyelesaian partikularnya adalah

$$y_p = (A + Bx)x^2.$$

Dengan menurunkannya, diperoleh

$$y_p'' = 2A + 6Bx \qquad \text{dan} \qquad y_p''' = 6B.$$

Selanjutnya mensubstitusikan hasil-hasil ini ke persamaan diferensial, diperoleh

$$6B - (2A + 6Bx) = x$$

yang menghasilkan $A = -1/2$ dan $B = -1/6$.
Jadi penyelesaian partikular persamaan diferensial adalah

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

□

4.3 Rangkuman

1. Penyelesaian persamaan diferensial

$$a_ny^{(n)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$

dikelompokkan berdasarkan nilai akar-akar karakteristiknya.

(a) Jika $k_1, k_2, \cdots, k_n$ semuanya real dan berbeda, maka penyelesaiannya adalah

$$y(x) = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + \cdots + c_ne^{k_nx},$$

dengan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ konstanta-konstanta sebarang.

(b) Jika $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = m$ real, maka penyelesaiannya adalah

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} + c_3 x^2 e^{mx} + \cdots + c_n x^{n-1} e^{mx},$$

dengan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ konstanta-konstanta sebarang.

(c) Jika n genap dan $k_{12} = a_1 + \pm b_1, k_{34} = a_2 \pm b_2, \cdots$ semuanya pasangan kompleks sekawan dan berbeda, maka penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{a_1 x}(c_1 \cos b_1 x + c_2 \sin b_1 x) \\ &\quad + e^{a_2 x}(c_3 \cos b_2 x + c_4 \sin b_2 x) + \cdots \\ &\quad + e^{a_{n/2} x}(c_{n-1} \cos b_{n/2} x + c_n \sin b_{n/2} x), \end{aligned}$$

dengan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ konstanta-konstanta sebarang.

2. Penyelesaian partikular persamaan diferensial

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

dikelompokkan berdasarkan jenis fungsi $g(x)$nya.

(a) $g(x) = e^{bx}$ (fungsi eksponensial).

i. Jika persamaan tidak mempunyai penyelesaian homogen berbentuk $y = ce^{bx}$, maka penyelesaian partikular persamaan dimisalkan

$$y_p = Ae^{bx}$$

dengan A konstanta yang akan dicari.

ii. Jika persamaan mempunyai penyelesaian homogen berbentuk $y = ce^{bx}$, maka penyelesaian partikular persamaan dimisalkan

$$y_p = Axe^{bx}$$

dengan A konstanta yang akan dicari.

(b) $g(x) = p_n(x)$ (polinom berderajat n).

i. Jika persamaan tidak mempunyai penyelesaian homogen berbentuk $y = B_0 + B_1 x + \cdots + B_m x^m$ dengan $m < n$, maka penyelesaian partikular persamaan dimisalkan

$$y_p = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$$

dengan $A_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$ konstanta-konstanta yang akan dicari.

ii. Jika persamaan diferensial mempunyai penyelesaian homogen berbentuk $y = B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m$ dengan $m < n$, maka penyelesaian partikular persamaan dimisalkan

$$y_p = (A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)x^{m+1}$$

dengan $A_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$ konstanta-konstanta yang akan dicari.

(c) Jika $g(x) = \cos bx$ atau $g(x) = \sin bx$ (fungsi sinus atau cosinus), maka penyelesaian partikular persamaan dimisalkan

$$y_p = A\cos bx + B\sin bx.$$

4.4 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu masalah-masalah berikut

1. Diberikan persamaan diferensial

$$y^{iv} - y = g(x)$$

dengan

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{jika } x < 0, \\ 1 - x & \text{jika } x \geq 0. \end{cases}$$

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

2. Tentukan penyelesaian masalah nilai awal dengan bentuk persamaan diferensial pada (1) dengan $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$, dan $y'''(0) = 0$.

4.5 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Boyce, W.E., R.C. DiPrima, dan D.B. Meade, 2017, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th edition, John Wiley & Sons

2. Howell, K.B, 2019, *Ordinary Differential Equations: An Introduction to the Fundamentals*, CRC Press

3. Simmons, G.F. dan S.G. Krantz, 2007, *Differential Equations Theory, Technique, and Practice.* International Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc.

4. Spiegel, M.R, P. Silaban, dan H. Wospakrik, 1999, *Transformasi Laplace: Teori dan Soal-soal*, UI-Press

4.6 Soal-soal Latihan

1. Tentukan penyelesaian persamaan-persamaan diferensial berikut
   (a) $y^{iv} - y'' - y' + y = 0$
   (b) $y''' - 2y'' + y = 0$
   (c) $y^{iv} + y'' - 2y = 0$
   (d) $y^{iv} + 4y'' = 0$

2. Tentukan penyelesaian masalah-masalah nilai awal berikut
   (a) $y^{iv} - y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0$
   (b) $y^{iv} - 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2, y'''(0) = 0$

3. Tentukan penyelesaian partikular persamaan-persamaan diferensial berikut
   (a) $y^{iv} - y'' - y' + y = 2e^{-x}$
   (b) $y''' - 2y'' + y = x^3$
   (c) $y^{iv} + 4y'' = \sin 2x$
   (d) $y^{iv} + y'' - 2y = 2e^x$.

4. Tentukan penyelesaian masalah-masalah nilai awal berikut
   (a) $y''' + 4y' = x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$
   (b) $y^{iv} + 2y'' + y = 3x + 4, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = y'''(0) = 1$
   (c) $y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1/4, y''(0) = -3/2$.

Bab 5

Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Operator D

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami konsep operator diferensial;
2. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
3. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. memahami operator diferensial dan sifat-sifatnya;
2. menyelesaikan persamaan diferensial linear orde tinggi dengan koefisien konstan menggunakan operator diferensial (operator D).

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde n nonhomogen adalah

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g(x)$$

dengan $a_n \neq 0$ dan $g(x) \neq 0$.
Pada bab ini dibahas penyelesaian persamaan diferensial linear nonhomogen hanya untuk kasus koefisien konstan dengan menggunakan operator diferensial.

5.1 Pengertian Operator Diferensial dan Sifat-sifatnya

Operator diferensial D, atau cukup ditulis **operator** D, dari fungsi terdiferensialkan $y = f(x)$ pada $\mathbb{R}$ berbentuk

$$D = \frac{d}{dx}$$

Operator D dan versi orde yang lebih tinggi D^n pada fungsi $y = f(x)$ terdiferensialkan setidaknya n kali membawa derivatif fungsi

$$\begin{aligned}
Df(x) &= \frac{df(x)}{dx} \\
D^2f(x) &= D[Df(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{df(x)}{dx}\right] = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \\
&\vdots \\
D^nf(x) &= D[D^{n-1}f(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}\right] = \frac{d^nf(x)}{dx^n}.
\end{aligned}$$

Sebagai contoh, diberikan

$$y = x^3 + x + 3e^{2x} - 5\sin(3x)$$

maka

$$\begin{aligned}
Dy &= \frac{d}{dx}\left[x^3 + x + 3e^{2x} - 5\sin(3x)\right] = 3x^2 + 1 + 6e^{2x} - 15\cos(3x) \\
D^2y &= 6x + 12e^{2x} + 45\sin(3x) \\
D^3y &= 6 + 24e^{2x} + 135\cos(3x)
\end{aligned}$$

dan seterusnya untuk orde-orde yang lebih tinggi.

Penggunaan operator D pada fungsi-fungsi elementer diantaranya fungsi eksponensial, fungsi sinus dan cosinus, dan fungsi polinomial diberikan sebagai berikut.

1. D pada fungsi eksponensial

$$De^{\lambda x} = \frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}, \tag{5.1}$$

ini menunjukkan $e^{\lambda x}$ adalah fungsi karakteristik dari D dengan nilai karakteristik λ.

Untuk orde tinggi D^n dengan $n \geq 2$, diperoleh

$$D^n e^{\lambda x} = \frac{d^n}{dx^n}e^{\lambda x} = \frac{d}{dx}\Big[\frac{d}{dx}\Big(\cdots\frac{d}{dx}e^{\lambda x}\Big)\Big] = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

2. D^2 pada fungsi sinus dan cosinus

$$\begin{aligned} D^2 \sin(\beta x) &= -\beta^2 \sin(\beta x) \\ D^2 \cos(\beta x) &= -\beta^2 \cos(\beta x) \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa baik $\sin(\beta x)$ maupun $\cos(\beta x)$ merupakan fungsi-fungsi karakteristik dari D^2 dengan nilai karakteristik $-\beta^2$. Lebih jauh, pandang orde tinggi $D^{2n} = (D^2)^n$, diperoleh

$$\begin{aligned} D^{2n} \sin(\beta x) &= (D^2)^n \sin(\beta x) \\ &= D^2\Big[D^2\Big(\cdots D^2 \sin\beta x\Big)\Big] \\ &= \big(-\beta^2\big)^n \sin(\beta x) \\ D^{2n} \cos(\beta x) &= (D^2)^n \cos(\beta x) \\ &= D^2\Big[D^2\Big(\cdots D^2 \cos\beta x\Big)\Big] \\ &= \big(-\beta^2\big)^n \cos(\beta x) \end{aligned}$$

3. D pada fungsi polinomial

Untuk $k \geq 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} Dx^k &= \frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1} \\ D^n x^k &= \frac{d^n}{dx^n}x^k = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n} \end{aligned}$$

Lebih khusus, untuk $k < n$, diperoleh

$$D^n x^k = 0.$$

Sebagai contoh
$$D^5 x^3 = \frac{d^5}{dx^5} x^3 = 0.$$

Berikutnya, dibicarakan operator D pada fungsi polinomial dan sifat-sifatnya.
Diberikan fungsi polinomial berderajat n
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{5.2}$$
dengan $a_0, a_1, \cdots, a_n$ konstanta-konstanta real dan $a_n \neq 0$. Dengan mensubstitusikan $D = x$ ke persamaan (5.2) diperoleh
$$P_n(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 \tag{5.3}$$
disebut **polinomial operator** D berderajat n.
Adapun sifat-sifat polinomial operator D sebagai berikut:

1. Linear

   Teorema 5.1. *Jika $P_n(D)$ polinomial operator D berderajat n*
   $$P_n(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0,$$
   maka untuk setiap a dan b bilangan-bilangan real dan f dan g keduanya fungsi terdiferensialkan minimal n kali, berlaku
   $$P_n(D)[af(x) + bg(x)] = aP_n(D)f(x) + bP_n(D)g(x)$$

2. Aturan penjumlahan

   Teorema 5.2. *Jika $P_n(D)$ dan $Q_m(D)$ keduanya polinomial operator D masing-masing berderajat n dan m, maka untuk setiap fungsi f yang terdiferensialkan sedikitnya maks(n, m) kali, berlaku*
   $$[P_n(D) + Q_m(D)]f(x) = P_n(D)f(x) + Q_m(D)f(x)$$

3. Aturan perkalian

   Teorema 5.3. *Jika $P_n(D)$ dan $Q_m(D)$ keduanya polinomial operator D masing-masing berderajat n dan m, maka untuk setiap fungsi f yang terdiferensialkan sedikitnya maks(n, m) kali berlaku*

   $$[P_n(D)Q_m(D)]f(x) = [Q_m(D)P_n(D)]f(x) = P_n(D)[Q_m(D)f(x)]$$

4. Aturan substitusi nilai karakteristik

   Teorema 5.4. *Jika $P_n(D)$ polinomial operator D berderajat n, maka*

   $$P_n(D)e^{\lambda x} = P_n(\lambda)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}P_n(\lambda),$$

   dan

   $$\begin{aligned} P_n(D^2)\sin\beta x &= P_n(-\beta^2)\sin\beta x = \sin\beta x P_n(-\beta^2), \\ P_n(D^2)\cos\beta x &= P_n(-\beta^2)\cos\beta x = \cos\beta x P_n(-\beta^2) \end{aligned}$$

   dengan λ dan β konstanta-konstanta real.

   Bukti. Pertama, diperoleh

   $$\begin{aligned} P_n(D)e^{\lambda x} &= P_n\Big(\frac{d}{dx}\Big)e^{\lambda x} \\ &= \Big(a_n\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 D + a_0\Big)e^{\lambda x} \\ &= \Big(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\Big)e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x}P_n(\lambda) \end{aligned}$$

   Untuk selanjutnya,

   $$\begin{aligned} & P_n(D^2)\sin\beta x \\ = & \Big(a_n(D^2)^n + a_{n-1}(D^2)^{n-1} + \cdots + a_1 D^2 + a_0\Big)\sin\beta x \\ = & \Big(a_n(-\beta^2)^n + a_{n-1}(-\beta^2)^{n-1} + \cdots + a_1(-\beta^2) + a_0\Big)\sin\beta x \\ = & P_n(-\beta^2)\sin\beta x \\ = & \sin\beta x P_n(-\beta^2) \end{aligned}$$

   Untuk kasus $P_n(D^2)\cos\beta x$ serupa. □

5. Aturan perkalian dengan eksponensial

Teorema 5.5. *Diberikan $P_n(D)$ polinomial operator D berderajat n. Maka*

$$\begin{aligned} D^n[e^{\lambda x} f(x)] &= e^{\lambda x}(D+\lambda)^n f(x), &(5.4)\\ P_n(D)\big[e^{\lambda x} f(x)\big] &= e^{\lambda x} P_n(D+\lambda) f(x) &(5.5)\end{aligned}$$

dengan $f(x)$ fungsi terdiferensialkan minimal n kali pada $\mathbb{R}$.

Bukti. Pertama akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.
Pertama, untuk $n = 1$:

$$D\big[e^{\lambda x} f(x)\big] = \frac{d}{dx}\big[e^{\lambda x} f(x)\big] = e^{\lambda x}\big(\lambda + \frac{d}{dx}\big) f(x) = e^{\lambda x}(D+\lambda) f(x).$$

Kedua, untuk $n = k$ anggap benar berlaku

$$D^k\big[e^{\lambda x} f(x)\big] = e^{\lambda x}(D+\lambda)^k f(x)$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} D^{k+1}\big[e^{\lambda x} f(x)\big] &= D\big[D^k\big(e^{\lambda x} f(x)\big)\big]\\ &= e^{\lambda x}(D+\lambda)\big[(D+\lambda)^k f(x)\big]\\ &= e^{\lambda x}(D+\lambda)^{k+1} f(x)\end{aligned}$$

Untuk bukti selanjutnya,

$$\begin{aligned} P_n(D)\big[e^{\lambda x} f(x)\big] &= \big[a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\big]\\ &\quad \big(e^{\lambda x} f(x)\big)\\ &= e^{\lambda x}\big[a_n(D+\lambda)^n + a_{n-1}(D+\lambda)^{n-1} + \cdots\\ &\quad + a_1(D+\lambda) + a_0\big] f(x)\\ &= e^{\lambda x} P_n(D+\lambda) f(x)\end{aligned}$$

Bukti telah selesai. □

Selanjutnya dikenalkan fungsi operator D dalam ekspansi deret Taylor.

Definisi 5.6. *Diberikan $f(x)$ fungsi konvergen seragam pada $\mathbb{R}$. Fungsi operator $f(D)$ didefinisikan dalam suku-suku ekspansi deret Taylor $f(x)$ di sekitar $x = 0$:*

$$\begin{aligned} f(D) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) D^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n}\Big|_{x=0} D^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n}\Big|_{x=0} \frac{d^n}{dx^n}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Sebagai contoh,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-D} &= \sum_{n=0}^{\infty} D^n = 1 + D + D^2 + D^3 + \cdots \\ e^D &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n = 1 + D + \frac{1}{2!} D^2 + \frac{1}{3!} D^3 + \cdots \\ \sin D &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} D^{2n+1} = D - \frac{1}{3!} D^3 + \frac{1}{5!} D^5 - \cdots \\ \cos D &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} D^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} D^2 + \frac{1}{4!} D^4 - \cdots \end{aligned}$$

dan lain sebagainya.

5.2 Kernel Operator D

Sebagaimana definisi umum dari kernel operator, kernel dari operator $D^k, k = 1, 2, \cdots$, pada ruang fungsi real terdiferensialkan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 5.7.

$$kerD^k = \{f(x) | D^k f(x) = 0\}$$

Jadi, $kerD^k$ adalah himpunan semua fungsi polinomial berderajat paling tinggi $k-1$, yakni

$$\begin{aligned} kerD^k &= span\{1, x, x^2, \cdots, x^{k-1}\} \\ &= \{c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \cdots + c_1 x + c_0 | \end{aligned}$$

dengan $c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$ konstanta-konstanta.

Lebih jauh, dapat dituliskan kernel polinomial $P_n(D)$ operator D yang merupakan ruang penyelesaian persamaan diferensial linear orde n homogen dengan koefisien-koefisien konstan:

$$P_n(D)y(x) = a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0.$$

Nilai $ker P_n(D)$ mengambil bentuk-bentuk selisih yang tergantung pada $P_n(D)$. Dengan menerapkan aturan perkalian dengan eksponensial dan aturan substitusi nilai karakteristik, diperoleh hasil yang diinginkan.

Teorema 5.8. *Diberikan $P_n(D)$ polinomial operator D.*

1. *Jika $P_n(D)$ adalah perkalian n faktor-faktor linear berbeda (untuk sederhananya, diambil $a_n = 1$ sekarang dan selanjutnya),*

$$P_n(D) = (D - r_1)(D - r_2)\cdots(D - r_n)$$

dengan $r_i \neq r_j$ untuk setiap $i \neq j$ dan $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, maka

$$\begin{aligned} P_n(D) &= span\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \cdots, e^{r_n x}\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x} \middle| c_1, c_2, \cdots, c_n \text{ konstanta-konstanta} \right\} \end{aligned}$$

2. *Jika $P_n(D)$ adalah perkalian k faktor-faktor linear berulang yang berbeda,*

$$P_n(D) = (D - r_1)^{n_1}(D - r_2)^{n_2}\cdots(D - r_k)^{n_k}$$

dengan $r_i \neq r_j$ untuk setiap $i \neq j$ dan $i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ dan $r_i \geq 1$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, maka

$$\begin{aligned} P_n(D) &= span\{xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \cdots, x^{n_1 - 1}e^{r_1 x}; \cdots; xe^{r_k x}, x^2 e^{r_k x}, \\ &\quad \cdots, x^{n_k - 1}e^{r_k x}\} \end{aligned}$$

3. *Jika $P_n(D)$ adalah perkalian k faktor-faktor kuadratik berbeda, dan dalam kasus ini $n = 2k$,*

$$P_n(D) = \left[(D - \alpha_1)^2 + \beta_1^2\right]\left[(D - \alpha_2)^2 + \beta_2^2\right]\cdots\left[(D - \alpha_k)^2 + \beta_k^2\right]$$

dengan $\alpha_i \neq \alpha_j$, atau $\beta_i \neq \beta_j$ untuk $i \neq j$, maka

$$\begin{aligned} ker P_n(D) &= span\{e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x; \cdots; e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x, \\ &\quad e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x\} \end{aligned}$$

4. *Jika* $P_n(D)$ *adalah perkalian p faktor kuadratik berbeda yang berulang,*

$$P_n(D) = \left[(D-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]^{n_1}\left[(D-\alpha_2)^2+\beta_2^2\right]^{n_2}\cdots\left[(D-\alpha_p)^2+\beta_p^2\right]^{n_p}$$

dengan $\alpha_i \neq \alpha_j$*, atau* $\beta_i \neq \beta_j$ *untuk* $i \neq j$*, maka*

$$\begin{aligned} kerP_n(D) &= span\{e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\ &\quad xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \cdots, x^{n_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\ &\quad x^{n_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x; \cdots; e^{\alpha_p x}\cos\beta_p x, \\ &\quad e^{\alpha_p x}\sin\beta_p x, xe^{\alpha_p x}\cos\beta_p x, xe^{\alpha_p x}\sin\beta_p x, \cdots, \\ &\quad x^{n_p-1}e^{\alpha_p x}\cos\beta_p x, x^{n_p-1}e^{\alpha_p x}\sin\beta_p x\} \end{aligned}$$

Contoh 5.9. *Diberikan*

$$P_{12}(D) = (D-2)(D-5)^3[(D+3)^2+4][(D-7)^2+16]^4$$

maka

$$\begin{aligned} kerP_{12}(D) &= span\{e^{2x}; e^{5x}, xe^{5x}, x^2e^{5x}; e^{-3x}\cos 2x, e^{-3x}\sin 2x; \\ &\quad e^{7x}\cos 4x, e^{7x}\sin 4x, xe^{7x}\cos 4x, xe^{7x}\sin 4x, \\ &\quad x^2e^{7x}cos4x, x^2e^{7x}\cos 4x, x^2e^{7x}\sin 4x, \\ &\quad x^2e^{7x}cos4x, x^3e^{7x}\cos 4x, x^3e^{7x}\sin 4x\} \\ &= a_0e^{2x} + \left(b_0 + b_1x + b_2x^2\right)e^{5x} \\ &\quad +(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)e^{-3x} \\ &\quad +(d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3)e^{7x}\cos 4x \\ &\quad +(e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3)e^{7x}\sin 4x \end{aligned}$$

dengan $a_0, b_0, b_1, b_2, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2, d_3, e_0, e_1, e_2, e_3$ *konstanta-kontanta real.*

5.3 Invers Operator D

Invers operator D, ditulis D^{-1}, dapat didefinisikan sesuai dengan Teorema Dasar Kalkulus. Karena

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(x_1)\ dx_1 = D\int_{x_0}^{x} f(x_1)\ dx_1 = f(x)$$

dengan $f(x)$ fungsi kontinu pada selang terbatas $[a, b]$ dan $x_0 \in [a, b]$, maka invers operator D pada fungsi kontinu $f(x)$ dapat didefinisikan dalam integral tentu berikut:

$$D^{-1} f(x) = \int_{x_0}^{x} f(x_1)\ dx_1.$$

Lebih jauh, dapat dengan mudah didefinisikan invers operator D orde tinggi pada fungsi kontinu $f(x)$ pada selang terbatas:

$$\begin{aligned}
D^{-2} f(x) &= (D^{-1})^2 f(x) = D^{-1}[D^{-1} f(x)] \\
&= \int_{x_0}^{x} \Big(\int_{x_0}^{x_1} f(x_2)\ dx_2 \Big) dx_1 \\
D^{-3} f(x) &= (D^{-1})^3 f(x) = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x_1} \Big(\int_{x_0}^{x_2} f(x_3)\ dx_3 \Big)\ dx_2\ dx_1 \\
&\vdots \\
D^{-n} f(x) &= (D^{-1})^n f(x) \\
&= \int_{x_0}^{x} \Big(\int_{x_0}^{x_1} \cdots \Big(\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n)\ dx_n \Big) \cdots dx_2 \Big) dx_1
\end{aligned}$$

Untuk lebih jelasnya, diberikan contoh-contoh berikut:

1.

$$\begin{aligned}
D^{-1} \cos 3x &= \int_{x_0}^{x} \cos 3x\ dx_1 = \frac{1}{3}(\sin 3x - \sin 3x_0) \\
&= \frac{1}{3} \sin 3x + c = \frac{1}{3} \sin 3x + ker D
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
D^{-2} x &= \int_{x_0}^{x} \Big(\int_{x_0}^{x_1} x_2\ dx_2 \Big) dx_1 \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2}(x_1^2 - x_0^2)\ dx_1 = \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x_0^2 x + \frac{1}{3} x_0^3 \\
&= \frac{1}{6} x^3 + c_1 x + c_2 = \frac{1}{6} x^3 + ker D^2.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan representasi deret Taylor (5.6) pada fungsi operator D, aturan perkalian polinomial operator D, dan definisi-definisi invers operator D^{-k} pada fungsi kontinu, dapat didefinisikan invers operator polinomial $P_n(D)$ sebagai berikut:

Definisi 5.10. *Diberikan*

$$P_n(D)f(x) = \big(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0\big)f(x) = g(x)$$

dengan $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya fungsi-fungsi terdiferensialkan.

1. *Jika $a_0 \neq 0$, maka*

$$\begin{aligned} f(x) &= [P_n(D)]^{-1}g(x) = \frac{1}{P_n(D)}g(x) \\ &= \frac{1}{a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0}g(x) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{1}{a_0}\Big(\frac{a_n}{a_0}D^n + \cdots + \frac{a_1}{a_0}D\Big)^p g(x). \end{aligned}$$

2. *Jika $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$ untuk $1 \leq k \leq n$ dan $a_k \neq 0$, maka*

$$\begin{aligned} f(x) &= [P_n(D)]^{-1}g(x) = \frac{1}{P_n(D)}g(x) \\ &= \frac{1}{a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_kD^k}g(x) \\ &= \frac{1}{a_nD^{n-k} + a_{n-1}D^{n-k-1} + \cdots + a_k}D^{-k}g(x) \end{aligned}$$

Akibat dari definisi $[P_n(D)]^{-1}$ dan aturan perkalian, memenuhi sifat berikut:

Akibat 5.11. *Jika $P_n(D)$ dan $Q_m(D)$ keduanya polinom masing-masing berderajat n dan m, maka*

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_n(D)Q_m(D)}f(x) &= \frac{1}{Q_m(D)P_n(D)}f(x) \\ &= \frac{1}{P_n(D)}\frac{1}{Q_m(D)}f(x) \\ &= \frac{1}{Q_m(D)}\frac{1}{P_n(D)}f(x) \end{aligned}$$

dengan $f(x)$ fungsi terdiferensialkan pada suatu selang.

Akibat 5.12. *Jika $P_n(D)$ dan $Q_m(D)$ keduanya polinom masing-masing berderajat n dan m, maka*

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_n(D)}f(x) &= \frac{1}{P_n(D)Q_m(D)}\Big(Q_m(D)f(x)\Big)\\ &= Q_m(D)\Big(\frac{1}{P_n(D)Q_m(D)}f(x)\Big)\end{aligned}$$

dengan $f(x)$ fungsi terdiferensialkan pada suatu selang.

5.4 Penyelesaian Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen dengan Koefisien Konstan

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde n nonhomogen dengan koefisien-koefisien konstan sebagai berikut:

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x) \tag{5.7}$$

dengan $a_0, a_1, \cdots, a_n$ konstanta-konstanta, $a_n \neq 0$, dan $g(x) \neq 0$. Bentuk persamaan (5.7) dalam ekspresi operator D adalah

$$\big(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0\big)y = g(x) \tag{5.8}$$

Penyelesaian partikular persamaan (5.7) adalah

$$y_p(x) = \frac{1}{P_n(D)}g(x). \tag{5.9}$$

Untuk mendapat penyelesaian persamaan partikular dari persamaan diferensial biasa nonhomogen dengan koefisien-koefisien konstan, akan dibahas dalam beberapa kasus untuk fungsi $g(x)$.

1. **Kasus $g(x)$ fungsi eksponensial**
   Untuk mendapatkan penyelesaian kasus $g(x)$ fungsi eksponensial, misal $g(x) = Ae^{ax}$, diberikan dalam teorema berikut.

   Teorema 5.13. *Diberikan persamaan diferensial*

$$P_n(D)y = Ae^{ax} \tag{5.10}$$

(i). jika $P_n(a) \neq 0$, penyelesaian partikular (5.10) adalah

$$y_p(x) = \frac{1}{P_n(D)} Ae^{ax} = \frac{1}{P_n(a)} Ae^{ax}$$

(ii). jika $P_n(a) = 0$, yakni $P_n(D) = (D-a)^k P_{n-k}(D), 1 \leq k \leq n$, penyelesaian partikular (5.10) adalah

$$y_p(x) = \frac{A}{P_{n-k}(a)} \Big(\frac{x^k}{k!} + ker D^k \Big) e^{ax}$$

Bukti. Sesuai dengan aturan substitusi nilai karakteristik, diperoleh

$$P_n(D)e^{ax} = AP_n(a)e^{ax}. \tag{5.11}$$

(i). Karena $P_n(a) \neq 0$, persamaan (5.11) dibagi dengan $P_n(a)$, diperoleh

$$\frac{1}{P_n(a)} P_n(D)Ae^{ax} = P_n(D)\Big(\frac{Ae^{ax}}{P_n(a)}\Big) = Ae^{ax}.$$

Dengan membandingkan persamaan diferensial (5.10), ini menunjukkan bahwa

$$y_p(x) = \frac{Ae^{ax}}{P_n(a)}.$$

(ii). Karena $P_n(a) = 0$, polinomial $P_n(D)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$P_n(D) = P_{n-k}(D)(D-a)^k, \qquad P_{n-k}(a) \neq 0,$$

sehingga diperoleh bentuk

$$P_n(D)y = (D-a)^k P_{n-k}(D)y = Ae^{ax}.$$

Karena

$$\begin{aligned} & (D-a)^k P_{n-k}(D)\Big[\big(\frac{1}{k!}x^k + ker D^k\big)e^{ax}\Big] && (5.12) \\ = \;& P_{n-k}(D-a)^k \Big[e^{ax}\big(\frac{1}{k!}x^k + ker D^k\big)\Big] \\ = \;& P_{n-k}(a)e^{ax} D^k[\big(\frac{1}{k!}x^k + ker D^k\big) \\ = \;& P_{n-k}(a)e^{ax} && (5.13) \end{aligned}$$

oleh karena itu diperoleh

$$y_p(x) = \frac{A}{P_{n-k}(a)}\left(\frac{x^k}{k!} + kerD^k\right)e^{ax}$$

Bukti telah selesai. $\square$

Berikut diberikan dua contoh dalam mendapatkan penyelesaian partikular menggunakan Teorema 5.13.

Contoh 5.14. *Tentukan penyelesaian partikular dari persamaan*

$$3y'' - 2y' + 8y = 5e^{3x}$$

Penyelesaian:
Dengan menggunakan Teorema 5.13 (i), diperoleh

$$y_p(x) = \frac{1}{3D^2 - 2D + 8}5e^{3x} = \frac{5e^{3x}}{3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 8} = \frac{5}{29}e^{3x}$$

$\square$

Contoh 5.15. *Tentukan penyelesaian partikular dari persamaan*

$$(D-1)(D+5)(D-2)^3 y = 3e^x$$

Penyelesaian:
Dengan menggunakan Teorema 5.13 (ii), diperoleh

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{(D-1)(D+5)(D-2)^3}3e^x \\ &= \frac{x}{1!}\frac{3e^x}{(1+5)(1-2)^3} \\ &= x\frac{3e^{2x}}{-6} = -\frac{1}{2}xe^x \end{aligned}$$

$\square$

Contoh 5.16. *Tentukan penyelesaian partikular dari persamaan*

$$(D-1)(D+5)(D-2)^3 y = 3e^{2x}$$

Penyelesaian:
Dengan menggunakan Teorema 5.13 (ii), diperoleh

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{(D-1)(D+5)(D-2)^3}3e^{2x} \\ &= \frac{x^3}{3!}\frac{3e^{2x}}{(2-1)(2+5)} \\ &= \frac{1}{14}x^3e^{2x} \end{aligned}$$

□

Teorema Input Eksponensial berikut merupakan akibat dari Teorema 5.13.

Akibat 5.17. Teorema Input Eksponensial *Diberikan $P_n(D)$ polinomial berderajat n. Penyelesaian partikular persamaan diferensial (5.10) adalah*

$$y_p(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{P_n(a)} & , P_n(a) \neq 0 \\ \frac{xe^{ax}}{P_n'(a)} & , P_n(a) = 0 \text{ asalkan } P_n'(a) \neq 0 \\ \frac{x^2e^{ax}}{P_n"(a)} & , P_n(a) = P_n'(a) = 0 \text{ asalkan } P_n"(a) \neq 0 \\ \vdots & \\ \frac{x^ke^{ax}}{P_n^{(k)}(a)} & , P_n(a) = P_n'(a) = \cdots = P_n^{(k-1)}(a) = 0, \\ & P_n^{(k)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

Contoh 5.18. *Tentukan penyelesaian partikular dari persamaan*

$$(D-2)(D-4)^3y = 5e^{4x}$$

Penyelesaian:
Karena

$$\begin{aligned} P'(D) &= (D-4)^2(4D-10), \\ P"(D) &= (D-4)(12D-36), \\ P'''(D) &= 12(2D-7) \\ P(4) &= P'(4) = P''(4) = 0, P'''(4) = 12 \neq 0 \end{aligned}$$

sehingga penyelesaian partikularnya adalah

$$y_p(x) = \frac{5x^3e^{4x}}{P'''(4)} = \frac{5}{12}x^3e^{4x}$$

□

2. **Kasus $g(x)$ fungsi polinomial**
   Untuk menentukan penyelesaian partikular kasus $g(x)$ fungsi polinomial, yakni $g(x) = P_k(x)$, diberikan dalam dua contoh berikut

Contoh 5.19. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$y''' - 5y'' + 3y' + 2y = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5.$$

Penyelesaian:
Bentuk operator D persamaan di atas adalah

$$(D^3 - 5D^2 + 3D + 2)y = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5$$

dengan penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \frac{1}{D^3 - 5D^2 + 3D + 2}(2x^3 + 4x^2 - 6x + 5) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + (D^3 - 5D^2 + 3D)/2}\right](2x^3 + 4x^2 - 6x + 5) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}(D^3 - 5D^2 + 3D) + \frac{1}{4}(-5D^2 + 3D)^2 - \frac{1}{8}(3D)^3\right] \\
&\quad (2x^3 + 4x^2 - 6x + 5) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{3}{2}D + \frac{19}{4}D^2 - \frac{91}{8}D^3\right](2x^3 + 4x^2 - 6x + 5) \\
&= x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{39}{2}x - \frac{169}{4}.
\end{aligned}$$

Catatan: Pada proses penyelesaian di atas muncul suku $\frac{1}{4}(-5D^2 + 3D)^2$ yang sebenarnya adalah $\frac{1}{4}(D^3 - 5D^2 + 3D)^2$, hal ini dikarenakan $(D^3)^2(2x^3 + 4x^2 - 6x + 5) = 0$. Begitu juga muncul suku $-\frac{1}{8}(3D)^3$. □

Contoh 5.20. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$y''' - 3y'' + 2y' = x^3 - 2x^2$$

Penyelesaian:
Bentuk operator D persamaan di atas adalah

$$(D^3 - 3D^2 + 2D)y = x^3 - 2x^2$$

dengan penyelesaian partikularnya adalah

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 2D}(x^3 - 2x^2) \\
&= \frac{1}{D(1-D)(2-D)}(x^3 - 2x^2) \\
&= \frac{1}{D(2-D)}(1 + D + D^2 + D^3)(x^3 - 2x^2) \\
&= \frac{1}{D}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}D + \frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{8}D^3\right)\right](x^3 + x^2 + 2x + 2) \\
&= \frac{1}{2}D^{-1}\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{17}{4}\right) \\
&= \frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + \frac{17}{8}x.
\end{aligned}
$$

□

3. **Kasus $g(x)$ fungsi sinus atau cosinus**
   Untuk $g(x) = A\sin bx$ atau $g(x) = A\cos bx$, penyelesaiannya telah diberikan dalam persamaan (5.9) seperti kasus sebelumnya, yakni

$$y_p(x) = \frac{1}{P_n(D)}(A\cos bx + B\sin bx)$$

   Terdapat dua kasus:

   (a) $P_n(D)\sin bx \neq 0$ dan $P_n(D)\cos bx \neq 0$
   Dalam kasus ini, dibuat penyebut (denominator) menjadi fungsi dari D^2 lalu diterapkan aturan substitusi nilai karakteristik. Untuk jelasnya diberikan contoh berikut.

   Contoh 5.21. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$2y''' + y'' - 5y' + 3y = 3\sin 2x$$

   Penyelesaian:

Penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \frac{1}{2D^3+D^2-5D+3}(3\sin 2x) \\
&= \frac{(2D^3-5D)-(D^2+3)}{(2D^3-5D)^2-(D^2+3)^2}(3\sin 2x) \\
&= \frac{2D^3-D^2-5D-3}{D^2(2D^2-5)^2-(D^2+3)^2}(3\sin 2x) \\
&= \frac{3}{(-4)[2\cdot(-4)-5]^2-(-4+3)^2} \\
&\quad (2D^3-D^2-5D-3)\sin 2x \\
&= \frac{3}{677}(26\cos 2x-\sin 2x)
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \frac{1}{2D^3+D^2-5D+3}(3\sin 2x) \\
&= 3\frac{1}{2(-2^2)D-2^2-5D+3}\sin 2x \\
&= \frac{-3}{13D+1}\sin 2x \\
&= \frac{-3}{13D+1}\left(\frac{13D-1}{13D-1}\right)\sin 2x \\
&= -3(13D-1)\frac{1}{(169D^2-1)}(\sin 2x) \\
&= \frac{-3}{(169(-2^2)-1)}(13D-1)\sin 2x \\
&= \frac{3}{677}(26\cos 2x-\sin 2x)
\end{aligned}$$

□

(b) $P_n(D)\sin bx = 0$ dan $P_n(D)\cos bx = 0$
Dalam kasus ini, $(D^2+b^2)\sin bx = 0$ dan $(D^2+b^2)\cos bx = 0$, $P_n(D)$ mengambil bentuk

$$P_n(D) = P_{n-2k}(D)(D^2+b^2)^k, \qquad k \geq 1$$

Untuk menentukan penyelesaian partikular kasus ini, diawali dengan teorema berikut.

Teorema 5.22. *Bahwasannya berlaku*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(D^2+b^2)^{2p}}\cos bx &= \frac{(-1)^p}{(2p)!(2b)^{2p}}x^{2p}\cos bx,\\
\frac{1}{(D^2+b^2)^{2p}}\sin bx &= \frac{(-1)^p}{(2p)!(2b)^{2p}}x^{2p}\sin bx, \quad p=1,2,\cdots\\
\frac{1}{(D^2+b^2)^{2p+1}}\cos bx &= \frac{(-1)^p}{(2p+1)!(2b)^{2p+1}}x^{2p+1}\sin bx,\\
\frac{1}{(D^2+b^2)^{2p+1}}\sin bx &= \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)!(2b)^{2p+1}}x^{2p+1}\cos bx,\\
& p=1,2,\cdots
\end{aligned}$$

Bukti. Dengan menerapkan aturan perkalian eksponensial, diperoleh

$$\begin{aligned}
(D^2+b^2)^k(x^k e^{ibx}) &= e^{ibx}\left[(D+ib)^2+b^2\right]^k x^k\\
&= e^{ibx}(D+2ib)^k D^k x^k\\
&= e^{ibx} i^k (2b)^k k!
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus Euler, yakni $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, untuk $k = 2p, p = 1, 2, \cdots$, diperoleh

$$\begin{aligned}
(D^2+b^2)^{2p}(x^{2p}\cos bx + ix^{2p}\sin bx) &= (2p)!(2b)^{2p}(-1)^p\\
&\quad (\cos bx + i\sin bx)
\end{aligned}$$

Dengan menyesuaikan bagian real dan imaginer, diperoleh

$$\begin{aligned}
(D^2+b^2)^{2p}(x^{2p}\cos bx) = (2p)!(2b)^{2p}(-1)^p\cos bx,\\
(D^2+b^2)^{2p}(x^{2p}\sin bx) = (2p)!(2b)^{2p}(-1)^p\sin bx
\end{aligned}$$

dan diperoleh hasil yang diinginkan.
Dengan cara serupa, untuk $k = 2p+1, p = 0, 1, 2, \cdots$, diperoleh

$$\begin{aligned}
&(D^2+b^2)^{2p+1}(x^{2p1}\cos bx + ix^{2p}\sin bx) =\\
&(2p+1)!(2b)^{2p}(-1)^p(i\cos bx - \sin bx)
\end{aligned}$$

Dengan mengambil bagian real dan imajiner, diperoleh hasil yang diinginkan.

Selanjutnya, untuk menentukan penyelesaian partikular kasus $P_n(D) = 0$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{P_{n-2k}(D)(D^2+b^2)^k}(A\cos bx + B\sin bx) \\ &= \frac{1}{(D^2+b^2)^k}\left[\frac{1}{P_{n-2k}(D)}(A\cos bx + B\sin bx)\right] \end{aligned}$$

Bukti telah selesai. □

Contoh 5.23. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$(D-1)^2(D-2)(D^2+4)^2 y = 4\sin 2x$$

Penyelesaian:
Penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{(D-1)^2(D-2)(D^2+4)^2}4\sin 2x \\ &= \frac{4}{(D^2+4)^2}\left[\frac{1}{(D-1)^2(D-2)}\sin 2x)\right] \\ &= \frac{4}{(D^2+4)^2}\left[\frac{(D+1)^2(D+2)}{(D^2-1)^2(D^2-4)}\sin 2x\right] \\ &= -\frac{1}{50}\frac{1}{(D^2+4)^2}(D^3+4D^2+5D+2)\sin 2x \\ &= -\frac{1}{50}\frac{1}{(D^2+4)^2}(2\cos 2x - 14\sin 2x) \\ &= \frac{1}{800}x^2(\cos 2x - 7\sin 2x) \end{aligned}$$

Cara lain untuk menyelesaikan kasus $g(x) = A\cos bx + B\sin bx$ adalah pertama dengan menggunakan rumus Euler untuk menyatakan $\cos bx$ dan $\sin bx$ dalam suku-suku eksponensial kompleks,

$$\cos bx = \frac{1}{2}(e^{ibx} + e^{-ibx}), \qquad \sin bx = \frac{1}{2i}(e^{ibx} - e^{-ibx})$$

atau

$$\cos bx = Re\{e^{ibx}\}, \qquad \sin bx = Im\{e^{ibx}\}.$$

Selanjutnya menentukan penyelesaian partikular dalam cara yang sama seperti halnya $g(x)$ merupakan fungsi eksponensial kompleks. Sebagai contoh, penyelesaian partikular persamaan dalam Contoh 5.21 adalah

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \frac{1}{2D^3+D^2-5D+3}(3\sin 2x) \\
&= \frac{1}{2D^3+D^2-5D+3}\Big[\frac{3}{2i}(e^{2ix}-e^{-2ix})\Big] \\
&= \frac{3}{2i}\Big[e^{2ix}\frac{1}{2(D+2i)^3+(D+2i)^2-5(D+2i)+3}1\Big] \\
&\quad -e^{-2ix}\Big[\frac{1}{2(D-2i)^3+(D-2i)^2-5(D-2i)+3}1\Big] \\
&= \frac{3}{2i}\Big[\frac{2^{2ix}}{-1-26i}-\frac{2^{-2ix}}{-1+26i}\Big] \\
&= \frac{3}{2i}\frac{1}{677}[(-1+26i)(\cos 2x+i\sin 2x) \\
&\quad -(-1-26i)(\cos 2x-i\sin 2x)] \\
&= \frac{3}{677}(26\cos 2x-\sin 2x)
\end{aligned}$$

4. **Kasus $g(x)$ perkalian fungsi eksponensial dan polinomial** Untuk kasus $g(x)$ merupakan perkalian fungsi eksponensial dan fungsi polinomial, misalkan $g(x) = P_m(x)e^{ax}$, penyelesaian partikurnya adalah

$$y_p(x) = \frac{1}{P_n(D)}P_m(x)e^{ax} = e^{ax}\frac{1}{P_n(D+a)}P_m(x)$$

Contoh 5.24. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$(D-3)^2y = xe^{2x}$$

Penyelesaian:
Penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{(D-3)^2} x e^{2x} \\ &= e^{2x} \frac{1}{((D+2)-3)^2} x \\ &= e^{2x} \frac{1}{(D-1)^2} x \\ &= e^{2x} \frac{1}{(D^2-2D+1)} x \\ &= e^{2x}[1-(D^2-2D)]x \\ &= e^{2x}(x+2) \end{aligned}$$

□

Contoh 5.25. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$(D-3)^2(D^2-2D+5)(D+2)y = (x^2-3x+1)e^{2x}$$

Penyelesaian:
Penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{(D-3)^2(D^2-2D+5)(D+2)}(x^2-3x+1)e^{2x} \\ &= e^{2x} \frac{1}{((D+2)-3)^2((D+2)^2-2(D+2)+5)} \\ &\quad \frac{1}{((D+2)+2)}(x^2-3x+1) \\ &= e^{2x} \frac{1}{D^5+4D^4+2D^3-27D+20}(x^2-3x+1) \\ &= e^{2x} \frac{1}{20-27D}(x^2-3x+1) \\ &= e^{2x} \frac{1}{20}\left[1+\frac{27}{20}D+\left(\frac{27}{20}\right)^2 D^2\right](x^2-3x+1) \\ &= \frac{1}{20}\left[x^2-\frac{3}{10}x+\frac{119}{200}\right]e^{2x}. \end{aligned}$$

□

5. Kasus $g(x)$ **perkalian fungsi polinomial dan fungsi sinus atau cosinus**
   Untuk kasus $g(x)$ merupakan perkalian fungsi polinomial dan fungsi sinus atau cosinus, misalkan $g(x) = P_m(x)(A\cos bx + B\sin bx)$. Untuk menentukan penyelesaian partikularnya, pertama nyatakan fungsi sinus atau cosinus dalam bentuk eksponensial kompleks, selanjutnya gunakan metode dalam kasus perkalian fungsi eksponensial dan fungsi polinomial:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{P_n(D)}P_m(x)(A\cos bx + B\sin bx) \\ &= \frac{1}{2}(A-iB)e^{ibx}\frac{1}{P_n(D+ib)}P_m(x) \\ &\quad +\frac{1}{2}(A+iB)e^{-ibx}\frac{1}{P_n(D-ib)}P_m(x) \end{aligned}$$

   Contoh 5.26. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$y'' - 4y = (x^2-3)\sin 2x$$

   Penyelesaian:
   Penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{(D^2-4)}(x^2-3)\sin 2x \\ &= Im\left\{\frac{1}{(D^2-4)}(x^2-3)e^{i2x}\right\} \\ &= Im\left\{\frac{1}{2i}\left[e^{2ix}\frac{1}{(D+2i)^2-4} - e^{-2ix}\frac{1}{(D-2i)^2-4}\right](x^2-3)\right\} \\ &= Im\left\{\frac{i}{16}\left[e^{2ix}\left(1+\frac{1}{2}iD-\frac{1}{8}D^2\right) - e^{-2ix}\left(1-\frac{1}{2}iD-\frac{1}{8}D^2\right)\right]\right. \\ &\quad \left.(x^2-3)\right\} \\ &= -\frac{1}{32}\left[(4x^2-13)\sin 2x + 4x\cos 2x\right]. \end{aligned}$$

   □

6. **Kasus** $g(x)$ **perkalian fungsi eksponensial dan fungsi sinus atau cosinus**
   Untuk kasus $g(x)$ merupakan perkalian fungsi eksponensial dan fungsi sinus atau cosinus, misalkan $g(x) = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$,

untuk menentukan penyelesaian partikurnya paling mudah adalah menyatakan fungsi sinus atau cosinus dalam bentuk eksponensial kompleks. Di sini ada dua kemungkinan

(a) Jika $P_n(a \pm ib) \neq 0$, maka dapat diterapkan secara langsung aturan substitusi nilai karakteristik untuk mendapatkan penyelesaian partikular:

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= \frac{1}{P_n(D)} e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) \\
&= \frac{1}{2}\frac{A - iB}{P_n(a+ib)} e^{(a+ib)x} + \frac{1}{2}\frac{A+iB}{P_n(a-ib)} e^{(a-ib)x}
\end{aligned}
$$

Contoh 5.27. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(2\cos x - 6\sin x)$$

Penyelesaian:
Penyelesaian partikularnya adalah

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= \frac{1}{D^2 - 2D + 2}\left[e^{2x}(2\cos x - 6\sin x\right] \\
&= \frac{1}{D^2 - 2D + 2}\left[(1+3i)e^{(2+i)x} + (1-3i)^{(2-i)x}\right] \\
&= (1+3i)\frac{e^{(2+i)x}}{(2+i)^2 - 2(2+i) + 2} \\
&\quad +(1-3i)\frac{e^{(2-i)x}}{(2-i)^2 - 2(2-i) + 2} \\
&= \frac{2}{5}e^{2x}(7\cos x - \sin x)
\end{aligned}
$$

□

(b) Jika $P_n(a \pm ib) = 0$, maka dapat diterapkan aturan perkalian eksponensial dan menggunakan definisi invers operator D.

Contoh 5.28. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$(D-1)(D^2 - 6D + 13)y = 4e^{3x}\cos 2x$$

Penyelesaian: penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= (D-1)(D^2-6D+13)4e^{3x}\cos 2x \\
&= \frac{1}{\left[(D-3)^2+4\right](D-1)}2\left[e^{(3+2i)x}+e^{(3-2i)x}\right] \\
&= \frac{1}{(D-3)^2+4}\left[\frac{2}{2+2i}e^{(3+2i)x}\right] \\
&\quad +\frac{1}{(D-3)^2+4}\left[\frac{2}{2-2i}e^{(3-2i)x}\right] \\
&= \frac{1}{2}(1-i)e^{(3+2i)x}\frac{1}{D(D+4i)}1 \\
&\quad +\frac{1}{2}(1+i)e^{(3-2i)x}\frac{1}{D(D-4i)}1 \\
&= \frac{1}{8i}xe^{3x}(1-i)(\cos 2x+i\sin 2x) \\
&\quad -\frac{1}{8i}xe^{3x}(1+i)(\cos 2x+i\sin 2x) \\
&= \frac{1}{4}xe^{3x}(\sin 2x-\cos 2x)
\end{aligned}$$

Cara lain lebih sederhana dengan menggunakan cara sebelumnya adalah

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \frac{1}{(D-1)(D^2-6D+13)}4e^{3x}\cos 2x \\
&= 4e^{3x}\frac{1}{(D+2)(D^2+4)}\cos 2x \\
&= 4e^{3x}\frac{1}{D^2+4}\left[\frac{D-2}{D^2-4}\cos 2x\right] \\
&= e^{3x}\frac{1}{D^2+4}(\sin 2x+\cos 2x) \\
&= \frac{1}{4}xe^{3x}(\sin 2x-\cos 2x)
\end{aligned}$$

□

7. **Kasus $g(x)$ perkalian fungsi polinomial, eksponensial, dan sinus atau cosinus**
   Pandang kasus umum $g(x) = P_m(x)e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$. Metode untuk mendapatkan penyelesaian partikular sama seperti sebelumnya yakni $g(x)$ perkalian dari fungsi polinomial dan

fungsi eksponensial:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{P_n(D)} P_m(x) e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) \\ &= \frac{1}{2}(A - iB)e^{a+ib}\frac{1}{P_n(D+a+ib)}P_m(x) \\ &\quad + \frac{1}{2}(A+iB)e^{a-ib}\frac{1}{P_n(D+a-ib)}P_m(x) \end{aligned}$$

Contoh 5.29. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$y'' - 5y' + 6y = e^x \cos 2x + e^{2x}(3x+4)\cos x.$$

Penyelesaian:
Penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{D^2 - 5D + 6}\left[e^x \cos 2x + e^{2x}(3x+4)\cos x\right] \\ &= y_1(x) + y_2(x) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{D^2 - 5D + 6} e^x \cos 2x \\ &= \frac{1}{(D-2)(D-3)} e^x \cos 2x \\ &= e^x \frac{1}{(D-1)(D-2)} \cos 2x \\ &= e^x \frac{(D+1)(D+2)}{(D^2-1)(D^2-4)} \cos 2x \\ &= \frac{1}{40} e^x (D+1)(D+2)\cos 2x \\ &= -\frac{1}{20} e^x(\cos 2x + 3\sin 2x) \end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= \frac{1}{D^2-5D+6}(3x+4)e^{2x}\cos x \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(D-2)(D-3)}(3x+4)(e^{(2+i)x}+e^{(2-i)x}) \\
&= \frac{1}{2}e^{(2+i)x}\frac{1}{(D+i)(D-1+i)}(3x+4) \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{(2-i)x}\frac{1}{(D-i)(D-1-i)}(3x+4) \\
&= \frac{1}{2i}e^{(2+i)x}\frac{1}{D-1+i}(3x+4+3i) \\
&\quad -\frac{1}{2i}e^{(2-i)x}\frac{1}{D-1-i}(3x+4-3i) \\
&= -\frac{1}{2}e^{2x}\Big[(3x+10)\cos x+(3x+1)\sin x\Big]
\end{aligned}
$$

□

5.5 Rangkuman

1. Diberikan $P_n(D)$ polinomial operator D.

   (a) Jika $P_n(D)$ adalah perkalian n faktor-faktor linear berbeda, yakni
   $$P_n(D) = (D-r_1)(D-r_2)\cdots(D-r_n)$$
   dengan $r_i \neq r_j$ untuk setiap $i \neq j$ dan $i,j \in \{1,2,\cdots,n\}$, maka
   $$
   \begin{aligned}
   P_n(D) &= span\{e^{r_1x}, e^{r_2x}, \cdots, e^{r_nx}\} \\
   &= \Big\{\sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_ix}\Big| c_1, c_2, \cdots, c_n \text{ konstanta-konstanta}\Big\}
   \end{aligned}
   $$

   (b) Jika $P_n(D)$ adalah perkalian k faktor-faktor linear berulang yang berbeda,
   $$P_n(D) = (D-r_1)^{n_1}(D-r_2)^{n_2}\cdots(D-r_k)^{n_k}$$
   dengan $r_i \neq r_j$ untuk setiap $i \neq j$ dan $i,j \in \{1,2,\cdots,k\}$ dan $r_i \geq 1$ untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, maka
   $$
   \begin{aligned}
   P_n(D) &= span\{xe^{r_1x}, x^2e^{r_1x}, \cdots, x^{n_1-1}e^{r_1x}; \cdots; xe^{r_kx}, \\
   &\quad x^2e^{r_kx}, \cdots, x^{n_k-1}e^{r_kx}\}
   \end{aligned}
   $$

(c) Jika $P_n(D)$ adalah perkalian k faktor-faktor kuadratik berbeda, dan dalam kasus ini $n = 2k$,

$$P_n(D) = \left[(D-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]\left[(D-\alpha_2)^2+\beta_2^2\right]\cdots\left[(D-\alpha_k)^2+\beta_k^2\right]$$

dengan $\alpha_i \neq \alpha_j$, atau $\beta_i \neq \beta_j$ untuk $i \neq j$, maka

$$\begin{aligned} kerP_n(D) &= span\{e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x; \cdots ; \\ &\quad e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x, e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x\} \end{aligned}$$

(d) Jika $P_n(D)$ adalah perkalian p faktor kuadratik berbeda yang berulang,

$$P_n(D) = \left[(D-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]^{n_1}\left[(D-\alpha_2)^2+\beta_2^2\right]^{n_2}\cdots\left[(D-\alpha_p)^2+\beta_p^2\right]^{n_p}$$

dengan $\alpha_i \neq \alpha_j$, atau $\beta_i \neq \beta_j$ untuk $i \neq j$, maka

$$\begin{aligned} kerP_n(D) &= span\{e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\ &\quad xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \cdots, x^{n_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\ &\quad x^{n_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x; \cdots ; e^{\alpha_p x}\cos\beta_p x, \\ &\quad e^{\alpha_p x}\sin\beta_p x, xe^{\alpha_p x}\cos\beta_p x, xe^{\alpha_p x}\sin\beta_p x, \cdots, \\ &\quad x^{n_p-1}e^{\alpha_p x}\cos\beta_p x, x^{n_p-1}e^{\alpha_p x}\sin\beta_p x\} \end{aligned}$$

2. Diberikan persamaan diferensial

$$P_n(D)y = Ae^{ax} \tag{5.14}$$

(i). jika $P_n(a) \neq 0$, penyelesaian partikularnya adalah

$$y_p(x) = \frac{1}{P_n(D)}Ae^{ax} = \frac{1}{P_n(a)}Ae^{ax}$$

(ii). jika $P_n(a) = 0$, yakni $P_n(D) = (D-a)^k P_{n-k}(D), 1 \leq k \leq n$, penyelesaian partikularnya adalah

$$y_p(x) = \frac{A}{P_{n-k}(a)}\Big(\frac{x^k}{k!} + kerD^k\Big)e^{ax}$$

5.6 Bahan Diskusi

Diskusikan bersama teman-temanmu masalah-masalah berikut

1. Buktikan sifat linear operator diferensial D.

2. Bagaimana operator D menyelesaian bentuk

$$\frac{1}{F(D)}e^{ax}$$

   jika $F(a) = 0$.

5.7 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Boyce, W.E., R.C. DiPrima, dan D.B. Meade, 2017, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th edition, John Wiley & Sons

2. Chen, Wenfeng, 2018, *Differential Operator Method of Finding A Particular Solution to An Ordinary Nonhomogeneous Linear Differential Equation with Constant Coefficients*, New York: SUNY Polytechnic Institute, Utica

5.8 Soal-soal Latihan

1. Tentukan penyelesaian partikular persamaan-persamaan diferensial berikut dengan menggunakan operator D:

   (a) $y''' - y'' - y + y = 2e^{-x}$

   (b) $y^{iv} + 4y''' + 3y = x$

   (c) $y''' - y' = 2\sin x$

   (d) $y''' - 2y'' + y' = x^3 + 2e^x$

   (e) $y^{iv} + 4y'' = \sin 2x + xe^x + 4$

   (f) $y^{iv} + 2y''' + 2y'' = 3e^x + 2xe^{-x} + e^{-x}\sin x$

   (g) $y^{(5)} - y' = xe^{-x}\sin x$

2. Selesaikan masalah-masalah nilai awal berikut dengan bantuan operator D:

(a) $y''' + 4y' = x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$

(b) $y^{iv} + 2y'' + y = 3x + 4, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 1$

(c) $y''' - 3y'' + 2y' = 2x + e^x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2$

Bab 6

Penyelesaian Masalah Nilai Awal dengan Transformasi Laplace

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa mampu:

1. memahami pengertian transformasi Laplace;
2. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
3. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu:

1. memahami sifat-sifat transformasi Laplace;
2. memahami sifat-sifat transformasi Laplace invers;
3. menyelesaikan masalah nilai batas dengan menggunakan transformasi Laplace;

6.1 Transformasi Laplace

Definisi 6.1. *Diberikan fungsi $f(t)$ untuk $t > 0$.* **Transformasi Laplace** *dari $f(t)$, ditulis $\mathcal{L}\{f(t)\}$, didefinisikan sebagai*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt = F(s)$$

jika integralnya ada.

Contoh 6.2. *Tentukan transformasi Laplace dari $f(t) = 1$.*

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^\infty e^{-st}\ dt = \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st}\ dt \\ &= \lim_{P\to\infty} -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^P = \frac{1}{s}, \qquad s > 0 \end{aligned}$$

Contoh 6.3. *Tentukan transformasi Laplace dari $f(t) = t$.*

Penyelesaian: Dengan mengikuti hasil pada Contoh 6.2, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-st} t\ dt = \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st} t\ dt \\ &= -\frac{1}{s}\Big[\lim_{P\to\infty} te^{-st}\Big|_0^P - \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st}\Big] \\ &= -\frac{1}{s}\Big[0 - \frac{1}{s}\Big] = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Contoh 6.4. *Tentukan transformasi Laplace dari $f(t) = \sin t$.*

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin t\} &= \int_0^\infty e^{-st} \sin t\ dt = \lim_{P\to\infty} \int_0^P -e^{-st} d(\cos t) \\ &= -\Big[\lim_{P\to\infty} \Big(e^{-st} \cos t\Big|_0^P + s \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st}\ \cos t\ dt\Big)\Big] \\ &= -\Big[(0-1) + s \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st}\ \cos t\ dt\Big)\Big] \\ &= 1 + s\Big[\lim_{P\to\infty} \Big(e^{-st} \sin t\Big|_0^P - s \int_0^P e^{-st}\ \sin t\ dt\Big)\Big] \\ &= 1 + s[0 - s\mathcal{L}\{\sin t\}] \\ (1+s^2)\mathcal{L}\{\sin t\} &= 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Transformasi Laplace dari fungsi-fungsi khusus yang lainnya dapat dilihat pada Tabel 6.1.

Tabel 6.1: Tabel Transformasi Laplace Fungsi-fungsi Khusus

No.	$f(t)$	$F(s)$
1.	$t^n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
2.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
4.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
5.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
6.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
7.	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
8.	$t \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

6.2 Sifat-sifat Transformasi Laplace

1. Sifat Linear

   Teorema 6.5. *Jika* $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ *dan* $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, *maka untuk sebarang* α_1 *dan* α_2 *bilangan-bilangan real berlaku*

   $$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s).$$

   Bukti.

   $$\begin{aligned}
   \mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\big[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\big]\, dt \\
   &= \int_0^\infty e^{-st}\alpha_1 f_1(t)\, dt \\
   &\quad + \int_0^\infty e^{-st}\alpha_2 f_2(t)\, dt \\
   &= \alpha_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\, dt \\
   &\quad + \alpha_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\, dt \\
   &= \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)
   \end{aligned}$$

   □

2. Sifat Translasi 1

   Teorema 6.6. *Jika* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, *maka*

   $$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

   Bukti.

   $$\begin{aligned}
   \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt \\
   &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a)
   \end{aligned}$$

   □

3. Sifat Translasi 2

Teorema 6.7. *Diberikan* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. *Jika didefinisikan fungsi* g *pada* $\mathbb{R}$ *dengan*

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & ,t > a \\ 0 & ,t < a \end{cases}$$

maka

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s).$$

Bukti.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}g(t)\ dt \\ &= \int_0^a e^{-st}g(t)\ dt + \int_a^\infty e^{-st}g(t)\ dt \\ &= \int_0^a e^{-st}\cdot 0\ dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\ dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\ dt \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi $t = u + a$, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-(u+a)s}f(u)\ d(u+a) \\ &= e^{-as}\int_0^\infty e^{-us}f(u)\ du \\ &= e^{-as}F(s) \end{aligned}$$

□

4. Sifat Pengubahan Skala

Teorema 6.8. *Jika* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, *maka*

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{s}F(s/a)$$

Bukti.

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(at)\ dt$$

Dengan menggunakan transformasi $t = u/a$, diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(at)\} &= \int_0^\infty e^{-su/a} f(u)\ d(u/a) \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-su/a} f(u)\ du \\ &= \frac{1}{a}F(s/a)\end{aligned}$$

□

5. Transformasi Laplace dari Turunan

Teorema 6.9. *Jika* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, *maka*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Bukti.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\ dt \\ &= \lim_{P\to\infty}\left[\int_0^P e^{-st} f'(t)\ dt\right] \\ &= \lim_{P\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\Big|_0^P + s\int_0^P e^{-st} f(t)\ dt\right] \\ &= \lim_{P\to\infty}\left[e^{-sP}f(P) - f(0) + s\int_0^P e^{-st} f(t)\ dt\right] \\ &= s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt - f(0) = sF(s) - f(0).\end{aligned}$$

□

Perluasan ke dalam turunan-turunan yang berorde lebih tinggi dapat digunakan induksi matematika, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots \\ &\quad -sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

asalkan $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ kontinu untuk $0 \le t \le N$ dan eksponensial berorde untuk $t > N$ dan $f^{(n)}(t)$ kontinu sepotong-sepotong untuk $0 \le t \le N$.

6. Perkalian dengan t^n

   Teorema 6.10. *Jika* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, *maka*

   $$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

6.3 Transformasi Laplace Invers

Jika transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ adalah $F(s)$, yakni $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $f(t)$ disebut **transformasi Laplace invers** dari $F(s)$ yang dinotasikan dengan $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. Sebagai contoh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} &= t \\ \mathcal{L}^{-1}\{1/(s-2)\} &= e^{2t} \\ \mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+4)\} &= \frac{\sin 2t}{2} \end{aligned}$$

dan sebagainya. Sedangkan untuk sifat-sifat operator $\mathcal{L}^{-1}$ diberikan sebagai berikut.

1. Sifat Linear

   Teorema 6.11. *Jika* $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ *dan* $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, *maka untuk sebarang* α_1 *dan* α_2 *bilangan-bilangan real berlaku*

   $$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)\} &= \alpha_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \alpha_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} \\ &= \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t). \end{aligned}$$

2. Sifat Translasi 1

   Teorema 6.12. *Jika* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, *maka*

   $$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

3. Sifat Translasi 2

   Teorema 6.13. *Jika* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, *maka*

   $$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = \begin{cases} f(t-a) & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$$

4. Sifat Pengubahan Skala

   Teorema 6.14. *Jika* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$*, maka*

   $$\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a}f(t/a)$$

5. Transformasi Laplace invers dari Turunan

   Teorema 6.15. *Jika* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$*, maka*

   $$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$$

6. Perkalian dengan s

   Teorema 6.16. *Jika* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$*, maka*

   $$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t), \qquad \textit{untuk } f(0) = 0,$$

   dan

   $$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + f(0)\delta(t), \qquad \textit{untuk } f(0) \neq 0.$$

   dengan $\delta(t)$ *fungsi delta Dirac.*

Agar lebih jelas cara mendapatkan transformasi Laplace invers, diberikan dua contoh berikut.

Contoh 6.17. *Tentukan transformasi Laplace invers dari*

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2-1)}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s(s^2-1)}\Big\} &= \mathcal{L}^{-1}\Big\{-\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}\Big\} \\
&= -\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}\Big\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s-1}\Big\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s+1}\Big\} \\
&= -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh t - 1
\end{aligned}$$

Contoh 6.18. *Tentukan transformasi Laplace invers dari*

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} \\
&= e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}
\end{aligned}
$$

6.4 Penyelesaian Masalah Nilai Awal dengan Transformasi Laplace

Berikut beberapa contoh penyelesaian masalah nilai awal, pertama kasus persamaan diferensialnya berbentuk persamaan diferensial linear dengan koefisien-koefisien konstan.

Contoh 6.19. *Diberikan fungsi $y = y(t)$. Selesaikan persamaan diferensial berikut*

$$y''(t) + y(t) = t$$

yang memenuhi $y(0) = 1$ dan $y'(0) = -2$.

Penyelesaian: Dengan mengambil transformasi Laplace kedua persamaan

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''(t) + y(t)\} &= \mathcal{L}\{t\} \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) &= \frac{1}{s^2} \\
s^2Y(s) - s + 2 + Y(s) &= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, diperoleh

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

Dengan mengambil transformasi Laplace invers persamaan terakhir di atas, diperoleh penyelesaian

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\right\} \\
&= t + \cos t - 3\sin t.
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, contoh penyelesaian masalah nilai awal dengan kasus persamaan diferensialnya berbentuk persamaan diferensial linear dengan koefisien peubah.

Contoh 6.20. *Selesaikan persamaan diferensial berikut*

$$ty''(t) + y'(t) + 4ty(t) = 0$$

yang memenuhi $y(0) = 3$ *dan* $y'(0) = 0$.

Penyelesaian: Dengan mengambil transformasi Laplace kedua persamaan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty''(t) + y'(t) + 4ty(t)\} &= \mathcal{L}\{0\} \\ -\frac{d}{ds}\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + sY(s) - y(0) - \frac{d}{ds}Y(s) &= 0 \\ (s^2+4)\frac{dY}{ds} + sY &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\frac{dY}{Y} + \frac{s\ ds}{s^2+4} = 0.$$

dengan penyelesaian

$$Y(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+4}}$$

dengan C suatu konstanta. Dengan mengambil transformasi Laplace invers persamaan terakhir di atas, diperoleh

$$y(t) = CJ_0(2t)$$

dengan $J_n(t)$ adalah **fungsi Bessel** berorde n yang didefinisikan

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \cdots\right)$$

Untuk menentukan nilai C, diperhatikan bahwa

$$y(0) = CJ_0(0) = C = 3.$$

Jadi diperoleh penyelesaian akhir

$$y(t) = 3J_0(2t)$$

6.5 Rangkuman

1. Diberikan fungsi $f(t)$ untuk $t > 0$. Transformasi Laplace dari $f(t)$, ditulis $\mathcal{L}\{f(t)\}$, didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

jika integralnya ada.

2. Sifat-sifat transformasi Laplace

   (a) Linear. Jika $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ dan $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, maka untuk sebarang α_1 dan α_2 bilangan-bilangan real berlaku

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s).$$

   (b) Translasi 1. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

   (c) Translasi 2. Diberikan $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Jika didefinisikan fungsi g pada $\mathbb{R}$ dengan

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & ,t > a \\ 0 & ,t < a \end{cases}$$

   maka

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as} F(s).$$

   (d) Pengubahan skala. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{s} F(s/a)$$

   (e) Transformasi Laplace turunan. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots \\ &\quad -s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

3. Sifat-sifat operator invers transformasi Laplace, $\mathcal{L}^{-1}$, sebagai berikut.

(a) Linear. Jika $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ dan $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, maka untuk sebarang α_1 dan α_2 bilangan-bilangan real berlaku

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{\alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)\} &= \alpha_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \alpha_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} \\ &= \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t).\end{aligned}$$

(b) Translasi 1. Jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

(c) Translasi 2. Jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \begin{cases} f(t-a) & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$$

(d) Pengubahan Skala. Jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a} f(t/a)$$

(e) Transformasi Laplace invers dari turunan. Jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$$

6.6 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu masalah-masalah berikut

1. Syarat apa saja suatu fungsi dapat memiliki transformasi Laplace. Apakah fungsi yang tidak kontinu di sejumlah terhitung titik masih dapat ditransformasi Laplace kan?

2. Bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial dengan menggunakan transformasi Laplace tanpa ada syarat tambahan berupa syarat awal dan syarat batas.

3. Suatu partikel dengan massa M bergerak sepanjang sumbu-x dan ditarik ke titik asal dengan gaya sebesar lx, $l > 0$. Sebuah gaya peredam bekerja diberikan oleh $\alpha dX/dt, \alpha > 0$. Diskusikan bagaimana gerakan partikel tersebut untuk semua kondisi dengan menganggap $X(0) = X_0$ dan $X'(0) = W_0$.

6.7 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Boyce, W.E., R.C. DiPrima, dan D.B. Meade, 2017, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th edition, John Wiley & Sons

2. Spiegel, M.R, P. Silaban, dan H. Wospakrik, 1999, *Transformasi Laplace: Teori dan Soal-soal*, UI-Press

6.8 Soal-soal Latihan

Dari soal nomor 1 sampai dengan 5, tentukan transformasi Laplace dari fungsi yang diberikan

1. $t \sin 3t$

2. $t \cosh 2t$

3. $t^2 e^{-3t}$

4. $t^2 \cos t/2$

5. $t^2 \sinh t$

Dari soal nomor 6 sampai dengan 9, tentukan transformasi Laplace invers dari fungsi yang diberikan

6. $\frac{4}{(s-1)^3}$

7. $\frac{3s}{s^2-s-6}$

8. $\frac{2s-3}{s^2-4}$

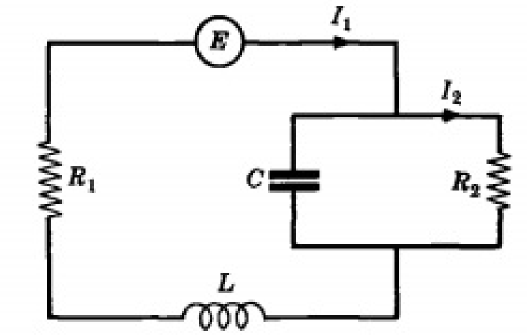
9. $\frac{2s-3}{s^2+2s+10}$

Dari soal nomor 10 sampai dengan nomor 14, tentukan masalah nilai awal yang diberikan dengan menggunakan metode transformasi Laplace.

10. $y'' + 3y + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$

11. $y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = 0$
12. $y'' + 4y = f(t).y(0) = 0, y'(0) = 1$
    dengan
$$f(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t < 1 \\ 0 & , t > 1 \end{cases}$$
13. $ty'' + (t-1)y' - y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y(\infty) = 0$
14. Dalam rangkaian listrik pada Gambar 6.1 dengan

$$\begin{aligned} E &= 500 \sin 10t \\ R_1 = R_2 &= 10 \text{ ohm} \\ L &= 1 \text{ henry} \\ C &= 0,01 \text{ farad} \end{aligned}$$



Gambar 6.1: Rangkaian listrik soal nomor 14

Jika muatan kapasitor dan arus-arus I_1 dan I_2 diketahui adalah nol pada saat $t = 0$, tentukan besar muatan pada kapasitor saat $t > 0$.

Bab 7

Sistem Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. mampu memahami bentuk-bentuk sistem persamaan diferensial;
2. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
3. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear homogen;
2. menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear nonhomogen;
3. mengaplikasikan sistem persamaan diferensial dalam kehidupan sehari-hari;

Bentuk umum **sistem persamaan diferensial linear orde satu** dengan n peubah adalah:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + g_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + g_2 \\ \vdots &= \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + g_n \end{aligned} \tag{7.1}$$

dengan x_i, a_{ij}, dan g_i fungsi-fungsi dari t untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Jika pada sistem persamaan (7.1), koefisien-koefisien a_{ij} semuanya konstan untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, n$, maka disebut **sistem persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan**, jika tidak maka disebut **sistem persamaan diferensial linear dengan koefisien peubah**. Sistem persamaan (7.1) disebut **sistem persamaan linear homogen** jika $g_i = 0$ untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, n$, jika tidak maka disebut **sistem persamaan linear nonhomogen**. Sistem persamaan diferensial (7.1) dapat ditulis

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

yang disebut **matriks koefisien** dan

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

yang disebut **fungsi vektor**.

Beberapa metode yang bisa digunakan untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan diferensial linear nonhomogen diantaranya metode **koefisien tak tentu**, variasi parameter, dan metode **matriks eksponensial**. Kita akan bahas hanya untuk sistem persamaan linear dengan koefisien konstan baik homogen maupun nonhomogen, diawali dengan kasus homogen.

7.1 Sistem Persamaan Linear Homogen dengan Koefisien Konstan

Bentuk umum sistem persamaan linear homogen dengan n peubah adalah

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \tag{7.2}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema 7.1. Prinsip Superposisi *Jika fungsi vektor* $\mathbf{x}^{(1)}$ *dan* $\mathbf{x}^{(2)}$ *adalah penyelesaian-penyelesaian sistem persamaan (7.2), maka kombinasi linear* $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ *dengan* c_1 *dan* c_2 *konstanta-konstanta sebarang, juga merupakan penyelesaian dari sistem persamaan (7.2).*

Dengan mengaplikasikan Prinsip Superposisi ini, dapat disimpulkan bahwa jika $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \cdots, \mathbf{x}^{(k)}$ adalah penyelesaian-penyelesaian sistem persamaan (7.2), maka kombinasi linear

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)}$$

dengan $c_1, c_2, \cdots, c_k$ konstanta-konstanta sebarang, juga merupakan penyelesaian dari sistem persamaan (7.2).

Teorema 7.2. *Jika fungsi-fungsi vektor* $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \cdots, \mathbf{x}^{(n)}$ *bebas linear yang merupakan penyelesaian-penyelesaian sistem persamaan (7.2), maka penyelesaian* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ *sistem persamaan (7.2) dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear*

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$$

secara tunggal.

Selanjutnya akan diberikan beberapa contoh mencari penyelesaian sistem persamaan diferensial linear homogen dengan metode **koefisien tak tentu** untuk sistem dengan dua peubah untuk beberapa kasus nilai-nilai karakteritik real berbeda, kompleks sekawan, dan real kembar.

Contoh 7.3. *Tentukan penyelesaian umum sistem persamaan diferensial*

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_2\\ \frac{dx_2}{dt} &= 4x_1 + x_2\end{aligned}$$

Penyelesaian:
Sistem persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{7.3}$$

Asumsikan $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ dan substitusikan ini ke persamaan (7.3), diperoleh

$$\begin{bmatrix}1-r & 1\\ 4 & 1-r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{7.4}$$

Persamaan (7.4) mempunyai penyelesaian nontrivial jika dan hanya jika determinan matriks koefisiennya nol. Dengan demikian diperoleh

$$(1-r)^2 - 4 = 0$$

dengan penyelesaian $r_1 = 3$ dan $r_2 = -1$ yang mana merupakan nilai-nilai karakteristik dari matriks koefisien pada persamaan (7.3) yang berupa dua bilangan real berbeda. Jika $r = 3$, sistem persamaan (7.4) mereduksi menjadi persamaan tunggal

$$2\xi_1 - \xi_2 = 0.$$

Jadi $\xi_2 = 2\xi_1$, dan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan $r = 3$ bisa diambil

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

Dengan cara serupa, untuk $r = -1$, sistem persamaan (7.4) mereduksi menjadi persamaan tunggal

$$\xi_2 = -2\xi_1$$

dan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan $r = -1$ bisa diambil

$$\xi^{(2)} = \begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

Fungsi-fungsi vektor penyelesaian persamaan diferensial adalah

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Oleh karena itu, penyelesaian sistem persamaan diferensial (7.3) adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t} \end{aligned}$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang. □

Contoh 7.4. *Tentukan penyelesaian umum sistem persamaan diferensial*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{aligned}$$

Penyelesaian:
Sistem persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{7.5}$$

Asumsikan $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ dan substitusikan ini ke persamaan (7.5), diperoleh

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

Persamaan (7.6) mempunyai penyelesaian nontrivial jika dan hanya jika determinan matriks koefisiennya nol. Dengan demikian diperoleh

$$r^2 + r + \frac{5}{4} = 0$$

dengan penyelesaian $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ dan $r_2 = -\frac{1}{2} - i$ yang mana merupakan nilai-nilai karakteristik dari matriks koefisien pada persamaan (7.5) yang berupa kompleks sekawan. Mengikuti contoh sebelumnya, bisa diambil

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

dan

$$\xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

yang merupakan kompleks sekawan. Oleh karena itu, penyelesaian yang bersesuaian dengan persamaan diferensial adalah

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1/2+i)t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1/2-i)t}.$$

Untuk memperoleh penyelesaian real, kita harus tentukan bagian real dan bagian imaginer dari $\mathbf{x}^{(1)}$ dan $\mathbf{x}^{(2)}$. Kenyataannya bahwa

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-t/2}(\cos t + i\sin t) = \begin{bmatrix} e^{-t/2}\cos t \\ -e^{-t/2}\sin t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} e^{-t/2}\sin t \\ e^{-t/2}\cos t \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh pasangan penyelesaian real sistem persamaan diferensial yang diberikan adalah

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t/2}\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}(t) = e^{-t/2}\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Jadi penyelesaian umum sistem persamaan diferensial yang diberikan adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t) \\ &= c_1 e^{-t/2}\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + c_2 e^{-t/2}\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta sebarang. □

Contoh 7.5. *Tentukan penyelesaian umum sistem persamaan diferensial*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Penyelesaian:
Sistem persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{7.7}$$

Asumsikan $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ dan substitusikan ini ke persamaan (7.7), diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

Persamaan (7.8) mempunyai penyelesaian nontrivial jika dan hanya jika determinan matriks koefisiennya nol. Dengan demikian diperoleh

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

dengan penyelesaian $r_1 = r_2 = 2$ merupakan nilai-nilai karakteristik dari matriks koefisien pada persamaan (7.7) berupa dua bilangan real kembar. Untuk vektor karakteristik yang bersesuaian dengan nilai karaktaristik $r_1 = 2$ dapat dipilih

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, penyelesaian yang bersesuaian dengan persamaan diferensial adalah

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Di sini penyelesaian kedua tidak terdapat penyelesaian yang berbentuk $\mathbf{x} = \xi e^{2t}$ karena harus bebas linear dengan $\mathbf{x}^{(1)}$. Untuk itu, penyelesaian kedua diasumsikan dalam bentuk $\mathbf{x} = \xi t e^{2t}$. Substitusikan $\mathbf{x}$ ke sistem persamaan diferensial, diperoleh

$$2\xi t e^{2t} + \xi e^{2t} - A\xi t e^{2t} = \mathbf{0}.$$

Karena $e^{2t} \neq 0$, maka haruslah

$$2\xi t + \xi - A\xi t = \mathbf{0} \qquad \text{atau} \qquad \begin{bmatrix} t+1 & t \\ -t & -t+1 \end{bmatrix} \xi = \mathbf{0}.$$

Karena

$$\begin{bmatrix} t+1 & t \\ -t & -t+1 \end{bmatrix} \neq 0,$$

maka haruslah

$$\xi = \mathbf{0}.$$

Namun karena kita mencari penyelesaian yang tidak nol, maka diasumsikan

$$\mathbf{x}^{(2)} = \xi t e^{2t} + \eta e^{2t} \tag{7.9}$$

dengan ξ dan η vektor-vektor konstan dimana vektor ξ telah diperoleh sebelumnya dan vektor η akan ditentukan kemudian.
Dengan mensubstitusikan persamaan (7.9) ke sistem persamaan diferensial, diperoleh vektor η yang dapat dipilih

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh penyelesaian

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian umum sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2\Big(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}\Big) \end{aligned}$$

□

7.2 Sistem Persamaan Linear Nonhomogen dengan Koefisien Konstan

Pada penyelesaian sistem persamaan linear nonhomogen, di sini akan diberikan dengan metode **matriks eksponensial**. Adapun langkah-langkah dalam menentukan penyelesaian sistem persamaan diferensial linear nonhomogen menggunakan metode matriks eksponensial:

1. Menentukan penyelesaian homogen ($\mathbf{x_h}$) dengan langkah-langkah berikut:

   (a) Menentukan matriks koefisien A sistem persamaan diferensial linear nonhomogen yang diberikan.

   (b) Mencari nilai karakteristik matriks koefisien A dan menentukan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan nilai karakteristiknya.

   (c) Menentukan matriks nonsingular R dari vektor-vektor karakteristik dan menentukan invers matriks R.

(d) Menentukan matriks diagonal M dengan $M = R^{-1}AR$.

(e) Menentukan matriks eksponensial $e^{At} = Re^{Mt}R^{-1}$.

(f) Menentukan penyelesaian homogen $\mathbf{x_h} = Ce^{At}$, dengan C konstanta sebarang.

2. Menentukan penyelesaian partikular ($\mathbf{x_p}$) dengan melakukan langkah-langkah berikut:

(a) Membentuk matriks eksponensial e^{-At}

(b) Menentukan fungsi $g(\lambda)$

(c) Kalikan $e^{-A\lambda}$ dengan $g(\lambda)$

(d) Hitung $\int_0^t e^{-A\lambda}g(\lambda)d\lambda$

(e) Mencari penyelesaian partikular ($\mathbf{x_p}$) dari sistem persamaan yang diberikan, yakni

$$\mathbf{x_p} = e^{At}\int_0^t e^{-A\lambda}g(\lambda)\ d\lambda.$$

3. Menentukan penyelesaian umum sistem persaman diferensial linear nonhomogen:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_h} + \mathbf{x_p}.$$

Untuk menggunakan langkah-langkah di atas, agar lebih jelas diberikan contoh penyelesaian.

Contoh 7.6. *Tentukan penyelesaian umum sistem persamaan diferensial linear nonhomogen*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 + x_2 - t - 1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 4x_1 + x_2 - 4t - 2 \end{aligned}$$

Penyelesaian:
Sistem persamaan diferensial di atas dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} -t-1 \\ -4t-2 \end{bmatrix}.$$

Nilai-nilai karakteristik diperoleh jika

$$det(A - rI) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = 0,$$

sehingga diperoleh $r_1 = -1$ dan $r_2 = 3$.
Untuk nilai karakteristik $r_1 = -1$ diperoleh vektor karakteristik yang bersesuaian adalah

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sedangkan untuk nilai karakteristik $r_2 = 3$ diperoleh vektor karakteristik yang bersesuaian adalah

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} & \mathbf{x}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Periksa bahwa matriks R merupakan matriks nonsingular. Setelah dipastikan matriks R nonsingular, kemudian menentukan invers matriks R, yakni

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan matriks diagonal M, adalah

$$M = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya adalah menentukan matriks eksponensial

$$\begin{aligned} e^{At} &= Re^{Mt}R^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t} \\ -e^{-t} + e^{3t} & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian homogen

$$\begin{aligned}\mathbf{x_h} &= e^{At}C = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{3t}\\ -e^{-t}+e^{3t} & \frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}\\ &= C_1\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{3t}\\ -e^{-t}+e^{3t}\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{3t}\\ \frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{3t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

dengan C_1 dan C_2 konstanta-konstanta sebarang.

Kemudian untuk mendapatkan penyelesaian partikular sistem persamaan, terlebih dahulu menentukan matriks $e^{-A\lambda}$ yang mana pada langkah sebelumnya telah didapatkan matriks e^{At}, sehingga diperoleh

$$e^{-A\lambda}=e^{A(-\lambda)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{\lambda}+\frac{1}{2}e^{-3\lambda} & -\frac{1}{2}e^{\lambda}+\frac{1}{4}e^{-3\lambda}\\ -e^{\lambda}+e^{-3\lambda} & \frac{1}{2}e^{\lambda}+\frac{1}{2}e^{-3\lambda}\end{bmatrix}$$

Sedangkan untuk matriks $\mathbf{g}(\lambda)$ adalah

$$\mathbf{g}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda-1\\-4\lambda-2\end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}e^{-A\lambda}\mathbf{g}(\lambda) &= \begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{\lambda}+\frac{1}{2}e^{-3\lambda} & -\frac{1}{2}e^{\lambda}+\frac{1}{4}e^{-3\lambda}\\ -e^{\lambda}+e^{-3\lambda} & \frac{1}{2}e^{\lambda}+\frac{1}{2}e^{-3\lambda}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\lambda-1\\-4\lambda-2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{\lambda}\lambda-\frac{3}{2}e^{-3\lambda}\lambda-e^{-3\lambda}\\ -e^{\lambda}\lambda-3e^{-3\lambda}\lambda 2e^{-3\lambda}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Kemudian menghitung

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-A\lambda}\mathbf{g}(\lambda)\,d\lambda &= \int_0^t \begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{\lambda}\lambda-\frac{3}{2}e^{-3\lambda}\lambda-e^{-3\lambda}\\ -e^{\lambda}\lambda-3e^{-3\lambda}\lambda 2e^{-3\lambda}\end{bmatrix}\,d\lambda\\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{2}te^{t}-\frac{1}{2}e^{t}\lambda+\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -te^{t}+e^{t}+te^{-3t}+e^{-3t}-2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian partikular

$$\begin{aligned}\mathbf{x_p} &= e^{At}\int_0^t e^{-A\lambda}\mathbf{g}(\lambda)\,d\lambda\\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-t}+t\\ -e^{-t}-3e^{3t}+2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh penyelesaian umum sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x_h} + \mathbf{x_p} \\ &= C_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ -e^{-t} + e^{3t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t} + t \\ -e^{-t} - 3e^{3t} + 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dengan C_1 dan C_2 konstanta-konstanta sebarang. □

7.3 Rangkuman

Langkah-langkah dalam menentukan penyelesaian sistem persamaan diferensial linear nonhomogen menggunakan metode matriks eksponensial:

1. Menentukan penyelesaian homogen ($\mathbf{x_h}$) dengan langkah-langkah berikut:
   (a) Menentukan matriks koefisien A sistem persamaan diferensial linear nonhomogen yang diberikan.
   (b) Mencari nilai karakteristik matriks koefisien A dan menentukan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan nilai karakteristiknya.
   (c) Menentukan matriks nonsingular R dari vektor-vektor karakteristik dan menentukan invers matriks R.
   (d) Menentukan matriks diagonal M dengan $M = R^{-1}AR$.
   (e) Menentukan matriks eksponensial $e^{At} = Re^{Mt}R^{-1}$.
   (f) Menentukan penyelesaian homogen $\mathbf{x_h} = Ce^{At}$, dengan C konstanta sebarang.
2. Menentukan penyelesaian partikular ($\mathbf{x_p}$) dengan melakukan langkah-langkah berikut:
   (a) Membentuk matriks eksponensial $e^{-A\lambda}$
   (b) Menentukan fungsi $g(\lambda)$
   (c) Kalikan $e^{-A\lambda}$ dengan $g(\lambda)$
   (d) Hitung $\int_0^t e^{-A\lambda} g(\lambda) d\lambda$

(e) Mencari penyelesaian partikular (x_p) dari sistem persamaan yang diberikan, yakni

$$\mathbf{x_p} = e^{At} \int_0^t e^{-A\lambda} g(\lambda)\ d\lambda.$$

3. Menentukan penyelesaian umum sistem persaman diferensial linear nonhomogen:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_h} + \mathbf{x_p}.$$

7.4 Bahan Diskusi

Diskusikan permasalahan berikut:
Bagaimana proses menyelesaikan sistem persamaan diferensial pada subbab 7.2 dengan menggunakan metode koefisien tak tentu.

7.5 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Boyce, W.E., R.C. DiPrima, dan D.B. Meade, 2017, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th edition, John Wiley & Sons

2. Widyawati, D.R.A, dan I. Wahyudi, 2016, Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen dengan Metode Matriks Eksponensial, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Sistem Infomasi*, Vol.1 No.1

3. Simmons, G.F. dan S.G. Krantz, 2007, *Differential Equations Theory, Technique, and Practice.* International Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc.

7.6 Soal-soal Latihan

1. Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu homogen

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Tunjukkan bahwa fungsi-fungsi vektor

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-3t} \qquad \text{dan} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

merupakan penyelesaian sistem persamaan yang diberikan.

2. Selesaikan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

3. Selesaikan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

4. Selesaikan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

5. Selesaikan sistem persamaan diferensial berikut dengan menggunakan metode matriks eksponensial:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

6. Selesaikan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

7. Selesaikan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ \sin t - \cos t \end{bmatrix}$$

Bab 8

Kestabilan Sistem Persamaan Diferensial

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. mampu memahami konsep kesetabilan sistem persamaan diferensial;

2. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;

3. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menjelaskan pengertian titik kesetimbangan stabil dan titik tidak stabil;

2. menjelaskan pengertian stabil asimtotik dan sifat-sifatnya;

3. memeriksa apakah sistem persamaan diferensial stabil atau tidak;

Kestabilan persamaan diferensial diperlukan untuk mengetahui kondisi persamaan. Sebelum bicara kestabilan, pertama kita membahas terlebih dahulu linearisasi persamaan nonlinear.

8.1 Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Sebelum membahas linearisasi sistem persamaan diferensial nonlinear, terlebih dahulu diberikan pengertian titik kesetimbangan.

Definisi 8.1. *Diberikan sistem persamaan diferensial* $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$*. Titik* $\mathbf{x_s} \in \mathbb{R}$ *disebut* **titik kesetimbangan** *atau* **titik kritis** $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ *jika* $f(\mathbf{x_s}) = \mathbf{0}$.

Contoh 8.2. *Tentukan semua titik kesetimbangan sistem persamaan*

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + (x_1)^3 \\ x_2' &= -2x_2 \end{aligned}$$

Penyelesaian:
Kita akan tentukan semua vektor konstan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

penyelesaian dari

$$\begin{aligned} -x_1 + (x_1)^3 &= 0 \\ -2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dari persamaan kedua di atas, diperoleh $x_2 = 0$. Dari persamaan pertama di atas, diperoleh $x_1 = 0$ atau $x_1 = \pm 1$. Oleh karena itu, diperoleh tiga titik kesetimbangan

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

Linearisasi persamaan diferensial diperlukan untuk memudahkan penyelesaian persamaan diferensial nonlinear. Linearisasi merupakan proses mentransformasi sistem persamaan nonlinear ke bentuk linear. Proses ini biasanya dilakukan di sekitar titik kesetimbangan.

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots &= \vdots \qquad \vdots \\ x_n' &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned} \tag{8.1}$$

Misalkan $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})$ adalah titik kesetimbangan sistem (8.1), maka pendekatan linear dari sistem (8.1) di sekitar titik kesetimbangan $\hat{\mathbf{x}}$ diperoleh dengan menggunakan deret Taylor fungsi f di sekitar titik kesetimbangan $\hat{\mathbf{x}}$ adalah

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= f_1(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n}) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_1 - \hat{x}_1) \\ &\quad + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_n - \hat{x}_n) + R_{f_1} \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= f_2(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n}) \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_1 - \hat{x}_1) \\ &\quad + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_n - \hat{x}_n) + R_{f_2} \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= f_n(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n}) \\ &\quad + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_1 - \hat{x}_1) \\ &\quad + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_n - \hat{x}_n) + R_{f_n} \end{aligned}$$

Karena $f_i(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n}) = 0$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ dan nilai-nilai $R_{f_1}, R_{f_2}, \cdots, R_{f_n}$ mendekati nol, maka nilai-nilai $R_{f_1}, R_{f_2}, \cdots, R_{f_n}$ dapat diabaikan. Oleh karena itu, pendekatan linear sistem (8.1) adalah

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_1 - \hat{x}_1) + \cdots + \\
&\quad \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_n - \hat{x}_n) \\
x_2' &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_1 - \hat{x}_1) + \cdots + \\
&\quad \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_n - \hat{x}_n) \\
&\vdots \\
x_n' &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_1 - \hat{x}_1) + \cdots + \\
&\quad \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_n - \hat{x}_n)
\end{aligned}
$$

Untuk memperjelas linearisasi dari sistem persamaan diferensial nonlinear, diberikan contoh berikut.

Contoh 8.3. *Linearisasikan sistem persamaan nonlinear berikut*

$$
\begin{aligned}
x_1' &= -x_1 + (x_1)^3 \\
x_2' &= -2x_2
\end{aligned}
$$

di sekitar titik kesetimbangan $(1, 0)$.

Penyelesaian:
Pertama adalah menentukan

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= -x_1 + (x_1)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1 + 3(x_1)^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \\
f_2(x_1, x_2) &= -2x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, linearisasi dari sistem persamaan diferensial nonlinear yang diberikan di sekitar titik kesetimbangan $(1, 0)$ adalah

$$
\begin{aligned}
x_1' &= (-1 + 3(1)^2)(x_1 - 1) + 0(x_2 - 0) = 2x_1 - 2 \\
x_2' &= 0(x_1 - 1) - 2(x_2 - 0) = -2x_2
\end{aligned}
$$

atau dapat ditulis

$$
\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

8.2 Kestabilan Sistem Persamaan Diferensial

Titik kesetimbangan dikelompokkan menjadi dua jenis yang ditentukan dari bagian real nilai karakteristiknya.

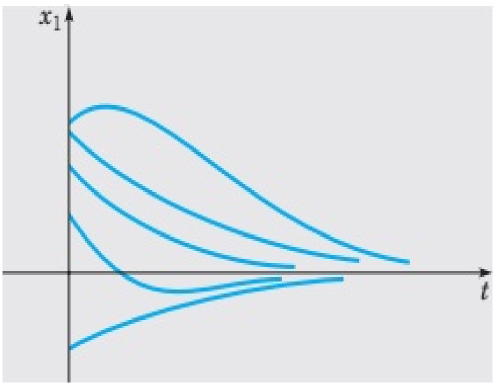
Definisi 8.4. *Titik kesetimbangan* $\mathbf{x_s} \in \mathbb{R}^n$ *disebut* **hiperbolik** *dari sistem* $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ *jika tidak terdapat bagian real nilai karakteristik yang bernilai nol. Jika nilai karakteristik di titik kesetimbangan mempunyai bagian real yang bernilai nol, maka titik kesetimbangan tersebut disebut* **nonhiperbolik**

Diberikan sistem persamaan diferensial linear dengan dua peubah bebas

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

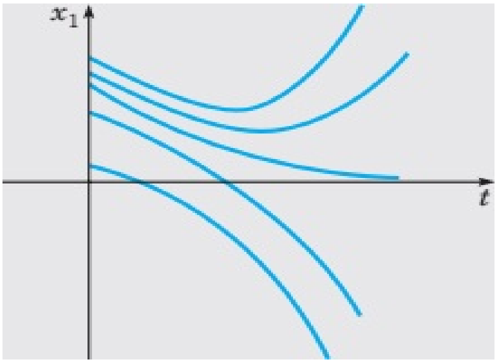
dengan nilai-nilai karakteristik r_1 dan r_2. Akan dikelompokkan jenis-jenis kestabilan persamaan diferensial dalam beberapa kasus yang bergantung pada nilai-nilai karakteristik r_1 dan r_2.

1. Kasus nilai-nilai karakteristik semuanya real dengan tanda yang sama.
   Misalkan r_1 dan r_2 keduanya real negatif dengan $r_1 < r_2 < 0$. Penyelesaian pada bidang fasa diberikan pada Gambar 8.1.



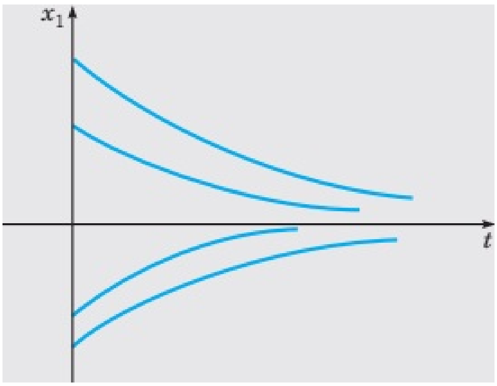
Gambar 8.1: Bidang fasa x_1 vs t kasus nilai-nilai karakteristik bertanda negatif

2. Kasus nilai-nilai karakteristik semuanya real dengan tanda yang berlawanan.
   Misalkan r_1 dan r_2 keduanya real dengan $r_1 < 0 < r_2$. Penyelesaian pada bidang fasa diberikan pada Gambar 8.2.



Gambar 8.2: Bidang fasa x_1 vs t kasus nilai-nilai karakteristik berbeda tanda

3. Kasus nilai-nilai karakteristik semuanya real sama.
   Misalkan r_1 dan r_2 keduanya real dengan $r_1 = r_2$. Penyelesaian pada bidang fasa diberikan pada Gambar 8.3.



Gambar 8.3: Bidang fasa x_1 vs t kasus nilai-nilai karakteristik bertanda sama

Definisi 8.5. *Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu* $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ *dan* $\mathbf{x}(t, x_0)$ *merupakan penyelesaian persamaan* $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ *pada saat* t *dengan nilai awal* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$.

(a). Titik kesetimbangan $\mathbf{x_s}$ *dikatakan* **stabil** *jika untuk setiap* $\epsilon > 0$, *terdapat bilangan* $\delta > 0$ *sedemikian hingga jika* $||\mathbf{x_0} - \mathbf{x_s}|| < \delta$ *maka*

$$||\mathbf{x}(t, x_0) - \mathbf{x_s}|| < \epsilon$$

untuk setiap $t \geq 0$.

(b). Titik kesetimbangan $\mathbf{x_s}$ *dikatakan* **stabil asimtotik** *jika* $\mathbf{x_s}$ *titik kesetimbangan stabil dan terdapat* $\delta' > 0$ *sedemikian hingga jika* $||\mathbf{x_0} - \mathbf{x_s}|| < \delta'$ *maka berlaku*

$$\lim ||\mathbf{x}(t, x_0) - \mathbf{x_s}|| = 0.$$

(c). Titik kestimbangan $\mathbf{x_s}$ *dikatakan* **tidak stabil** *jika* $\mathbf{x_s}$ *tidak memenuhi pada butir (a).*

Untuk sistem persamaan diferensial linear dengan dua peubah bebas

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$$

dengan nilai-nilai karakteristik r_1 dan r_2, maka kestabilan sistem persamaan di atas tergantung pada nilai-nilai karakteristik r_1 dan r_2 yang diberikan pada Tabel 8.1.

Tabel 8.1: Sifat-sifat kestabilan sistem persamaan linear

Nilai karakteristik	Jenis titik kesetimbangan	Kestabilan
$0 < r_1 < r_2$	Improper node	Tidak stabil
$r_1 < r_2 < 0$	Improper node	Stabil asimtotik
$r_1 < 0 < r_2$	Titik pelana	Tidak stabil
$0 < r_1 = r_2$	Proper atau Improper node	Tidak stabil
$r_1 = r_2 < 0$	Proper atau Improper node	Stabil asimtotik
$r_{12} = \lambda \pm i\mu, \lambda > 0$	Titik spiral	Tidak stabil
$r_{12} = \lambda \pm i\mu, \lambda < 0$	Titik spiral	Stabil asimtotik
$r_{12} = \pm i\mu$	Center	Stabil

8.3 Rangkuman

1. Diberikan sistem persamaan diferensial $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$. Titik $\mathbf{x_s} \in \mathbb{R}^n$ disebut **titik kesetimbangan** atau **titik kritis** $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ jika $f(\mathbf{x_s}) = \mathbf{0}$.

2. Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots &= \vdots \qquad \vdots \\ x_n' &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

Pendekatan linear (linearisasi) sistem persamaan di atas di sekitar titik kestimbangan $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})$ adalah

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_1 - \hat{x}_1) + \cdots + \\
&\quad \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_n - \hat{x}_n) \\
x_2' &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_1 - \hat{x}_1) + \cdots + \\
&\quad \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_n - \hat{x}_n) \\
&\vdots \\
x_n' &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_1 - \hat{x}_1) + \cdots + \\
&\quad \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x_1}, \hat{x_2}, \cdots, \hat{x_n})(x_n - \hat{x}_n)
\end{aligned}
$$

3. Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ dan $\mathbf{x}(t, x_0)$ merupakan penyelesaian persamaan $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ pada saat t dengan nilai awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$.

   (a). Titik kesetimbangan $\mathbf{x_s}$ dikatakan **stabil** jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $||\mathbf{x_0} - \mathbf{x_s}|| < \delta$ maka
   $$||\mathbf{x}(t, x_0) - \mathbf{x_s}|| < \epsilon$$
   untuk setiap $t \geq 0$.

   (b). Titik kesetimbangan $\mathbf{x_s}$ dikatakan **stabil asimtotik** jika $\mathbf{x_s}$ titik kesetimbangan stabil dan terdapat $\delta' > 0$ sedemikian hingga jika $||\mathbf{x_0} - \mathbf{x_s}|| < \delta'$ maka berlaku
   $$\lim ||\mathbf{x}(t, x_0) - \mathbf{x_s}|| = 0.$$

   (c). Titik kestimbangan $\mathbf{x_s}$ dikatakan **tidak stabil** jika $\mathbf{x_s}$ tidak memenuhi pada butir (a).

8.4 Bahan Diskusi

Diskusikan tentang kestabilan sistem persamaan diferensial dengan n peubah.

8.5 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Boyce, W.E., R.C. DiPrima, dan D.B. Meade, 2017, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th edition, John Wiley & Sons

2. Howell, K.B, 2019, *Ordinary Differential Equations: An Introduction to the Fundamentals*, CRC Press

3. Simmons, G.F. dan S.G. Krantz, 2007, *Differential Equations Theory, Technique, and Practice.* International Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc.

8.6 Soal-soal Latihan

1. Linearisasikan sistem persamaan

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + (x_2)^2 \\ x_2' &= -x_2 + 2(x_1)^2 \end{aligned}$$

di sekitar titik kesetimbangan $(0, 0)$.

2. Diberikan sistem persamaan

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - (x_1)^2 - x_1x_2 \\ x_2' &= 3x_2 - x_1x_2 - 2(x_2)^2 \end{aligned}$$

(a) Tentukan semua titik kesetimbangan sistem persamaan

(b) Linearisasikan sistem persamaan yang diberikan di sekitar titik-titik kesetimbangan

3. Linearisasikan sistem persamaan

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 - (x_2)^2 - 2x_3 + 2 \\ x_2' &= 2(x_1)^2 - x_2 + x_3 - 1 \\ x_3' &= x_1 - 2x_2 + 1 \end{aligned}$$

di sekitar titik kesetimbangan $(1, 1, 0)$.

4. Diberikan sistem persamaan diferensial linear homogen

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(a) Tentukan nilai-nilai karakateritik dan vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian dengan nilai karakteristiknya

(b) Klasifikasikan jenis titik kesetimbangan $(0, 0)$ dan tentukan apakah stabil, stabil asimtotik, atau tidak stabil.

5. Diberikan sistem persamaan diferensial linear homogen

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(a) Tentukan nilai-nilai karakateristik dan vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian dengan nilai karakteristiknya

(b) Klasifikasikan jenis titik kesetimbangan $(0, 0)$ dan tentukan apakah stabil, stabil asimtotik, atau tidak stabil.

6. Diberikan sistem persamaan diferensial linear homogen

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(a) Tentukan nilai-nilai karakateritik dan vektor-vektor karakteristik yang bersesuaian dengan nilai karakteristiknya

(b) Klasifikasikan jenis titik kesetimbangan $(0, 0)$ dan tentukan apakah stabil, stabil asimtotik, atau tidak stabil.

(c) Tentukan trayektori-trayektorinya di bidang fasa dan juga grafik x_1 vs t.

7. Diberikan sistem persamaan diferensial linear nonhomogen

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan titik kesetimbangan $\mathbf{x} = \mathbf{x^0}$ dan tentukan jenisnya berdasarkan klasifikasi.

8. Diberikan sistem persamaan diferensial linear nonhomogen

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan titik kesetimbangan $\mathbf{x} = \mathbf{x^0}$ dan tentukan jenisnya berdasarkan klasifikasi.

9. Diberikan sistem persamaan diferensial linear nonhomogen

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

   Tentukan titik kesetimbangan $\mathbf{x} = \mathbf{x^0}$ dan tentukan jenisnya berdasarkan klasifikasi.

10. Pandang sistem persamaan diferensial linear

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

   dengan $a, b, c,$ dan d konstanta-konstanta real.
   Diberikan

$$p = a + d, \quad q = ad - bc, \quad \Delta = p^2 - 4q.$$

   Tunjukkan bahwa titik kesetimbangan $(0, 0)$ merupakan titik pelana jika $q < 0$.

Bibliografi

[1] Boyce, W.E., R.C. DiPrima, dan D.B. Meade, 2017, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th edition, John Wiley & Sons

[2] Chen, Wenfeng, 2018, *Differential Operator Method of Finding A Particular Solution to An Ordinary Nonhomogeneous Linear Differential Equation with Constant Coefficients*, New York: SUNY Polytechnic Institute, Utica

[3] Howell, K.B, 2019, *Ordinary Differential Equations: An Introduction to the Fundamentals*, CRC Press

[4] Simmons, G.F. dan S.G. Krantz, 2007, *Differential Equations Theory, Technique, and Practice.* International Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc.

[5] Spiegel, M.R, P. Silaban, dan H. Wospakrik, 1999, *Transformasi Laplace: Teori dan Soal-soal*, UI-Press

.

Glosarium

F

Faktor integrasi suatu fungsi yang apabila dikalikan dengan semua ruas persamaan diferensial mengakibatkan persamaan tersebut menjadi persamaan diferensial eksak.

K

Konstanta integrasi konstanta yang dihasilkan dari hasil mengintegralkan integral tak tentu.

M

Masalah nilai awal persamaan diferensial yang dilengkapi dengan syarat-syarat awal.

O

Orde persamaan diferensial orde tertinggi turunan yang muncul pada persamaan diferensial.

P

Persamaan diferensial persamaan yang memuat turunan (derivatif) satu atau lebih peubah tak bebas (peubah terikat) terhadap satu atau lebih peubah bebas suatu fungsi.

Persamaan diferensial biasa persamaan diferensial yang tergantung hanya pada satu peubah bebas.

Persamaan diferensial parsial persamaan diferensial yang tergantung pada dua atau lebih peubah bebas.

Penyelesaian umum persamaan diferensial koleksi (keluarga) fungsi yang memenuhi persamaan diferensial yang dimaksudkan

Penyelesaian khusus persamaan diferensial fungsi tertentu yang memenuhi persamaan diferensial yang dimaksudkan.

S

Sistem persamaan diferensial kumpulan dari beberapa persamaan diferensial yang saling berkaitan.

Indeks

Faktor integrasi, 25
Fungsi
  Bessel, 120
  potensial, 22, 23
  vektor, 126

Invers
  operator D, 89

Koefisien tak tentu, 53, 126, 127
Kondisi awal, 36

Masalah nilai awal, 36
Matriks eksponensial, 126, 132
Matriks koefisien, 126
Mekanika, 61

Operator D, 82
Orde persamaan diferensial, 4

Peluruhan radioaktif, 38
Penyelesaian
  homogen, 53
  khusus, 8
  partikular, 53
  singular, 8
  umum, 8
Persamaan
  Airy, 3
  Bernoulli, 3
  Bessel, 3
  Chebyshev, 3
  diferensial, 2
  Euler, 3
  Hermite, 3
  karakteristik, 50
  Laplace, 4
  Legendre, 3
  logistik, 31
  Lorenz, 8
  Poisson, 4
Persamaan diferensial, 2
  Bernoulli, 31
  biasa, 2
  dengan koefisien konstan, 6
  dengan koefisien peubah, 6
  eksak, 22
  Euler, 33
  homogen, 7, 48
  linear, 5
  linear dengan koefisien konstan, 48
  linear dengan koefisien peubah, 48
  linear lengkap, 7
  linear nonhomogen, 7
  linear tereduksi, 7
  nonhomogen, 48
  nonlinear, 5
  orde satu, 4, 5
  parsial, 2
  peubah terpisah, 18
  semieksak, 25
  separabel, 18

Pertumbuhan populasi, 40
Polinomial operator D, 84
Prinsip Superposisi, 127

Rangkaian listrik, 63

Sistem persamaan
  diferensial, 7
  diferensial orde satu, 126
  linear homogen, 126
Stabil asimtotik, 145
Syarat awal, 36

Tidak stabil, 145
Titik
  kesetimbangan, 140
  kritis, 140
Titik kesetimbangan
  hiperbolik, 143
  nonhiperbolik, 143
  stabil, 145, 147
  stabil asimtotik, 147
  tidak stabil, 147
Transformasi
  Laplace, 111
  Laplace invers, 117

Variasi parameter, 126

Biografi Penulis

Firdaus Ubaidillah lahir di Lamongan tanggal 6 Juni 1970, menempuh pendidikan dasar di SD Alun-alun II Lamongan dan SD Dinoyo III Malang, pendidikan menengah di MTsN Malang II dan MAN Malang II Batu. Tahun 1989 melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya (UB) Malang lulus tahun 1994. Studi S2 ditempuh di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Institut Teknologi Bandung (ITB) lulus tahun 2004. Pendidikan S3 ditempuh di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta dan memperoleh gelar Doktor bidang matematika tahun 2016.

Dalam kesehariannya, penulis aktif mengajar di prodi S1 dan S2 Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember dengan matakuliah yang diampu adalah Kalkulus, Analisis Real, Fungsi Peubah Kompleks, Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Aljabar Linear, dan lain-lain. Selain buku Persamaan Diferensial Biasa, karya buku lain yang telah ditulis adalah Kalkulus Fungsi Satu Peubah (2018), Analisis Kompleks (2019), dan Kalkulus Integral (2019).

Anggota APPTI No. 002.115.1.05.2020
Anggota IKAPI No. 127/JTI/2018

Jember University Press
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
Telp. 0331-330224, psw. 0319
***E-mail*: upt-penerbitan@unej.ac.id**

9 786237 973232