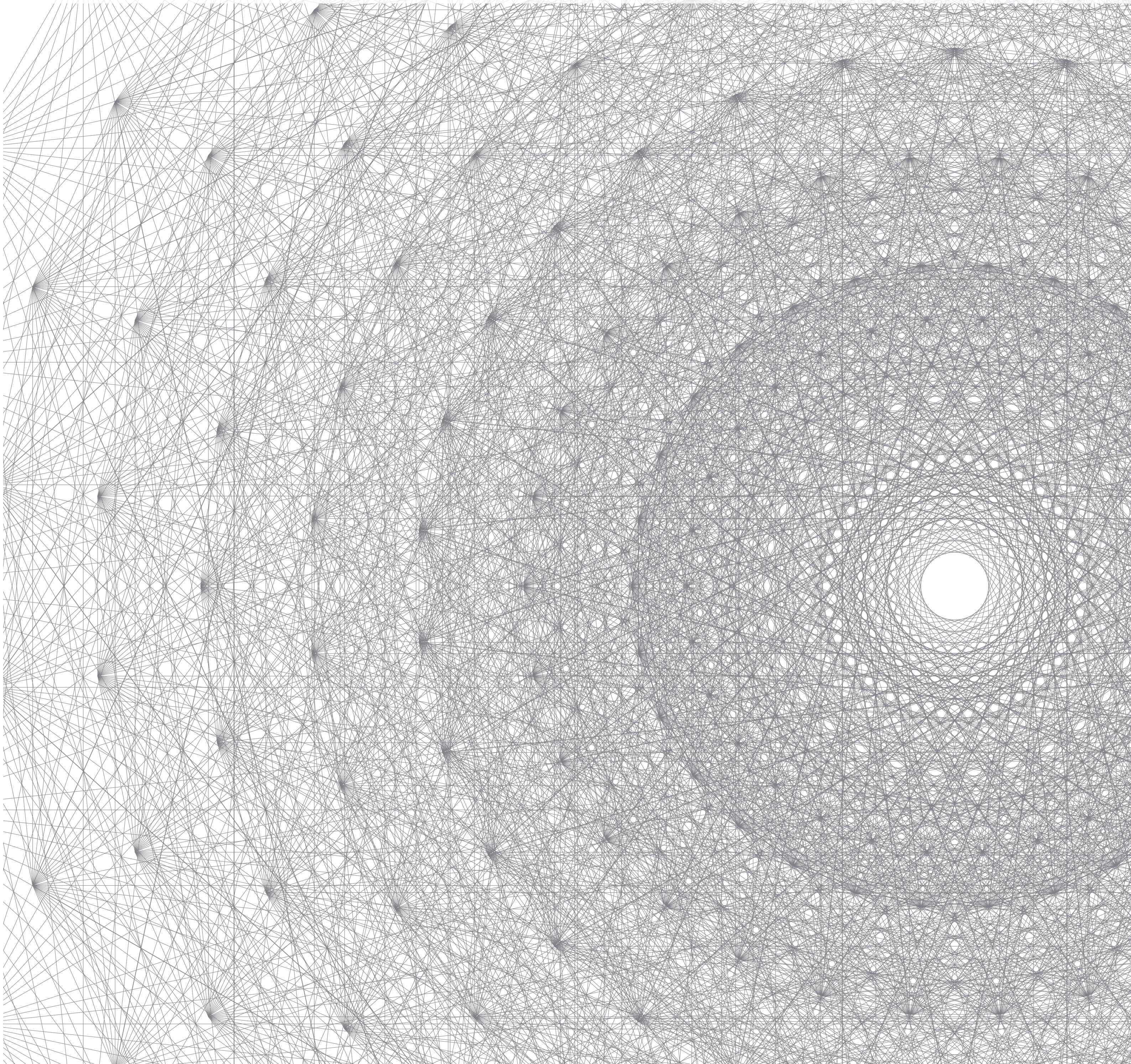
Geometri Analitik

Bidang dan Ruang

Dr. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
Abduh Riski, S.Si., M.Si.



Geometri Analitik Bidang dan Ruang

Dra. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
Abduh Riski, S.Si., M.Si

UPA PENERBITAN
UNIVESITAS JEMBER

2023

Geometri Analitik Bidang dan Ruang

Penulis:
Dra. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si ;
Abduh Riski, S.Si., M.Si

ISBN: 978-623-477-099-5

Cetakan Pertama : November 2023

Penerbit:
UPA Penerbitan Universitas Jember

Redaksi:
Jl. Kalimantan No. 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip. 00319
e-mail: upt-penerbitan@unej.ac.id

Distributor Tunggal:
UNEJ Press
Jl. Kalimantan 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip. 0319
e-mail: upt-penerbitan@unej.ac.id

Kata Pengantar

Puji syukur kami penjatkan kepada Allah SWT, penulis dapat menyelesaikan buku Geometri Analitik. Buku ini merupakan buku yang berisi materi Geometri Analitik untuk mahasiswa. Buku ini bisa digunakan sebagai bahan ajar pada perkuliahan di universitas khususnya pada topik sistem koordinat; paraboloida; garis lurus; persamaan garis dan bidang dalam ruang R^3; lingkaran; bola; elips; jarak antara titik, garis, dan bidang; hiperboloida; parabola dan elipsoida. Selain berisikan materi terkait topik yang sudah disebutkan, terdapat contoh soal pada bagian akhir setiap bab. Buku ajar ini dikembangkan supaya dapat membantu mahasiswa dalam menentukan sistem koordinat di bidang dan di ruang, bidang datar, persamaan lingkaran dan bola, dan irisan kerucut berupa parabola, elips, dan hiperboloida.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih terus memerlukan penyempurnaan supaya menjadi salah satu buku yang lebih berkualitas di masa-masa yang akan datang. Oleh karenanya, penulis sangat berharap adanya kritik dan saran yang konstruktif untuk peningkatan isi buku ini. Semoga buku ini bermanfaat untuk pembaca semua. Aamiin ya Robbal 'Alamiin.

Jember, Maret 2023

Penulis

Prakata

Geometri merupakan cabang matematika yang mempelajari tentang bentuk, ukuran, dan posisi objek di ruang. Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, geometri menjadi sangat penting dalam berbagai bidang seperti fisika, arsitektur, rekayasa, dan lain sebagainya. Oleh karena itu, matakuliah Geometri menjadi salah satu matakuliah yang sangat penting dan menjadi matakuliah wajib pada Jurusan Matematika.

Selanjutnya, sebagai matakuliah lanjutan dari dari Geometri ini adalah matakuliah Geometri Analitik. Geometri Analitik adalah salah satu matakuliah yang juga sangat penting dalam studi matematika dan ilmu teknik. Matakuliah ini membahas tentang hubungan antara geometri dan aljabar, dengan menggunakan koordinat untuk menganalisis dan memodelkan objek geometris di dalam ruang. Buku ajar matakuliah Geometri Analitik ini dirancang khusus untuk memberikan pemahaman yang kuat tentang konsep-konsep dasar geometri analitik dan bagaimana aplikasinya dalam berbagai masalah matematika dan ilmu teknik. Buku ini akan membahas topik-topik seperti sistem koordinat, persamaan garis dan bidang, transformasi geometri, dan berbagai konsep yang terkait. Selain itu, buku ini juga dilengkapi dengan banyak contoh dan latihan soal yang dapat membantu mahasiswa memperdalam pemahaman mereka tentang geometri analitik. Dengan menggunakan buku ajar ini, mahasiswa diharapkan dapat mengembangkan keterampilan dalam menganalisis dan memodelkan objek geometris di dalam ruang dengan lebih baik dan efektif.

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Tabel

Tinjauan Matakuliah

Mata kuliah Geometri Analitik umumnya membahas tentang pengenalan dan penerapan konsep-konsep geometri dalam sistem koordinat. Adapun buku ini menggunakan dua jenis pustaka, yaitu pustaka utama dan pustaka pendukung. Pustaka utama terdiri dari:

- Kusno. 2000. Geometri Rancang Bangun Studi Aljabar Vektor, Garis, Lingkaran. Jember: Universitas Jember.
- Kusno. 2000. Geometri Rancang Bangun Studi Hiperbola, Parabola dan Obyek-obyek Dasar Geometri Ruang. Jember: Universitas Jember.
- Kusno. 2000. Geometri Rancang Bangun Studi Surfas Putar, Transformasi Titik dan Proyeksi. Jember: Universitas Jember.

Sedangkan pustaka pendukung yang digunakan adalah:

- Brown, J.T., Manson.C.W.M. 1957.The Element Of Analytical Geometry Part 1-2(The Straight Line and Circle). London: Macmillan Co.LTD.
- Soemartojo, N. 1988. Analisa Vektor. Jakarta: Erlangga.
- Sukirman. 1994. Geometri Analitik Bidang dan Ruang (Modul 1-9). Jakarta: Universitas Terbuka.

- Suryadi, H.S. 1984. Ilmu Ukur Analitik Ruang. Jakarta: Ghalia.

Berikut adalah tinjauan singkat mengenai isi buku Geometri Analitik:

1. Sistem koordinat: terdiri dari sub-bab sistem koordinat kartesius dan koordinat polar.

2. Garis lurus: terdiri dari sub-bab sudut antara dua garis, persamaan garis, relasi dua garis, jarak titik ke garis, dan jarak dua garis sejajar.

3. Lingkaran: terdiri dari sub-bab persamaan lingkaran, relasi dua lingkaran, dan persamaan dua garis singgung pada lingkaran.

4. Elips: terdiri dari sub-bab definisi elips, unsur-unsur elips, persamaan elips, dan garis singgung elips.

5. Hiperbola: terdiri dari sub-bab definisi hiperbola, persamaan hiperbola, dan persamaan garis singgung hiperbola.

6. Parabola: terdiri dari sub-bab definisi parabola, kedudukan parabola, persamaan parabola, persamaan parabola di puncak $O(0,0)$ dan fokus $F(0,p)$, persamaan parabola berpuncak di $A(a,b)$, serta persamaan garis singgung parabola.

7. Relasi antara titik, garis, bidang: terdiri dari sub-bab pengertian titik, pengertian garis, pengertian bidang, aksioma tentang garis dan bidang, dalil (teorema), relasi di antara titik, garis, bidang, kedudukan garis terhadap bidang, dalil-dalil tentang garis sejajar bidang, serta kedudukan bidang terhadap bidang.

8. Jarak antara titik, garis, bidang: terdiri dari sub-bab jarak antara titik ke titik, jarak antara titik ke garis, jarak antara titik ke bidang, serta sudut garis dan bidang.

9. Persamaan garis dan bidang dalam R^3: terdiri dari sub-bab persamaan bidang dalam ruang R^3, dan persamaan garis ruang R^3.

10. Bola: terdiri dari sub-bab persamaan bola, bentuk umum persamaan bola, persamaan bola melalui 4 titik, bola dan bidang rata, serta bidang singgung bola.

11. Elipsoida: terdiri dari sub-bab definisi elipsoida, jenis elipsoida, persamaan elipsoida, serta persamaan bidang singgung elipsoida.

12. Hiperboloida: terdiri dari sub-bab definisi hiperboloida dan jenis-jenis hiperboloida.

13. Paraboloida: terdiri dari sub-bab paraboloida eliptik, dan paraboloida hiperbolik

Selain itu, buku ini juga dilengkapi dengan contoh-contoh soal dan latihan-latihan untuk membantu pembaca dalam memahami konsep-konsep yang dibahas.

BAB 1

Sistem Koordinat

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)

CPMK-01: Mahasiswa mampu menganalisis berbagai bentuk persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar, serta mampu menunjukkan relasi dan transformasi diantara objek-objek Geometri tersebut, melalui pengembangan pemikiran matematis dan penalaran logis dengan mandiri, bermutu, dan terukur.

1.1 Pendahuluan

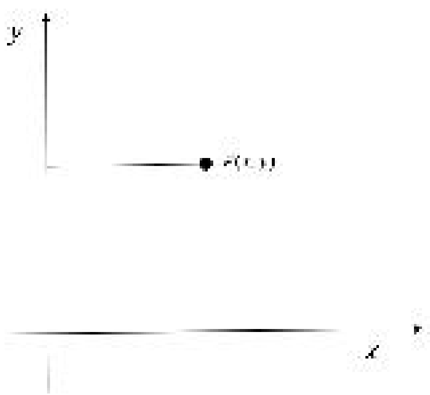
Sistem koordinat merupakan sekumpulan aturan yang menentukan bagaimana koordinat-koordinat yang bersangkutan merepresentasikan titik-titik (Supuwuningsih dan Rusli, 2020). Sistem koordinat yangakan bahas terdiri dari dua macam yakni sistem koordinat kartesius dan sistem koordinat kutub atau polar.

1.2 Sistem Koordinat Kartesius

Sistem koordinat kartesius merupakan titik-titik pada garis (pada ruang dimensi satu) dinyatakan dengan bilangan tunggal. Sedangkan titik-

titik pada sebuah bidang (ruang dimensi dua) dapat dinyatakan dengan pasangan suatu bilangan. Untuk titik-titik di ruang dimensi tiga dapat dinyatakan dengan tripel suatu bilangan (Hendarto, 2019).

Untuk menentukan tiap titik dalam bidang dengan menggunakan dua bilangan yang biasa disebut sumbu x dan sumbu y dari titik tersebut. Koordinat x sering disebut juga dengan absis sedangkan koordinat y sering disebut juga dengan ordinat. Untuk mendefinisikan koordinat diperlukan dua garis berarah yang tegak lurus satu sama lain [sumbu x dan sumbu y], dan panjang unit, yang dibuat tanda-tanda pada kedua sumbu tersebut (Purnomo, 2016).

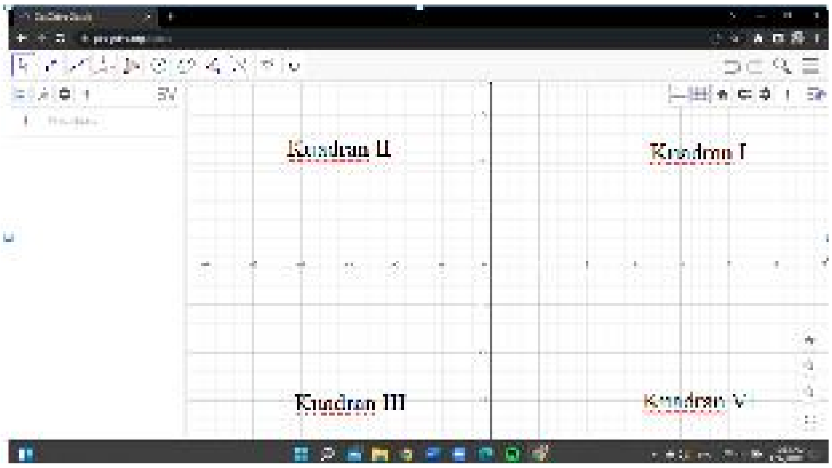


Gambar 1.1: Sistem Koordinat Kartesius.

1.2.1 Kuadran dalam Koordinat Kartesius

Koordinat kartesius memiliki dua sumbu, yakni sumbu x dan sumbu y. kedua sumbu tersebut membagi bidang datar menjadi 4 bagian, menurut konvensi yang berlaku, keempat kuadran diurutkan mulai dari yang kanan atas [kuadran I], melingkar melawan arah jarum jam. Pada kuadran I, kedua koordinat x,y bernilai positif. Pada kuadran II, koordinat x bernilai negatif dan y koordinat bernilai positif. Pada kuadran III, kedua koordinat x,y bernilai negatif, dan pada kuadran IV, koordinat x bernilai positif dan

y negatif. Atau secara umum, keempat kuadrat diurutkan mulai dari yang kanan atas [kuadran I], melingkar melawan arah jarum jam. Pada kuadran I, kedua koordinat bernilai positif. Pada kuadran II, koordinat x bernilai negatif dan koordinat y bernilai positif. Pada kuadran III kedua koordinat bernilai negatif, dan pada kuadran IV, koordinat x bernilai positif dan koordinat y bernilai negatif.



Gambar 1.2: Sistem Kuadran Koordinat Kartesius.

1.2.2 Titik Kolinier

Di dalam koordinat kartesius kita dapat mengenal titik kolinier. Titik kolinier merupakan suatu titik yang berada dalam satu garis lurus. Berikut merupakan contoh ilustrasinya.

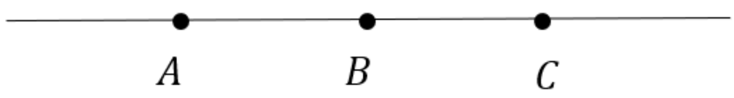
Pada gambar dibawah diperoleh untuk mencari nilai AC adalah

$$AC = AB + BC$$

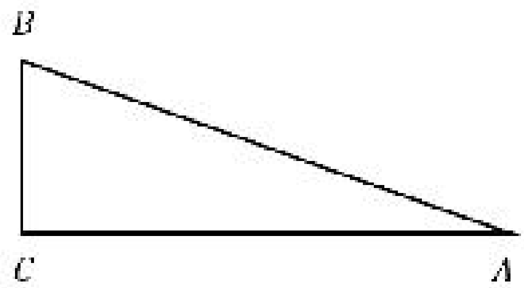
Namun jika,

$$AB + BC < AC$$

(akan membentuk segitiga siku-siku)



Gambar 1.3: Titik-titik Kolinier.

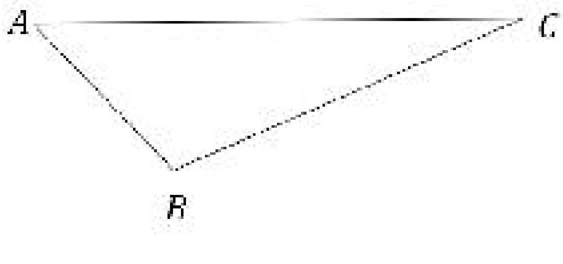


Gambar 1.4: Segitiga Siku-siku.

sedangkan jika,

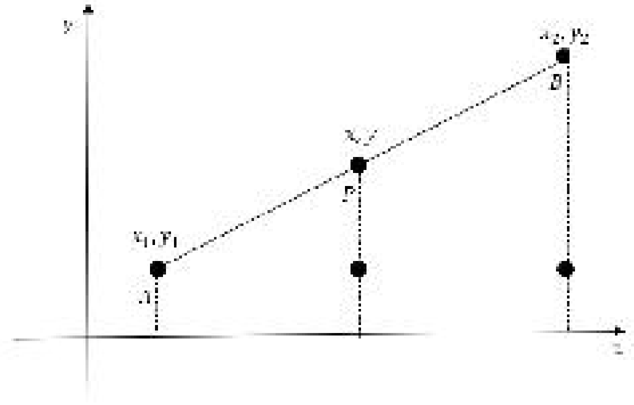
$$AB + BC > AC$$

(akan membentuk segitiga tumpul)



Gambar 1.5: Segitiga Tumpul.

1.2.3 Rasio Panjang Suatu Garis



Gambar 1.6: Rasio Panjang Suatu Garis.

Untuk mencari nilai x dan y dapat kita ilustrasikan dalam grafik seperti gambar diatas. Dari grafik tersebut diperoleh persamaan :

$$R(rasio) = AP$$

$$r = \frac{AP}{AB} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$(x - x_1) = r(x_2 - x_1)$$

$$x = r(x_2 - x_1) + x_1$$

$$x = r + x_1(x_2 - x_1)$$

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$y = y_1 + r(y_2 - y_1)$$

Koordinat jika x nya di tengah adalah

$$x = r(x_2 - x_1) + x_1$$

$$x = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) + x_1$$

$$x = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 + x_1$$

$$x = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_1$$

$$x = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$y = r(y_2 - y_1) + y_1$$

$$y = \frac{1}{2}(y_2 - y_1) + y_1$$

$$y = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1 + x_1$$

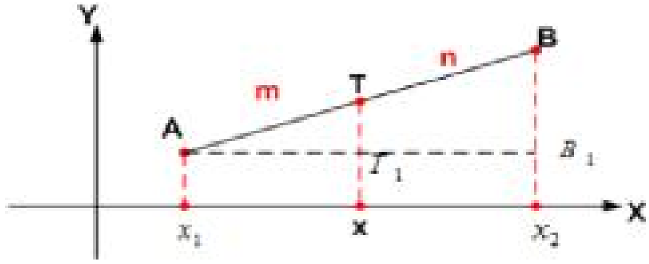
$$y = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_1$$

$$y = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1 + y_1$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

Mencari nilai x dan y menggunakan dengan solusi umum:

Pada Gambar 1.7 didapatkan $AT : TB = m : n$. Pada $\Delta AT1T$ dan $\Delta AB1B$ dikatakan sebangun sehingga mengakibatkan $AT : TB = TT_1 : BB_1$, sehingga:



Gambar 1.7: Rasio Panjang Suatu Garis Secara Umum.

$$\frac{m}{m+n} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$m(y_2-y_1) = (m+n)(y-y_1)$$

$$my_2 - my_1 = my - my_1 + ny - ny_1$$

$$my + ny = my_2 + ny_1$$

$$(m+n)y = my_2 + ny_1$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

Pada $AT : AB = AT_1 : AB_1$, maka:

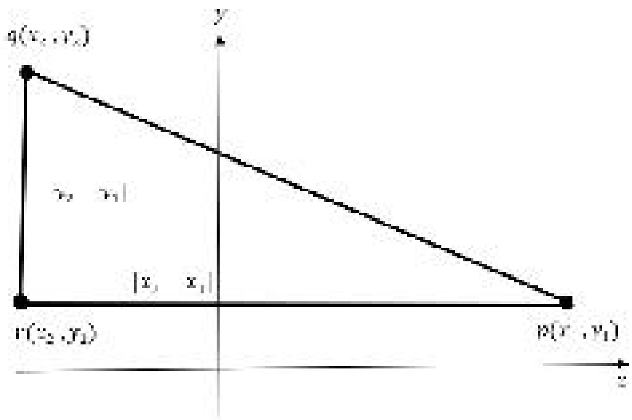
$$T(x,y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

Jika T' berada di tengah-tengah garis AB maka T membagi AB atas perbandingan $m : n = 1 : 1$ sehingga diperoleh koordinat titik T adalah

$$T(x,y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

1.2.4 Mencari Jarak Antara Dua Titik Sembarang

Selanjutnya yang akan kita bahas di sistem koordinat kartesius ini adalah jarak antara dua titik sembarang dengan rumus sederhana kita memisalkan jarak antara dua titik bidang, ini didasarkan dengan rumus phytagoras. Langkahnya adalah ambil sembarang dua titik p dan q masing-masing dengan koordinat(x_1, y_1) dan (x_2, y_2) yang berpotongan dengan r titik dengan koordinat p,q dan r adalah titik-titik sudut yang membentuk sebuah segitiga siku-siku. Panjang pq dan rq masing-masing $|x_2 - x_1|$ dan $|y_2 - y_1|$. Jika teorema phytagoras diterapkan dan diambil akar kuadrat utama dari kedua ruas maka diperoleh ungkapan untuk jarak antara p dan$q$. Berikut merupakan ilustrasi gambar grafik beserta persamaannya



Gambar 1.8: Grafik Jarak Antara Dua Titik.

Dari grafik tersebut kita bisa peroleh jarak p dan q dengan persamaan sebagai berikut.

$$|pq|^2 = |pq|^2 + |qr|^2$$

$$|pq|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$|pq| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

(Purcell dkk, 2003).

1.2.5 Contoh Soal dan Pembahasan Sistem Koordinat Kartesius

1. Tentukan di kuadran manakah titik-titik berikut:

   $A = (-4, 8)$

   $B = (-4, -8)$

   $C = (4, 8)$

   $D = (4, 8)$

   Bangun apakah yang terbentuk jika keempat titik itu dihubungkan?Berapa luas bangun tersebut?

   Penyelesaian:

   Ketika titik tersebut dihubungkan maka akan terbentuk persegi panjang dengan luas $8 \times 16 = 128m^2$

2. Carilah jarak antara $p = (-4, 6)$ dan $q = (6, -8)$

   Diketahui:

   $p = (x_1 = -4, y_1 = 6)$

   $q = (x_2 = 6, y_2 = -8)$

   Ditanya jarak antara (p,q)?

   Penyelesaian:

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \pm\sqrt{(6 - (-4))^2 + ((-8) - 6)^2} \\ &= \pm\sqrt{10^2 + (-14)^2} \\ &= \pm\sqrt{100 + 196} \\ &= 2 \pm \sqrt{74} \end{aligned}$$

1.3 Sistem Koordinat Polar/Kutub

Sistem koordinat polar atau sistem koordinat kutub merupakan suatu sistem koordinat 2 dimensi di mana setiap titik pada bidang ditentukan jarak dari suatu titik yang telah ditetapkan dan suatu sudut dari satu arah yang telah ditetapkan (Sutama, 2020). Titik yang telah ditetapkan (analog dengan titik origin dalam sistem koordinat kartesius) disebut pole atau "kutub", dan ray atau "sinar" dari kutub pada arah yang telah ditetapkan disebut "aksis polar" (polar axiz). Jarak dari suatu kutub disebut radial coordinate atau radius, dan sudutnya disebut angular coordinate, polar angle, azimuth (Frank & Mendelson, 2004).

Koordinat kutub menggunakan sistem referensi perbedaan untuk menunjukkan suatu titik (Rahmat dkk., 2016). Sistem koordinat kutub menggunakan sudut berlawanan arah jarum jam dari arah positif sumbu x dan jarak garis lurus ke titik sebagai koordinat. Koordinat kutub dapat dipresentasikan seperti diatas dalam sistem koordinat kartesius dua dimensi (Nengsih, dan Samosir, 2020).

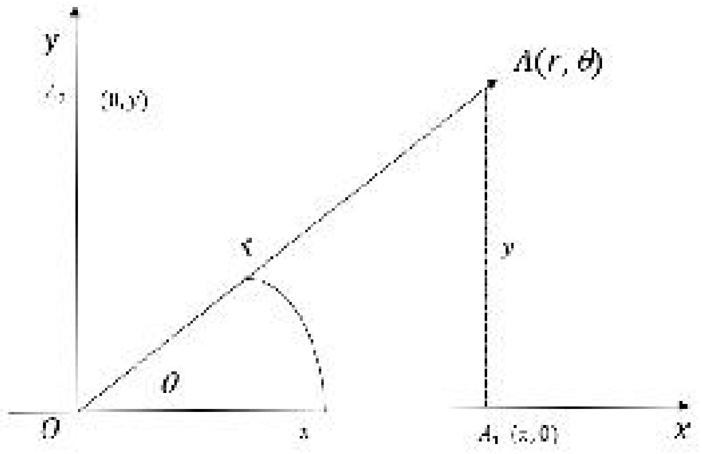
Pada koordinat kutub, letak sebarang titik B pada bidang dinyatakan dengan pasangan bilangan real (r,) dengan r menyatakan jarak titik B ke titik A (disebut kutub) sedangkan adalah sudut antara sinar yang memancar dari titik A melewati titik B dengan sumbu-x positif (disebut sumbu kutub) (Zill & Warren, 2011). Antara sistem kutub dan kartesian mempunyai hubungan seperti berikut.

1. Koordinat Cartesian menggunakan garis bilangan sebagai sumbu, dan dapat digunakan dalam satu, dua atau tiga dimensi.

2. Koordinat kutub menggunakan sudut dan panjang sebagai koordinat.

3. Kedua sistem digunakan untuk mewakili angka imajiner dengan mendefinisikan sumbu imajiner. Koordinat kartesius adalah bilangan real (x,y,z) koordinat dalam sistem kutub tidak selalu bilangan real; yaitu jika sudutnya diberikan dalam derajat, koordinat tidak nyata; jika sudut diberikan dalam koordinat radian adalah bilangan real (Nengsih dan Samosir, 2020).

Adapun gambar grafik hubungan antara koordinat kartesius dengan koordinat kutub beserta persamaannya.



Gambar 1.9: Grafik Sistem Koordinat Kutub.

$$
\begin{aligned}
r^2 &= (OA_1)^2 + (A_1A)^2 \\
&= (x^2 + y^2) \\
r &= \sqrt{(}x^2 + y^2) \\
tan\theta &= \frac{A_1A}{OA_1} = \frac{y}{x} \\
\theta &= tan - 1\frac{y}{x} \\
cos\theta &= \frac{OA_1}{OA} = \frac{x}{r} \\
x &= rcos\theta \\
sin\theta &= \frac{A_1A}{OA} = \frac{y}{r} \\
y &= rsin\theta
\end{aligned}
$$

O melewati titik A dengan sumbu-x positif (disebut sumbu kutub). Koordinat radial sering dilambangkan dengan r, sudut dalam notasi polar biasanya dinyatakan dalam derajat atau radian (Adanan, 2021).

1.3.1 Contoh Soal dan Pembahasan Sistem Koordinat Polar atau Kutub

1. Nyatakan ke dalam sistem koordinat kutub P=(6,-6)! Penyelesaian:

$$r = \pm\sqrt{6^2 + (-6)^2}$$

$$= \pm\sqrt{36 + 36}$$

$$= 3 \pm \sqrt{8}$$

$$= 6 \pm \sqrt{2}$$

$$tan\ x = \frac{y}{x}$$

$$= \frac{-6}{6}$$

$$= -1$$

$$tan\ 45 = 1$$

$$\alpha = 360 - \alpha$$

$$45 = 360 - \alpha$$

$$\alpha = 315$$

$$(r, \alpha) = (6 \pm \sqrt{2}, 315)\ atau\ (6 \pm \sqrt{2}, 135)$$

2. Nyatakan ke dalam sistem koordinat kartesius dari $q(4, 2/3\pi)$ Penyelesaian :

$$x = rcos\alpha$$

$$= 4cos120$$

$$= 4(\frac{-1}{2})$$

$$x = -2$$

$$\begin{aligned} y &= rsinx \\ &= 4sin120 \\ &= 4(\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}) \\ &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Koordinat kartesius

$$(-2, 2 \pm \sqrt{3})$$

1.4 Latihan Soal

1. Misalkan $A(3, 4)$ dan $B(2, -1)$, tentukan jarak antara A ke B?
2. Tentukan koordinat kartesius dari titik-titik berikut dengan koordinat polarnya : a. $(6, \frac{1}{6}\pi)$ b. $(8, \frac{-9}{4}\pi)$
3. Diketahui Koodinat kartesius dengan titik $(3, -3)$, maka tentukan nilai a. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ b. $tan\alpha = \frac{y}{x}$
4. Nyatakan ke dalam koordinat kutub dari titik-titik koordinat kartesius di bawah ini a. $(20, 330°)$ b. $(8, 30°)$
5. Tentukan titik tengah dari ruas garis AB jika koordinat masing-masing titik nya yakni $(2, 6)$ dan $(-4, -2)$?
6. Tentukan koordinat titik $P(x_p, y_p)$ yang membagi segmen dari titik $A(-6, 2)$ ke titik $B(4, 7)$ dengan rasio $AP : PB$ adalah $2 : 3$
7. Tentukan jarak antara titik $A(4, 6)$ dan $B(-1, 1)$
8. Tentukan jarak antara $P1(1, 4)$ dan $P2(-3, 2)$!
9. Buktikan bahwa $(1, 3)$, $(4, 2)$, dan $(-2, -6)$ merupakan titik-titik dari segitiga siku-siku !

10. Tentukan bahwa $(1, 2)$,$(4, 7)$,$(-6, 13)$ dan $(-9, 8)$ adalah titik-titik dari persegi panjang !

11. Tentukan persamaan garis yang melewati $A(4, -1)$ dan sejajar sumbu x !

12. Dimana P (pusatnya) dan berapa jari-jari lingkarannya x^2+$(y - 3)^2$ $= 49$ dan buatlah grafiknya !

13. Ubahlah persamaan y= $10y = 10$ menjadi koordinat kutub !

14. Gambarkan pada koordinat kutub grafik $r = sin\theta$

15. Buktikan bahwa jarak dari titik-titik koordinat polar (r, θ_1) dan (r, θ_2) adalah
$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

1.5 Daftar Pustaka

1. Adanan, S. 2021. *Geometri Analitik Bidang Datar*. Medan: Umsupress.

2. Frank. A. J. R., dan E. Mendelson. 2004. *Kalkulus Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga

3. Hendarto, C. 2019. *Geometri Analitik Bidang*. Malang: Universitas Muhammadiyah Malang.

4. Ningsih, Y. G., dan K. Samosir. 2020. *Matematika Diskrit*. Surabaya: CV. Jakad Media Publishing.

5. Purcell, E.J., D. Varberg., dan S.E. Rigdon, 2003. *Kalkulus JILID 1*. Jakarta : Erlangga.

6. Purnomo, D. 2016. *Trigonometri (Ilmu Ukur Sudut)*. Malang: Gunung Samudera.

7. Rahmat, M. S., Suhito, H. Sutarto, 2016. Hyper-Paraboloida Dalam Ruang Euclid Berdimensi-N. *UNNES Journal of Mathematics*. 5(2):161-169.

8. Supuwiningsih N. N., dan M. Rusli. 2020. *Sistem Informasi Geografis : Konsep Dasar dan Implementasi*. Yogyakarta: ANDI.

9. Sutama, P et al. 2020. *Geometri Analitika Ruang: Ringkasan Materi dan Pemecahan Masalah*. Surakarta: Muhammadiyah University Press

10. Zill, D. G., dan W. Warren. 2011. *C*alculus Transcendentals. Jones and Bartlett Publisher.

BAB 2

Garis Lurus

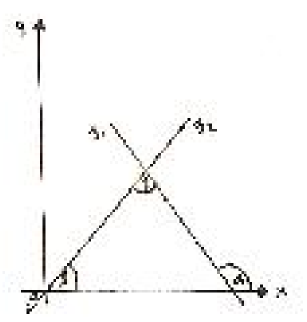
Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-01: Mahasiswa mampu menganalisis berbagai bentuk persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar, serta mampu menunjukkan relasi dan transformasi diantara objek-objek Geometri tersebut, melalui pengembangan pemikiran matematis dan penalaran logis dengan mandiri, bermutu, dan terukur.

2.1 Pendahuluan

Garis lurus merupakan salah satu konsep dasar dalam matematika dan geometri. Garis lurus adalah bentuk garis yang terdiri dari sejumlah titik yang sejajar satu sama lain, dan tidak memiliki sudut atau tikungan. Garis lurus merupakan salah satu elemen dasar dalam pembentukan bentuk geometri yang lebih kompleks, seperti bidang, ruang, dan bangun-bangun(Hw, 2018). Dalam matematika, garis lurus juga digunakan dalam banyak konsep seperti persamaan linear, fungsi linear, dan grafik. Garis lurus juga seringkali digunakan dalam pemodelan matematika untuk menggambarkan hubungan antara dua variabel (Jazuli, 2019).

2.2 Sudut Antara Dua Garis

Sudut antara dua garis merupakan sudut yang terletak pada perpotongan dua garis lurus. Perhatikan pada gambar 2.1.



Gambar 2.1: Sudut diantara dua garis.

Dari gambar 2.1 diperoleh :
gradien garis g_1 adalah $m_1 = \tan \alpha$
gradien garis g_2 adalah $m_2 = \tan \beta$

Berdasarkan aturan segitiga diperoleh:

$$\beta + \gamma + 180 - \alpha = 180$$
$$\beta + \gamma = \alpha$$
$$\gamma = \alpha - \beta$$

Karena g_1 dan g_2 adalah sembarang garis pada bidang maka,

$$\gamma = \mid \alpha - \beta \mid$$

$$tan\gamma = tan \mid \alpha - \beta \mid$$
$$tan\gamma = \frac{\mid tan\alpha - tan\beta \mid}{\mid 1 + tan\alpha \times tan\beta \mid}$$

Telah diketahui sebelumnya bahwa m_1 = tan α dan m_2 = tan β sehingga,

$$tan\gamma = \frac{\mid m_1 - m_2 \mid}{\mid 1 + m_1 \times m_2 \mid}$$

Jadi persamaan tersebut merupakan nilai dari susut yang terbentuk dari perpotongan dua garis yang persamaan garisnya diketahui (gradien m_1 dan m_2 diketahui).

a. Jika Garis Sejajar ($\gamma = 0^o$)
   Maka $s_1 = s_2$
   Uraian :

$$g_1//g_2(\gamma = 0^o)$$
$$tan0^o = \frac{\mid m_1 - m_2 \mid}{\mid 1 + m_1 \times m_2 \mid}$$
$$0 = \frac{\mid m_1 - m_2 \mid}{\mid 1 + m_1 \times m_2 \mid}$$

   Dengan syarat, haruslah (pembilang) $m_1 - m_2 = 0$ atau $m_1 = m_2$ atau $s_1 = s_2$

b. Jika Garis Tegak Lurus ($\gamma = 90^o$)
   Maka $s_1 \times s_2$ = -1
   Uraian :
   g_1 tegak lurus g_2 ($\gamma = 90^o$)

$$tan90^o = \frac{\mid m_1 - m_2 \mid}{\mid 1 + m_1 \times m_2 \mid}$$
$$90^o = \frac{\mid m_1 - m_2 \mid}{\mid 1 + m_1 \times m_2 \mid}$$

   Dengan syarat, haruslah (penyebut) 1 + $m_1 \times m_2$ = 0 atau $m_1 \times m_2$ = -1 atau $s_1 \times s_2$ = -1

Contoh Soal:

Tentukan sudut yang dibentuk dari dua garis $x - 5y + 4 = 0$ dan $3x + y - 1 = 0$!

Penyelesaiaan :

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \times m_2},$$

dengan syarat $m_2 < m_1$.

$$tan\alpha = \frac{1/5 - (-3)}{1 + (-3 \times 1/5)}$$

$$tan\alpha = \frac{16/5}{2/5}$$

$$tan\alpha = 8$$

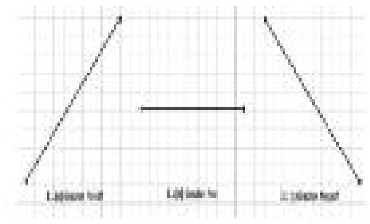
$$\alpha = tan^{-1}(8) = 82,87^o$$

2.3 Persamaan Garis

Kemiringan pada garis lurus atau gradien merupakan nilai yang menunjukkan kemiringan atau kecondongan suatu garis lurus(Sukirman, 2016). umumnya gradien disimbolkan dengan huruf "m". gradien akan menentukan seberapa miring suatu garis pada koordinat kartesius. gradien suatu garis dapat miring ke kanan, miring kekiri, curam ataupun landai, tergantung dari nilai komponen x dan komponen y nya (Rhamayanti dan Lisa, 2022). gradien suatu garis terbagi atas 3 kategori yaitu:

1) Kemiringan Garis Positif

2) Kemiringan Garis Nol
3) Kemiringan Garis Negatif

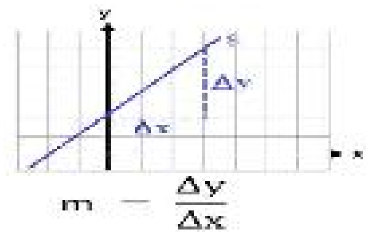


Gambar 2.2: Jenis Kemiringan Garis.

Suatu garis memiliki kemiringan positif apabila posisi suatu garis itu miring ke kanan (jatuh ke arah kanan), suatu kemiringan garis nol apabila garis tersebut sejajar dengan sumbu x dan kemiringan garis negatif apabila garis itu miring kekiri (jatuh ke kiri). Sebuah garis lurus tegak sumbu x atau sejajar sumbu y di definisikan tidak memiliki kemiringan atau gradien (Sutama, 2018).

Kemiringan atau gradien didefinisikan sebagai berikut

$$Kemiringan = \frac{PerubahanTegak}{PerubahanMendatar}$$



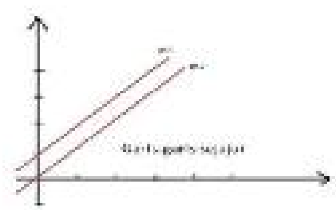
Gambar 2.3: Gradien Grais.

Kemiringan AB dengan A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2)ditentukan oleh tangen sudut BCA yaitu BC dibagi AC, atau kemiringan AB dapat ditulis dengan $\alpha = m = \frac{BC}{AC}$, karena panjang BC $= y_2 - y_1$ dan panjang AC $= x_2 - x_1$, sehingga kemiringan garis AB adalah sebagai berikut.

$$m_ab = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Menurut sifatnya gradien terdiri dari :

a. Dua Garis Sejajar

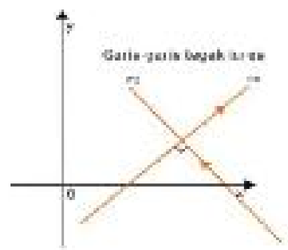


Gambar 2.4: Dua Garis Sejajar.

Dua garis sejajar berarti diantara garis A dan B saling sejajar.dengan begitu, gradien kedua garis tersebut adalah sama.

$$m_A = m_B$$

b. Dua Garis Tegak Lurus



Gambar 2.5: Dua Garis Saling Tegak Lurus.

Ketika dua garis yang saling tegak lurus, maka hasil kali kedua gradiennya adalah -1

$$m_1 \times m_2 = -1$$

atau

$$m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

Persamaan garis lurus memiliki perbandingan yang sama ini diartikan antara selisish koordinat y dan selisih koordinat x bernilai serupa. Maka, persamaan garis lurus adalah perbandingan selisih koordinat y dan selisih koordinat x.

A. Persamaan garis $y = mx + c$ dan persamaan garis $ax + by + c = 0$

Persamaan $y = mx + c$ merupakan persamaan garis dengan kemiringan m dan b merupakan konstanta, dalam hal ini, m sering disebut koefisien arah atau gradien dari garis lurus. Persamaan $ax + by + c = 0$. Sebenarnya konsepnya sama, dimana kamu harus mengubah persamaan ini ke dalam $y = mx + c$.

Contoh Soal:

a) Garis $y = 3x + 2$, koefisiensi x adalah 3. jadi, gradien garis tersebut adalah 3.
b) Hitunglah kemiringan pada persamaan garis 5x+2y-8=7.

Penyelesaian :
Pertama-tama kita ubah dulu persamaan $5x + 2y$ - 8 = 7 ke bentuk $y = mx + c$, sehingga persamaannya menjadi:

$$5x + 2y - 8 = 7$$

$$2y = -5x + 7 + 8$$

$$2y = -5x + 15$$

$$y = \frac{-5x}{2} + \frac{15}{2}$$

Jadi, gradien dari persamaan garis tersebut adalah $\frac{-5}{2}$

B. Persamaan garis dengan kemiringan m dan melalui sebuah titik (x_1,y_1)

Misalkan persamaan garis yang dimaksud adalah $y = mx + c$, untuk menentukan persamaan garis tersebut kita harus mensubtitusi titik(x_1,y_1) ke persamaan $y = mx + c$ untuk memperoleh nilai c, maka :

$$y = mx + c$$
$$y_1 = mx_1 + c$$
$$c = y_1 - mx_1$$

Kemudian subtitusi nilai c ke persamaan $y = mx + c$, maka:

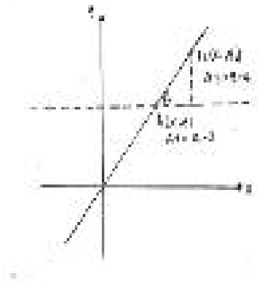
$$y = mx + c$$
$$y = mx + y_1 - mx_1$$
$$y - y_1 = mx - mx_1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Jadi persamaan garis yang melalui sebuah titik (x_1, y_1) dan bergradien m yaitu

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Pembuktian dengan cara lain dapat kita lihat berdasarkan gambar dibawah ini.

Berdasarkan gambar tersebut diperoleh:



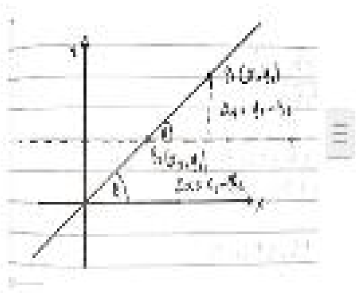
Gambar 2.6: Garis Melalui Sebuah Titik dan Bergradien m.

$$m = tan\theta = \frac{\triangle\ y}{\triangle\ x}$$
$$m = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$
$$m = \frac{-(y_1 - y)}{-(x_1 - x)}$$
$$m = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Contoh Soal:
Persamaan garis melalui titik (5,8) dengan gradien $\frac{3}{6}$ yaitu
Penyelesaian:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 8 = \frac{3}{6}(x - 5)$$
$$y = \frac{3}{6}(x - 5) + 8$$
$$y = \frac{3}{6}x - \frac{11}{2}$$

C. Persamaan melalui Dua Buah Titik Apabila sebuah garis melalui dua buah titik yang tidak diketahui koordinatnya maka persamaan garis tersebut dapat dicari persamaannya. misalkan sebuah garis melalui dua buah titik, yaitu titik $P_1(x_1, y_1)$ dan titik $P_2(x_2, y_2)$.



Gambar 2.7: Garis Melalui Dua Titik.

Berdasarkan gambar 2.7 diperoleh :

$$m = tan\theta = \frac{\triangle\ y}{\triangle\ x}$$
$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$
$$m = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)}$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Kemudian disubtitusikan m kedalam persamaan y - $y_1 = m(x$ - $x_1)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh Soal:

Tentukan persamaan garis yang melalui titik $(2, 3)$ dan $(5, 7)$

Penyelesaian :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$
$$\frac{y - (-3)}{7 - (-3)} = \frac{x - 2}{5 - 2}$$
$$\frac{y + 3}{7 + 3} = \frac{x - 2}{3}$$
$$\frac{y + 3}{10} = \frac{x - 2}{3}$$
$$(y + 3)3 = (x - 2)10$$
$$3y + 9 = 10x - 20$$
$$3y - 10x = -29$$

Jadi persamaan garis lurus yang melalui titik (2,$-$3) dan (5,7) adalah $3y$ - $10x$ =-29

2.4 Relasi Dua Garis

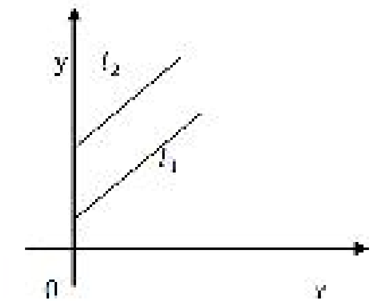
Dua buah garis lurus L_1 dan L_2 satu sama lain memiliki hubungan sejajar, berimpit, saling tegak lurus serta berpotongan (Pasandaran, 2018; Susilo el al., 2019). Dimisalkan persamaan kedua garis lurus tersebut yaitu sebagai berikut:

$$Garis\mathrm{L}_1 : \mathrm{y}{=}m_1\mathrm{x} + n_1$$
$$Garis\mathrm{L}_2 : \mathrm{y}{=}m_2\mathrm{x} + n_2$$

Dimana gradient dari garis lurus L_1 adalah m_1 dan gradien dari garis lurus

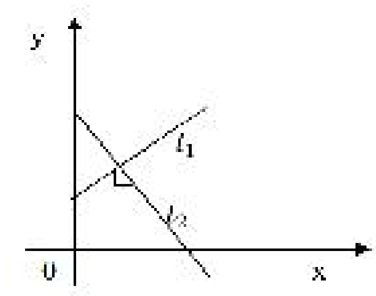
L_2 adalah m_2 serta konstanta dari garis lurus L_1 adalah n_1 dan konstantan garis lurus L_2 adalah n_2, maka :

- Dua garis lurus L_1 dan L_2 dikatakan sejajar apabila $m_1 = m_2$ dan $n_1 \neq n_2$



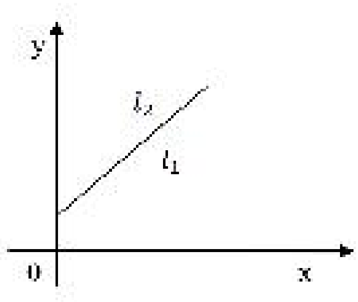
Gambar 2.8: Dua Garis Saling Sejajar.

- Dua garis lurus L_1 dan L_2 dikatakan saling tegak lurus apabila m_1 $\times \mathrm{m}_2 = 1$



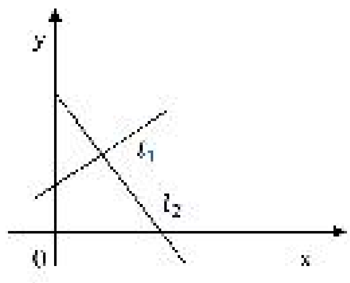
Gambar 2.9: Dua Garis Saling Tegak Lurus.

- Dua garis lurus L_1 dan L_2 dikatakan berimpit apabila $m_1 = m_2$ dan $n_1 = n_2$



Gambar 2.10: Dua Garis Saling Berimpit.

- Dua garis lurus L_1 dan L_2 dikatakan berpotongan apabila $m_1 \neq m_2$



Gambar 2.11: Dua Garis Saling Berpotongan.

Contoh soal :

Tentukan persamaan garis lurus K yang ditarik dari titik P$(3, 4)$ yang sejajar dengan garis I yang memiliki persamaan garis $y = -2x + 1$

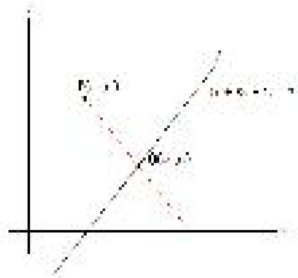
Penyelesaian :
Gradient yang diketahui yaitu $m_1 = -2$. Sesuai dengan syarat yang telah dijelaskan yaitu apabila dua garis sejajar maka $m_1 = m_2$, maka $m_2 = -2$, sehingga :

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - 4 &= -2(x - 3) \\
y &= -2x + 6 + 4 \\
y &= -2x + 10
\end{aligned}
$$

Jadi diperoleh persamaan garis lurus K yang ditarik dari titik P(3.4) adalah $y = -2x + 10$

2.5 Jarak Titik Ke Garis

Terdapat suatu titik yang dimisalkan $P(x_1, y_1)$ dan suatu garis lurus $A_x + B_y + C = 0$ seperti pada gambar 2.12.



Gambar 2.12: Jarak Titik Ke Garis.

Dari titik $P(x_1, y_1)$ diproyeksikan garis tegak lurus dengan garis l sehingga membentuk sebuah titik potong (Panggabean dan Ma'ruf, 2020). Berdasarkan gambar tersebut yang dimaksud jarak titik ke garis adalah jarak dari titik P ke titik potong $Q(x_2, y_2)$ diketahui rumus jarak yaitu:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Persamaan garis l

$$Ax + By + C = 0$$

$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B}$$

maka gradiedn garis l adalah $-\frac{A}{B}$

- Gradien antara dua garis yang saling berpotongan tegak lurus adalah $m_1 \times m_2 = -1$, maka akan dicari m_2 yaitu:

$$m_2 = \frac{B}{A}$$

- Untuk mencari persamaan garis dengan gradien m_2 yaitu: $y - y_1 = m_2(x - x_1)$, karena melalui titik P dan Q maka:

$$y_2 - y_1 = \frac{B}{A}(x_2 - x_1)\ldots\mathbf{(1}$$

- Persamaan garis yang pertama $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ disubtitusikan (x_2, y_2)

$$y_2 = -\frac{A}{B}x_2 - \frac{C}{B}\ldots\mathbf{(2}$$

- Subtitusi persamaan (2 ke persamaan (1

$$\begin{aligned}
-\frac{A}{B}x_2 - \frac{C}{B} - y_1 &= \frac{B}{A}(x_2 - x_1) \\
-\frac{A}{B}x_2 - \frac{C}{B} - y_1 &= \frac{B}{A}x_2 - \frac{B}{A}x_1 \\
\frac{B}{A}x_1 - y_1 - \frac{C}{B} &= \frac{B}{A}x_2 + \frac{A}{B}x_2 \\
\frac{B}{A}x_1 - y_1 - \frac{C}{B} &= x_2(\frac{B}{A} + \frac{A}{B}) \\
x_2 &= \frac{\frac{B}{A}x_1 - y_1 - \frac{C}{B}}{(\frac{B}{A} + \frac{A}{B})}
\end{aligned}$$

(Pembilang dan penyebut dikalikan AB)

$$x_2 = \frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{B^2 + A^2}...(3$$

- Subtitusi persamaan (3 ke persamaan (2 untuk mendapatkan nilai y_2

$$y_2 = -\frac{A}{B}x_2 - \frac{C}{B}$$

$$y_2 = -\frac{A(\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{B^2 + A^2})}{B} - \frac{C}{B}$$

$$y_2 = \frac{-ABx_1 + A^2y_1 + \frac{A^2C}{B}}{B^2 + A^2} - \frac{C}{B} ...(4$$

- Mencari ekspresi $x_2 - x_1$ dengan subtitusi persamaan (3

$$x_2 - x_1 = \frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{B^2 + A^2} - x_1$$

$$x_2 - x_1 = \frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{B^2 + A^2} - \frac{x_1B^2 + x_1A^2}{B^2 + A^2}$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{ABy_1 - AC - x_1A^2}{B^2 + A^2}$$

$$x_2 - x_1 = -A\frac{(Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2)} ...(5$$

- Mencari ekspresi $y_2 - y_1$ dengan subtitusi persamaan (4

$$y_2 - y_1 = \frac{-ABx_1 + A^2y_1 + \frac{A^2C}{B}}{B^2 + A^2} - \frac{C}{B} - y_1$$

$$y_2 - y_1 = \frac{-ABx_1 + A^2y_1 + \frac{A^2C}{B}}{B^2 + A^2} - \frac{-\frac{C}{B}(B^2 + A^2) - y_1(A^2 + B^2)}{B^2 + A^2}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{ABx_1 - BC - y_1B^2}{B^2 + A^2}$$

$$y_2 - y_1 = -B\frac{(ABx_1 + By_1 + C)}{B^2 + A^2}...(6$$

- Mencari rumus jarak (d) dengan persamaan (5 dan (6

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (-A\frac{(Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2})^2 + (-B\frac{ABx_1 + By_1 + C}{B^2 + A^2})^2$$

$$d^2 = A^2\frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} + B^2\frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(B^2 + A^2)^2}$$

$$d^2 = (A^2 + B^2)\frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}$$

$$d^2 = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)}$$

$$d = \sqrt{\frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)}}$$

Jadi rumus untuk mencari jarak sebuah titik ke garis $Ax + By + C = 0$ adalah sebegai berikut:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Contoh Soal:

a) Cari jarak titik (0, 0) ke garis $y = -x + 8$
Penyelesaian:
Persamaan garis $y = -x + 8$
$y + x\breve{}8 = 0$
Jarak titik ke garis:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|1(0) + 1(0) + (-8)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$d = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

b) Carilah jarak titik (2, 1) ke garis $3x + 2y\breve{}10 = 0$
Penyelesaian:
Persamaan garis: $3x + 2y\breve{}10 = 0$
Titik (2, 1) $= (x_0, y_0)$
Jarak titik ke garis:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|3(2) + 2(1) + (-10)|)}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$$

$$d = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

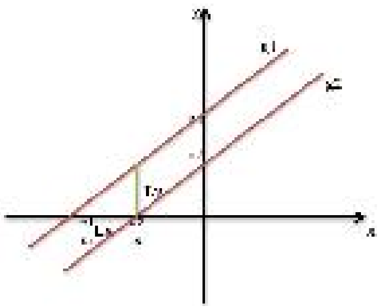
$$d = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

2.6 Jarak Dua Garis Sejajar

Dua buah garis sejajar adalah garis yang tidak akan pernah berpotongan walaupun dipanjangkan sampai tidak terhingga. Garis yang sejajar selalu mempunyai jarak yang sama disetiap titiknya. Jika gradien pada kedua garis tidak sama maka garis tersebut akan berpotongan disuatu titik, namun ketika kedua garis tersebut memiliki gradien yang sama maka kedua garis tersebut tidak akan pernah berpotongan atau saling sejajar satu sama lain (Yunita dan Hamdunah, 2017).

Terdapat garis g_1 mempunyai persamaan $y = mx + n_1$ dan garis g_2 mempunyai persamaan $y = mx + n_2$, gradien dari g_1 dan g_2 adalah sama yaitu m, seperti gambar dibawah ini.

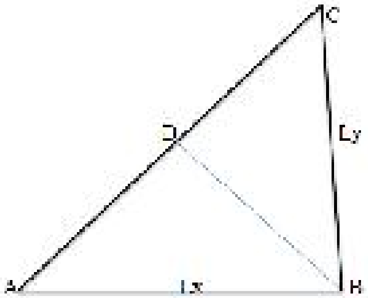
Selanjutnya, ditentukan titik potong pada sumbu x dan y. Panjang garis yang menghubungkan titik potong pada sumbu x adalah L_x, nilainya adalah $\frac{(n_1-n_2)}{m}$. Panjang garis yang menghubungkan titik potong pada sumbu y adalah L_y, nilainya adalah $(n_1 \breve{\ } n_2)$. Selanjutnya, digeser L_y menuju titik $\frac{-n_2}{m}$, L_x, L_y dan g_1 membentuk segitiga siku-siku seperti gambar dibawah ini.



Gambar 2.13: Jarak Dua Garis Sejajar.

Dari segitiga ABC yang terbentuk dapat mencari jarak terpendek antara g_1 dan g_2. Jarak terpendek antara g_1 dan g_2 adalah garis yang tegak lurus terhadap g_1 yang melalui titik B. garis ini akan memotong garis AC di titik D yang disebut Lmin. Menggunakan perbandingan trigonometri

$\sin BAD = \sin BAC$



Gambar 2.14: Perbandingan Trigonometri.

Pembuktian Rumus

$$|\frac{DB}{AB}| = |\frac{BC}{AC}|$$

$$\frac{L_{min}}{L_x} = \frac{L_y}{\sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2}}$$

$$L_{min} = \frac{L_x L_y}{\sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2}}$$

$$L_{min} = \frac{(\frac{n_1 - n_2}{m})(n_1 - n_2)}{\sqrt{(\frac{n_1 - n_2}{m})^2 + (n_1 - n_2)^2}}$$

$$L_{min} = \frac{(n_1 - n_2)}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Karena nilai jarak selalu positif dan kita tidak tahu nilai $n_1 > n_2$ atau sebaliknya, maka digunakan harga mutlak. Sehingga

$$L_{min} = \frac{|(n_1 - n_2)|}{|\sqrt{1 + m^2}|}$$

Contoh Soal:

11. 1. Tentukan jarak garis $3x + 4y5 = 0$ ke garis $3x + 4y + 2 = 0$

Penyelesaian:

Persamaan garis pertama $3x + 4y - 5 = 0$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

Persamaan garis kedua $3x + 4y + 2 = 0$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{2}{4}$$

$$m_1 = m_2 = m = \frac{3}{4}$$

$$n_1 = -\frac{5}{4}$$

$$n_2 = -\frac{2}{4}$$

Selanjutnya untuk mencari L_{min} yaitu:

$$L_{min} = \frac{|(n_1 - n_2)|}{|\sqrt{1 + m^2}|}$$

$$L_{min} = \frac{|-\frac{5}{4} - \frac{2}{4}|}{|\sqrt{1 + (\frac{3}{4})^2}|}$$

$$L_{min} = \frac{|-\frac{7}{4}|}{|\frac{4}{5}|}$$

$$L_{min} = \frac{7}{5}$$

2.7 Latihan Soal

1. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (3, 4) dan (3, 6)!
2. Tentukan persamaan garis yang melalui titik S (3,6) dan tegak lurus garis $l = x + y - 8 = 0$!
3. Sebuah garis teletak pada bidang datar dengan persamaan l: $4x + 3y = 15$. Jika titik P (5, 5) terletak pada bidang yang sama dengan garis l maka jarak titik P ke garis l adalah ... satuan.
4. Jarak antara dua garis sejajar $3x+4y5 = 0$ dan $3x+4y12 = 0$ adalah $\ldots$.
5. Tentukan sudut yang dibentuk dari dua garis $y = 5x + 3 = 0$ dan $y = -3x + 2$!
6. Cari jarak titik (0, 0) ke garis $y = 2x + 10$
7. tentukan garadien dan koefisien dari persamaan Garis $y = 10x + 2$
8. Carilah jarak titik (5,2) ke garis $26x + 4y\breve{\ }12 = 0$
9. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (2,-3) dan tegak lurus garis Y= $4x - 8$.
10. Tentukan garis yang melalui titik (2,1) dan memotong garis-garis $2x - 3y + 5 = 0$ dan $x = y$.
11. Tentukan luas segitiga yang dibatasi oleh garis $5x - 7y + 3 = 0$ dan kedua sumbu koordinat.
12. Tentukan luas segitiga yang dibatasi oleh garis $5x - 7y + 3 = 0$; $x + 2y - 5 = 0$; dan garis $-2x - 3y = 10$.
13. Tentukan persamaan garis yang melalui garis-garis $x = 0$ dan $y = 0$ serta tegak lurus garis $y = 5x - 3$.

14. Tentukan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak 3 dari garis $2x - 3y + 5 = 0$.

15. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (2,3) dan tegak lurus terhadap garis [x,y] = [4,7] + t[3,5].

2.8 Daftar Pustaka

1. Hw, S. 2018. Geometri Analitik Bidang Datar. Surakarta: Muhammadiyah University press.

2. Jazuli, A. 2019. Geometri analitik Bidang. Purwokerto. UM Purwokerto Press.

3. Rhamayanti, Y. dan D. Lisa. 2022. Buku Ajar Mata Kuliah Geometri Analitik Bidang. Jawa Barat. Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia.

4. Sukirman. 2016. Geometri Analit Bidang dan Ruang. Banten: Penerbit Universitas Terbuka.

5. Susilo. A., D dan S. Hariyani. 2019. Geometri Analitika (Datar dan Ruang). Malang: Kanjuruhan Press.

6. Sutama, S. Narimo, dan M. Novitasari. Geometri Analitika Ruang.

7. Pasandaran, R.F. dan Ma'rufi. 2018. Geometri Analitik Bidang dan Ruang. Sulawesi Selatan. Global Research and Consulting Institute (Global- RCI).

8. Panggabean, E. M. 2020. Geometri Analitik Ruang. Penerbit Pustaka Pemuda

9. Yunita, A. dan Hamdunah. 2017. Geometri Analitik. Padang: Rumahkayu Pustaka Utama.

BAB 3

Lingkaran

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-01: Mahasiswa mampu menganalisis berbagai bentuk persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar, serta mampu menunjukkan relasi dan transformasi diantara objek-objek Geometri tersebut, melalui pengembangan pemikiran matematis dan penalaran logis dengan mandiri, bermutu, dan terukur.

3.1 Pendahuluan

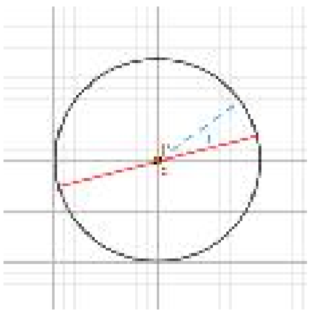
Lingkaran adalah salah satu objek geometri yang paling penting dan sering digunakan dalam matematika. Secara sederhana, lingkaran dapat didefinisikan sebagai himpunan titik-titik dalam bidang yang memiliki jarak yang sama dari titik pusatnya. Lingkaran memiliki banyak sifat dan karakteristik yang menarik, seperti keliling, luas, jari-jari, dan diameter. Selain itu, lingkaran juga memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari, seperti dalam perhitungan bangun datar dan bangun ruang, fisika, teknik, dan banyak lagi.

Dalam pembelajaran tentang lingkaran, kita akan mempelajari berbagai konsep, seperti jari-jari, diameter, keliling, dan luas lingkaran. Kita juga akan belajar tentang bagaimana menentukan persamaan lingkaran dengan menggunakan koordinat pada bidang kartesian. Dalam mempelajari konsep lingkaran, kita akan mengembangkan kemampuan kita dalam melakukan perhitungan matematika yang lebih kompleks, dan memahami hubungan antara lingkaran dengan objek-objek geometri lainnya. Dengan demikian, pemahaman tentang konsep lingkaran akan sangat berguna dalam kehidupan sehari-hari, terutama bagi mereka yang bekerja di bidang teknik, fisika, atau matematika.

3.2 Persamaan Lingkaran

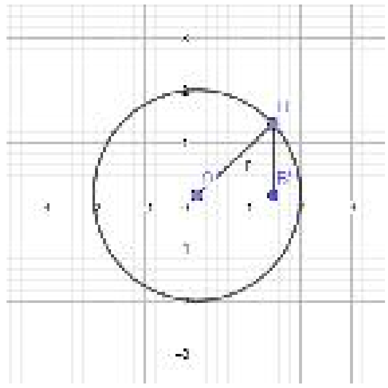
3.2.1 Definisi Lingkaran

Lingkaran merupakan himpunan titik-titik pada bidang yang memiliki jarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tertentu tersebut biasanya disebut pusat lingkaran (P). Jarak titik terhadap pusat lingkaran disebut jari-jari (r) (Berman & Etingof, 2021). Diameter (d) merupakan suatu garis lurus yang menghubungkan antara dua titik pada lingkaran melalui titik pusat (Santos & Lima, 2021). Figure 1.1 menunjukkan suatu lingkaran dengan pusat lingkaran P yang memiliki jari-jari r dan diameter d.



Gambar 3.1: Lingkaran.

3.2.2 Persamaan Lingkaran dengan Pusat O (0,0) dan Jari-jari r



Gambar 3.2: Lingkaran dengan Pusat $O(0,0)$.

Berdasarkan Gambar 3.2 , titik $O(0,0)$ adalah titik pusat lingkaran L yang berjari-jari r. Misalkan diambil sebarang titik pada lingkaran yaitu titik $B(x,y)$. Apabila titik B' adalah proyeksi dari titik B terhadap sumbu x, maka akan terbentuk segitiga siku-siku OBB' (Corel, 2020). Dengan menggunakan dalil Pythagoras pada segitiga OBB', maka:

$$\sqrt{(OB')^2 + (BB')^2} = OB$$

Jarak titik O dan titik B merupakan jari-jari lingkaran, sehinga dapat ditulis:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di titik (0,0) dan berjari-jari r adalah

$$x^2 + y^2 = r^2$$

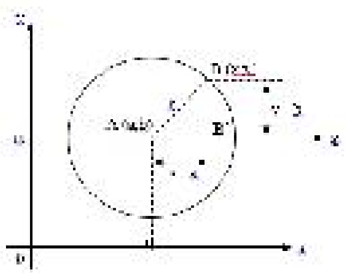
Contoh 3.2.2

Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat O (0,0) dan berjari-jari 5.

Penyelesaian:
Karena titik pusat lingkaran adalah (0,0) maka persamaan lingkarannya adalah

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = 5^2$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

3.2.3 Persamaan Lingkaran yang Berpusat di A(a,b) dan Berjari-jari R



Gambar 3.3: Lingkaran yang Berpusat di A(a,b) dan Berjari-Jari r.

Berdasarkan ilustrasi yang didapat pada Figure 3.3 menampakkan persamaan lingkaran yang berpusat pada suatu titik koordinat dengan jari-jari tertentu. Pada ilustrasi dimisalkan titik $B(x, y)$ merupakan sembarang titik yang terletak pada keliling lingkaran. Terdapat garis g yang melalui pusat lingkaran $A(a, b)$ dan sejajar dengan sumbu x. Proyeksi B pada garis g adalah B' sehingga ABB' merupakan segitiga siku-siku di B' dengan nilai $AB' = x - a, BB' = y - b$, dan $AB = r$. Menggunakan rumus Phytagoras pada ABB', maka diperoleh (Simmons, 2011):

$$AB = \sqrt{(AB')^2 + (BB')^2}$$
$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Jadi persamaan lingkaran dengan pusat $A(x, y)$ dan berjari-jari r adalah:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Contoh 3.2.3

a) Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (6,3) dan melalui titik (2,6)

Penyelesaian:
Persamaan lingkaran yang berpusat pada titik (6,3) dan berjari-jari r adalah

$$(x-6)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

Lingkaran tersebut melalui titik (2,6), maka:

$$(2-6)^2 + (6-3)^2 = r^2$$
$$(-4)^2 + (3)^2 = r^2$$
$$(16+9) = r^2$$
$$25 = r^2$$
$$5 = r$$

Maka diperoleh persamaan lingkaran yang berpusat di (6,3) dan melalui titik (2,6) adalah

$$(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$$

b) Berdasarkan persamaan lingkaran $(x-3)^2+(y+1)^2 = 36$ maka tentukan pusat dan jari-jari lingkaran

Penyelesaian: Persamaan lingkaran yang berpusat pada titik (a,b) dan berjari-jari r adalah

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Berdasarkan persamaan lingkaran $(x-3)^2+(y+1)^2 = 36$, maka didapatkan:

$$(x-a)^2 + (y-(-b)^2 = r^2$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 36$$

$a = 3, b = -1, r = 6$

Sehingga diperoleh dari persamaan lingkaran $(x-3)^2+(y+1)^2 = 36$ memiliki pusat lingkaran yaitu pada (3,-1) dan memiliki jari-jari 6

3.2.4 Bentuk Umum Persamaan Lingkaran

Bentuk umum persamaan lingkaran dinyatakan dengan:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

untuk A, B, C anggota bilangan Real. Persamaan tersebut diperoleh dari:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2bx + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$atau$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

dengan $A = -2a, B = -2b, C = a^2+b^2-r^2$ (Kansab & Qablan, 2021).

Bentuk umum persamaan lingkaran tersebut dapat digunakan untuk menentukan titik pusat lingkaran dan jari-jari lingkaran, yaitu sebagai berikut:

$$x^2 + Ax + (\frac{A}{2})^2 + y^2 + By + (\frac{B}{2})^2 = -C + (\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = -C + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$$

$$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa titik pusat lingkaran adalah

$$(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2})$$

dan jari-jari lingkaran adalah

$$\sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}}$$

Contoh 3.2.2

Tentukan persamaan lingkaran bentuk umum yang berjari-jari 5 dan pusat di titik (-7,4).
Penyelesaian:

- Cara 1:
  Menggunakan persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ untuk memperoleh bentuk baku dari lingkaran yang berpusat (-7,4)

dan berjari-jari 5.

$$
\begin{aligned}
(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\
(x+7)^2 + (y-4)^2 &= 5^2 \\
x^2 + 14x + 49 + y^2 - 8y + 16 &= 25 \\
x^2 + y^2 + 14x - 8y + 40 &= 0
\end{aligned}
$$

- Cara 2:
  Mencari koefisien pada persamaan umum berdasarkan hubungan pada bentuk umum persamaan lingkaran. Karena diketahui titik pusat lingkaran $(-7, 4)$ dan jari-jari 5, berarti $a = -7, b = 4$, dan $r = 5$, sehingga:

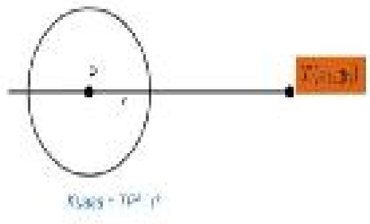
  $A = -2a = -2(-7) = 14$
  $B = -2b = -2(4) = -8$
  $C = a^2 + b^2 - r^2 = 49 + 16 - 25 = 40$

  Jadi persamaan lingkaran bentuk umum yang berjari-jari 5 dan pusat di titik (-7,4) adalah $x^2 + y^2 + 14x - 8y + 40 = 0$

3.3 Relasi Dua Lingkaran

3.3.1 Kuasa Titik

Misalkan ada titik $T(x_1, y_1)$ di luar lingkaran, dan ada lingkaran L yang berpusat di titik P dan jari-jari r seperti gambar berikut :



Gambar 3.4: Kuasa Titik Lingkaran.

Kuasa titik $T(x_1, y_1$ terhadap lingkaran L didefinisikan $TP^2 - r^2$. Menentukan Nilai kuasa suatu titik yang dilambangkan dengan K. Misalkan $L = x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan pusat $(-\frac{A}{2}) - \frac{B}{2})$ dan kuadrat jari-jarinya $r^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$ maka kuasa K titik $T(x_1, y_1$ terhadap lingkaran L adalah:

$$K = TP^2 - r^2 = (X_1 + \frac{1}{2}A)^2 + (y_1 + \frac{1}{2}B)^2 - r^2$$

atau

$$K = x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By1 + C$$

Perhatikan bahwa kuasa titik $T(x_1, y_1$ terhadap lingkaran $L = x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ diperoleh dengan cara menggantikan x dan y pada persamaan lingkaran itu dengan x_1 dan y_1
Setelah diperoleh kuasa titik terhadap lingkaran, maka nilai kuasanya dapat digunakan untuk menentukan letak titik tersebut terhadap lingkaran, yaitu (Stein & Barcellas, 2017):

1. Jika $K > 0$ maka titik ada diluar lingkaran
2. Jika $K = 0$ maka titik berada pada lingkaran
3. Jika $K < 0$ maka titik ada didalam lingkaran

Contoh 3.3.1

Tentukan nilai kuasa titik $T(1,2)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$ Penyelesaian : Substitusikan titik $T(1,2)$ ke persamaan diatas

$$K = 1^2 + 2^2 + 2 * 1 - 4 * 2 + 6 = 0$$

$$1 + 4 + 2 - 8 + 6 = 0$$

$$5 > 0$$

Karena nilai kuasa titik terhadap lingkaran positif ($K > 0$) maka titik $T(1,2)$ terletak diluar

3.3.2 Titik Kuasa dan Garis Kuasa

Garis kuasa lingkaran adalah Himpunan semua titik kuasa (memiliki kuasa yang sama terhadap dua lingkaran) akan membentuk suatu garis yang dinamakan dengan garis kuasa (Ochel, 2020). **Titik kuasa lingkaran** adalah titik yang terletak pada garis kuasa dan mempunyai kuasa yang sama terhadap kedua lingkaran Persamaan Garis Kuasa :

$$L_1 = x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$L_2 = x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

atau

$$L_1 - L_2 = 0$$

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0$$

Contoh 3.3.2

Tentukan garis kuasa dan titik kuasa lingkaran $x^2+y^2+2x-2y-6 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$
Penyelesaian : - Menentukan garis kuasa

$$L_1 - L_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 - (x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36) = 0)$$
$$14x + 2y - 42 = 0$$
$$7x + y = 21(GarisKuasa)$$

- Menentukan titik kuasanya pada sumbu x dan kuasanya pada kedua lingkaran Dengan substitusi $y = 0$ ke garis kuasa, sehingga :

$$7x - 0 = 21$$

$$x = 3$$

Maka titik kuasa pada sumbu x adalah $(3, 0)$ - Menentukan kuasa titik $(3, 0)$ terhadap lingkaran yaitu dengan substitusikan kesalah satu persamaan lingkaran

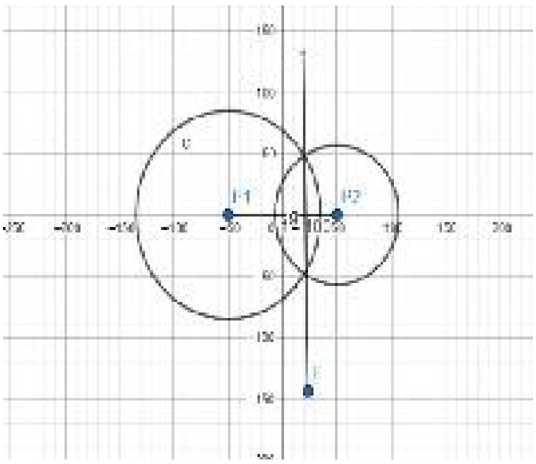
$$L_1 = 3^2 + 0^2 + (2 * 3) - (2 * 0) - 6 = 9$$

$$L_2 = 3^2 + 0^2 - (12 * 3) - (4 * 0) + 36 = 9$$

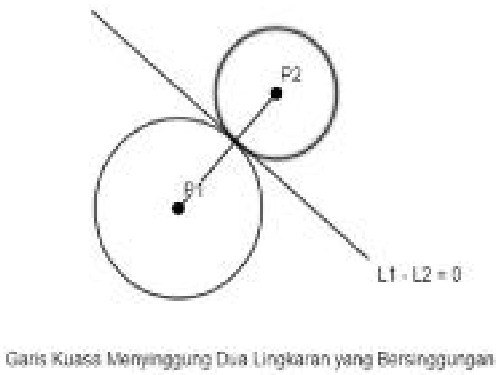
Maka kuasa titik (3.0) adalah 9

3.3.3 Kedudukan Dua Lingkaran

1. Berpotongan di Dua Titik
   yaitu Garis kuasa berpotongan di dua titik pada dua lingkaran yang berpotongan. Pada lingkaran yang berpotongan di dua titik Jika lingkaran berjari-jari maka untuk keadaan ini berlaku $|P_1P_2| < |r_1 + r_2|$ (Stewart, 2015).
2. Bersinggungan Di Luar
   yaitu Garis kuasa menyinggung dua lingkaran yang bersinggungan. pada lingkaran dan yang bersinggungan di luar, untuk keadaan ini berlaku $|P_1P_2| = |r_1 + r_2|$



Gambar 3.5: Lingkaran yang Berpotongan di Dua Titik.



Gambar 3.6: Dua Lingkaran yang Bersinggungan di Luar.

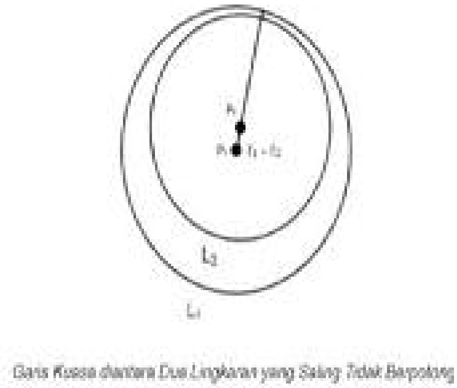
3. Bersinggungan Di Dalam
   yaitu Garis Kuasa diantara Dua Lingkaran yang Tidak Berpotongan. Pada diperlihatkan lingkaran dan yang tidak berpotongan di luar. Untuk keadaan ini berlaku $|P_1P_2| > |r_1 + r_2|$

Gambar 3.7: Dua Lingkaran yang Bersinggungan di Dalam.

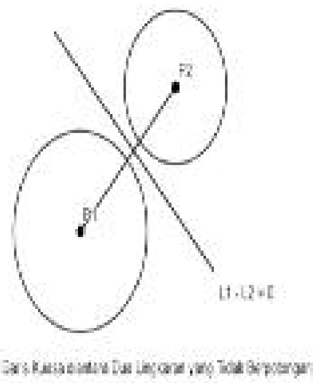
4. Tidak Berpotongan Di Dalam yaitu Garis Kuasa diantara Dua Lingkaran yang Saling Tidak Berpotongan. Pada lingkaran dan yang tidak berpotongan di dalam. Untuk keadaan ini berlaku $|P_1P_2| < |r_1 + r_2|$
5. Tidak Berpotongan Di Luar
   yaitu Garis Kuasa diantara Dua Lingkaran yang Tidak Berpotongan. Pada Gambar diperlihatkan lingkaran dan yang tidak berpotongan di luar. Untuk keadaan ini berlaku $|P_1P_2| > r_1 + r_2$

Contoh 3.3.2

Tentukan kedudukan lingkaran terhadap lingkaran $x^2 + y^2 2x 6y 26 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 6x 6y + 9 = 0$
Penyelesaian :



Gambar 3.8: Dua Lingkaran yang Tidak Berpotongan di Dalam.



Gambar 3.9: Dua Lingkaran yang Tidak Berpotongan di Luar.

1. Menentukan pusat lingkaran
   $P_1 = (\frac{-(-2)}{2}, \frac{-(-6)}{2}) = (1, 3)$
   $P_2 = (\frac{-(-6)}{2}, \frac{-(-6)}{2} = (3, 3)$

2. Menentukan Jari-Jari Lingkaran
   $r_1 = \sqrt{1^2 + 3^2 - (-26)}$
   $= \sqrt{1 + 9 + 26}$
   $= \sqrt{36}$
   $= 6$
   $r_2 = \sqrt{3^2 + 3^2 - 9}$
   $= \sqrt{9 + 9 - 9}$
   $= \sqrt{9}$
   $= 3$
   Maka, dapat disimpulkan bahwa :
   L_1 memiliki titik pusat $(1, 3)$ dan jari-jari 6
   L_2 memiliki titik pusat $(3, 3)$ dengan jari-jari 3

3. Mencari jarak titik pusat kedua
   $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
   $= \sqrt{(3 - 1)^2 + (3 - 3)^2}$
   $= \sqrt{2^2 + 0^2}$
   $= \sqrt{4}$
   $= 2$
   Dapat disimpulkan bahwa : $P_1P_2 < r_1 + r_2$ atau $2 < 6 + 3 = 9 (2 < 9)$ Atau kedua lingkaran berpotongan di dua titik

3.4 Persamaan Garis Singgung Pada Lingkaran

Garis singgung lingkaran adalah garis yang menyinggung suatu objek geometri di suatu titik. Jika persamaan garis $g : y = mx+n$ disubstitusikan ke persamaan lingkaran $L : x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, maka kita peroleh persamaan kuadrat:

$$x^2 + (mx + n)^2 + Ax + B(mx + n) + C = 0$$

Yang diskriminannya adalah D:
1. di dua tiik.
2. Jika $D = 0$, maka garis g memotong lingkaran L di satu titik (menyinggung)
3. Jika $D < 0$, maka garis g tidak memotong lingkaran L

3.4.1 Persamaan Garis Singgung Lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ yang Melalui Suatu Titik $P(x_1, y_1)$ pada Lingkaran

Garis singgung dapat ditentukan sebagai berikut:
Gradien $OP = m_1 = \frac{y_1}{x_1}$
Karena OP tegak lurus garis singgung, maka:

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= -1 \\ \tfrac{y_1}{x_1}.m_2 &= -1 \\ m_2 &= \tfrac{x_1}{y_1} \end{aligned}$$

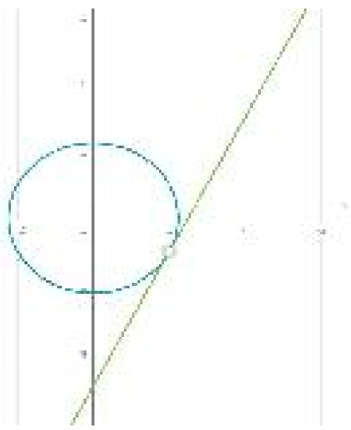
Jadi persamaan garis singgung lingkaran di titik $P(x_1, y_1)$, pada lingkaran adalah:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m_2(x - x_1) \\ y - y_1 &= \tfrac{x_1}{y_1}(x - x_1) \\ y.y_1 - y_1^2 &= -x.x_1 + x_1^2 \\ x.x_1 + y.y_1 + x_1^2 + y_1^2 &= 0 \\ x.x_1 + y.y_1 &= r^2 \end{aligned}$$

Contoh 3.4.1

Diketahui garis $g : 2x - y = m$ dari lingkaran $L : x^2 + y^2 = 5$. Tentukan konstanta m agar garis g dan lingkaran L bersinggungan.
Jawab
Diketahui: - Garis $g : 2x - y = m$
- Lingkaran $L : x^2 + y^2 = 5$
Ditanya: konstanta m
Jawab:

$$
\begin{aligned}
x^2 + [(2x - m)]^2 &= 5 \\
x^2 + [4x]^2 - 4xm + m^2 - 5 &= 0 \\
5x^2 - 4xm + m^2 - 5 &= 0 \\
D &= b^2 - 4ac \\
\text{agar bersinggungan maka nilai: } D &= 0 \\
0 &= (-4m)^2 - 4(5)(m^2 - 5) \\
0 &= 16m^2 - 20(m^2 - 5) \\
0 &= 16m^2 - 20m^2 + 100 \\
0 &= -4m^2 + 100 \\
m &= 5
\end{aligned}
$$



Gambar 3.10: Lingkaran: $x^2 + y^2 = 5$.

3.4.2 Persamaan Garis Singgung Lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ di Titik $P(x_1,y_1)$ pada Lingkaran

Garis singgung dapat ditentukan sebagai berikut:
Gradien $AP = m_1 = \frac{(y_1-b)}{(x_1-a)}$
Karena OP tegak lurus garis singgung, maka:

$$\begin{aligned} m_1m_2 &= -1 \\ \frac{(y_1-b)}{(x_1-a)}.m_2 &= -1 \\ m_2 &= \frac{-(x_1-b)}{(y_1-a)} \end{aligned}$$

Persamaan garis singgung yang melalui $P(x_1,y_1)$ dan gradien $m_2 = \frac{(x_1-a)}{(y_1-b)}$
Selanjutnya pindah ruas persamaan $m_2 = -\frac{(x_1-a)}{(y_1-b)}$ kemudian substitusi nilai a dan b dengan $P(x_1,y_1)$ sehingga didapatkan hasil berikut:

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m_2(x-x_1) \\ y-y_1 &= -\frac{(x_1-a)}{(y_1-b)}(x-x_1) \\ (y-y_1)(y_1-b) &= -(x_1-a)(x-x_1) \\ y.y_1-y.b-y_1^2+y_1^b &= -x.x_1+x_1^2+ax-ax_1 \\ x.x_1-ax-x_1^2+ax_1+y.y_1-y_1^2-by+by_1 &= 0 \\ x.x_1-ax+ax_1+y.y_1-by+by_1 &= x_1^2+y_1^2......(1) \end{aligned}$$

Karena $P(x_1,y_1)$ pada lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, maka:

$$\begin{aligned} (x_1-a)^2+(y_1-b)^2 &= r^2 \\ x_1^2-2ax_1+a^2+y_1^2-2by_1+b^2 &= r^2 \\ x_1^2+y_1^2 &= 2ax_1+2by_1-a^2-b^2+r^2......(2) \end{aligned}$$

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh:

$$\begin{aligned} x.x_1 - ax + ax_1 + y.y_1 - by + by_1 &= x_1^2 + y_1^2......(1) \\ x.x_1 - ax + ax_1 + y.y_1 - by + by_1 &= 2ax_1 + 2by_1 - a^2 - \\ (x.x_1 - ax + ax_1 - 2ax_1 + a^2) + (y.y_1 - by + by_1 - 2by_1 + b^2) &= r^2 \\ (x-a)(x_1+a) + (y-b)(y_1+a) &= r^2......(3) \end{aligned}$$

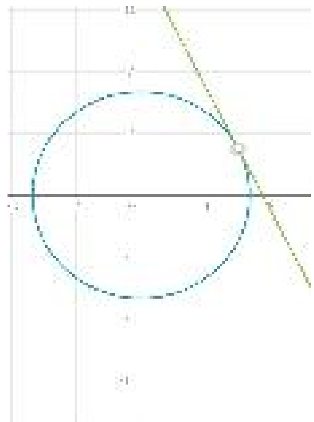
Persamaan (3), adalah persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran

Contoh 3.4.2

Persamaan garis singgung suatu lingkaran $L : x^2 + y^2 = 45$ jika titik singgungnya adalah $T(6, 3)$ adalah?
Jawab
Diketahui: - lingkaran $L : x^2 + y^2 = 45$
Titik singgung $T(6, 3)$
Ditanya: Persamaan garis singgung
Jawab: pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, garis singgung melalui titik (x, y) yang berada pada lingkaran yaitu $x.x_1 + y.y_1 = r^2$ maka:

$$\begin{aligned} x.x_1 + y.y_1 &= r^2 \\ x.6 + y.3 &= 45 \\ 6x + 3y &= 45 \\ 2x + y &= 15 \end{aligned}$$

5.4.3 Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Gradien Diketahui



Gambar 3.11: Lingkaran: $x^2 + y^2 = 45$.

5.4.3.1 Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m

Persamaan garis lurus dengan gradien m adalah $y = mx + n$
Substitusi $y = mx + n$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$
Diperoleh:

$$\begin{aligned}
x^2 + (mx+n)^2 &= r^2 \\
x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 &= r^2 \\
(1+m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 &= 0 \\
D &= b^2 - 4ac \\
D &= (2mn)^2 - 4(1+m^2)(n^2r^2) \\
D &= 4m^2n^2 - 4(n^2 - r^2 + m^2n^2 - m^2r^2) \\
D &= 4m^2n^2 - 4n^2 + 4r^2 - 4m^2n^2 + 4m^2r^2 \\
D &= 4(m^2r^2 - n^2 + r^2) = 0
\end{aligned}$$

Karena menyinggung, berarti D=0

$$\begin{aligned}
4(m^2r^2 - n^2 + r^2) &= 0 \\
m^2r^2 - n^2 + r^2 &= 0 \\
(m^2+1)r^2 &= n^2 \\
n &= \pm\sqrt{m^2+1}
\end{aligned}$$

Substitusi $n = \pm r\sqrt{m^2+1}$ ke persamaan garis $y = mx + n$ diperoleh:

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$$

Jadi rumus persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah:

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$$

5.4.3.2 Persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ dengan gradien m

Persamaan garis dengan gradien m adalah $y = mx + n$
Substitusi $y = mx + n$ ke persamaan lingkaran
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ diperoleh:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (mx+n-b)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2ax + a^2 + m^2x^2 + n^2 + b^2 + 2mxn - 2mxb - 2nb - r^2 &= 0 \\ (1+m)^2x^2 - 2(a - mn + bm)x + (a^2 + n^2 + b^2 - 2bn - r^2) &= 0 \end{aligned}$$

Nilai diskriminan:
$D = b^2 - 4ac$
$D = -2(a - mn + bm)^2 - 4(1+m^2)(a^2 + n^2 + b^2 - 2bn - r^2)$
Karena garis menyinggung lingkaran, maka:

$$D = b^2 - 4ac = 0$$

$$
\begin{aligned}
-2(a-mn+bm)^2-4(1+m^2)(a^2+n^2+b^2-2bn-r^2) &= 0\\
4(a-mn+bm)^2-4(1+m^2)(a^2+n^2+b^2-2bn-r^2) &= 0\\
(a-mn+bm)^2-(1+m^2)(a^2+n^2+b^2-2bn-r^2) &= 0\\
a^2+m^2n^2+b^2m^2-2amn+2abm-2m^2nb-a^2-&\\
n^2-b^2+2bn+r^2-am^2-m^2n^2-m^2b^2+2m^2bn+m^2r^2 &= 0\\
(n^2+a^2m^2+b^2+2amn-2bn-2abm)-r^2(1+m^2) &= 0\\
(n+am-b)^2-r^2(1+m^2) &= 0\\
(n+am-b)^2 &= r^2(1+m^2)\\
n &= -am+b\pm r\sqrt{m^2
\end{aligned}
$$

Substitusikan persamaan (1) ke dalam $y = mx + n$ sehingga diperoleh:

$$y = mx - am + b \pm r\sqrt{(m^2+1)}$$

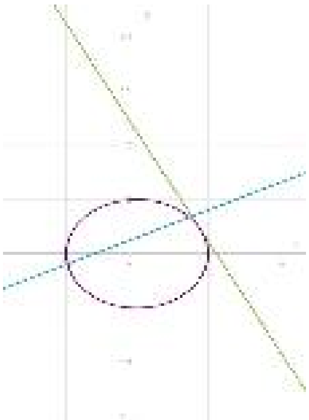
Contoh 3.4.2

Persamaan garis singgung pada lingkaran dengan pusat $(0, 0)$ dan jari-jari 5 serta tegak lurus garis $4y - 2x = 6$ adalah?
Diketahui:
- jari-jari 5
- tegak lurus garis $4y - 2x = 6$

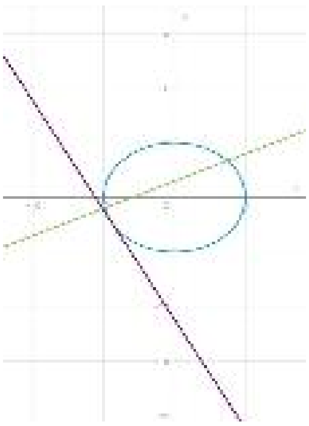
Ditanya: Persamaan garis singgung pada lingkaran

Penyelesaian:
Ubah pesamaan garis $4y - 2x = 6$ menjadi dalam bentuk $y = mx + c$
$4y = 2x + 6$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ maka m_1 adalah $\frac{1}{2}$
Karena syaratnya tegak lurus maka $m_1.m_2 = -1$
$m_1.m_2 = -1$
$\frac{1}{2}.m_2 = -1$
$m_2 = -2$
Substitusikan pada persamaan:
$y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$

$y = -2x \pm 5\sqrt{(-2)^2 + 1}$
$y = -2x \pm 5\sqrt{5}$



Gambar 3.12: Lingkaran dengan $(0, 0))$ dan Jari-jari 5 dengan Garis Singgung $y = -2x + 5\sqrt{5}$.



Gambar 3.13: Lingkaran dengan $(0, 0))$ dan Jari-jari 5 dengan Garis Singgung $y = -2x - 5\sqrt{5}$.

5.4.4 Persamaan Garis Singgung Lingkaran yang Melalui Sebuah Titik di Luar Lingkaran

Cara untuk menentukan persamaan-persamaan garis singgung yang terletak diluar lingkaran dapat dilakukan melalui langkah-langkah sebagai berikut:

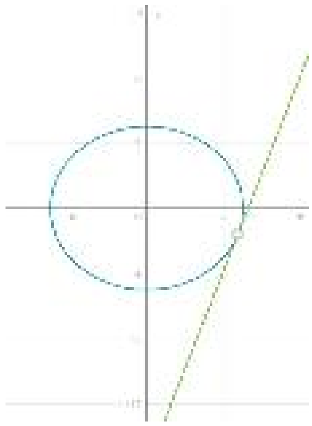
- Langkah 1
  Persamaan melalui $P(x_1, y_1)$ dengan gradien m adalah :
  $y - y_1 = m(x - x_1)$
  $y = mx - mx_1 + y_1$..........(1)
- Langkah 2
  Substitusikan persamaan (1) ke persamaan lingkaran, sehingga diperoleh persamaan kuadrat gabungan. Kemudian dihitung diskriminan dari persamaan kuadrat tersebut.
- Langkah 3
  Karena garis singgung menyinggung lingkaran, maka $D = 0$. Dari syarat $D = 0$ akan diperoleh nilai nilai dari m. Nilai-nilai dari m ini selanjutnya di substitusikan ke persamaan garis:

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

Contoh 3.4.4

Tentukan persamaan garis singgung yang mempunyai gradien 3 pada lingkaran $L : x^2 + y^2 = 25$
Diketahui:
- Gradien = 3
- Lingkaran $L : x^2 + y^2 = 25$
Ditanya : persamaan garis singgung

Penyelesaian:
$x^2 + y^2 = r^2$
$x^2 + y^2 = 25$
$x^2 + y^2 = 5^2$
Maka diketahui bahwa nilai r adalah 5
$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
$y = 3x \pm 5\sqrt{3^2 + 1}$
$y = 3x \pm 5\sqrt{10}$

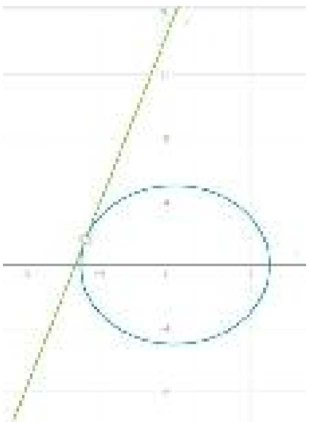


Gambar 3.14: Lingkaran dengan $(0, 0))$ dan Jari-jari 5 dengan Garis Singgung $y = 3x - 5\sqrt{10}$.

LATIHAN SOAL

3.5 Latihan Soal

1. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $(-4, 5)$ dan berjari-jari 5!
2. Berdasarkan persamaan lingkaran $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 36$, maka tentukan pusat dan jari-jari lingkaran



Gambar 3.15: Lingkaran dengan $(0,0))$ dan Jari-jari 5 dengan Garis Singgung $y = 3x + 5\sqrt{10}$.

3. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(3, -2)$ dan memiliki titik pusat$(3, 4)$!
4. Diketahui persamaan lingkaran $x^2 - 6x + y^2 + 6 = 0$ terdapat pada sumbu Y. Berapakah jarak antara titik pusat lingkarannya?
5. Diketahui suatu lingkaran memiliki jari-jari 10 dengan persamaan $x^2 + y^2 + 2px + 20y + 16 = 0$ dan menyinggung sumbu X. Berapakah titik pusat lingkaran tersebut
6. Tentukan kedudukan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$!
7. Tentukan kedudukan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 26 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$!
8. Tentukan garis kuasa dan titik kuasa lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$!
9. Tentukan nilai kuasa titik $T(1, 2)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$!
10. Tentukan persamaan garis kuasa yang mempunyai kuasa sama terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 8 = 0$!

3.6 Daftar Pustaka

1. Berman, M., Etingof, P. (2021). Geometry of the plane and circle: a modern view on classical topics. American Mathematical Society.
2. Corel, E. (2020). Analytic geometry in plane and space. Inverse Problems and Applications: Inside Out II, 27-57.
3. Dos Santos, J. M., Lima, E. L. (2021). Plane geometry and analytic geometry: some intersections. Journal of Geometry, 112(1), 13.

4 Kassab, M. Y., Qablan, M. S. (2021). Analytic geometry of the circle with the aid of the radius of curvature. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1-10.

5. Simmons, G. F. (2011). Calculus with Analytic Geometry. Tata McGraw-Hill Education.
6. Stein, S. K., Barcellos, A. E. (2017). Analytic Geometry. Dover Publications.
7. Stewart, J. (2015). Single Variable Calculus: Early Transcendentals. Cengage Learning.
8. Ochel, J. (2020). A Short Introduction to Analytic Geometry. Springer.

BAB 4

Elips

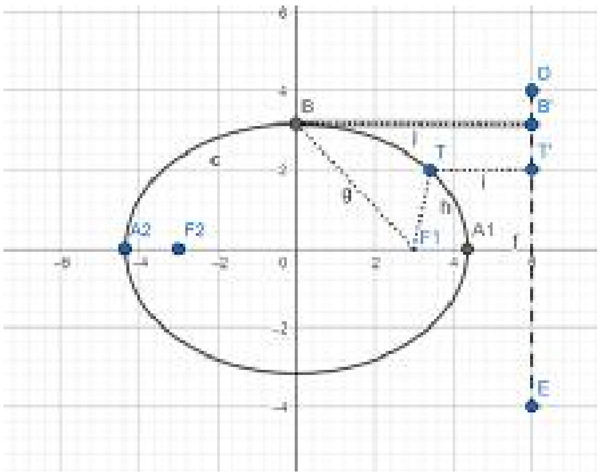
Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-01: Mahasiswa mampu menganalisis berbagai bentuk persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar, serta mampu menunjukkan relasi dan transformasi diantara objek-objek Geometri tersebut, melalui pengembangan pemikiran matematis dan penalaran logis dengan mandiri, bermutu, dan terukur.

4.1 Pendahuluan

Elips dalam bahasa Indonesia dapat disebut juga sebagai bentuk oval yang beraturan, bulat lonjong, bulat bujur, dan bulat panjang. Elips memiliki bentuk menyerupai lingkaran yang dipanjangkan ke satu arah. Pengaplikasian bentuk elips dalam kehidupan sehari-hari dapat kita temui dalam berbagai bidang, misalnya di bidang kesehatan mengobati kencing batu menggunakan alat lithotriper. Alat ini berbentuk setengah elips yang digunakan untuk menyalurkan gelombang ultrasonik ke batu ginjal. Perhitungan jarak fokus untuk mendapatkan penglihatan yang maksimal terhadap posisi batu ginjal dapat menggunakan sifat-sifat elips. Oleh karena itu, pada bab ini akan dijelaskan secara rinci tentang definisi elips, macam-macam elips, unsur-unsur, persamaan elips, serta persamaan garis singgung elips

4.2 Definisi Elips

Menurut Larson (2015) Elips didefinisikan sebagai himpunan titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu memiliki nilai yang tetap atau konstan. Di dalam Elips juga terdapat dua titik tertentu yang dapat disebut dengan titik fokus elips. Definisi lain Elips secara geometri Elips yakni tempat kedudukan titik fokus dan garis direktris adalah tetap, eksentrisitas (e) yang memiliki nilai 0 < e < 1. Eksentrisitas itu juga disebut sebagai derjat keelipsan. Semakin lonjong suatu elips, nilai eksentrisitasnya semakin besar. Sebaliknya apabila semakin bulat atau membentuk lingkaran makan nilai eksentrisitas semakin kecil.



Gambar 4.1: Ilustrasi Pembuktian Rumus Eksentrisitas.

Rumus eksentrisitas = e = F1B/BB’

$$e = \frac{\sqrt{c^2 + b^2}}{\frac{a^2}{c}} \tag{4.1}$$

$$e = \frac{ac}{a^2} \tag{4.2}$$

$$e = \frac{c}{a} \tag{4.3}$$

Pembuktian:

$$e = \frac{\sqrt{c^2 + b^2}}{\frac{a^2}{c}} \tag{4.4}$$

$$b = a^2 - c^2 \tag{4.5}$$

$$e = \frac{\sqrt{c^2 + a^2 - c^2}}{\frac{a^2}{c}} \tag{4.6}$$

$$e = \frac{a}{\frac{a^2}{c}} \tag{4.7}$$

$$e = \frac{a \times c}{a^2} \tag{4.8}$$

$$e = \frac{c}{a} \tag{4.9}$$

4.3 Unsur-Unsur Elips

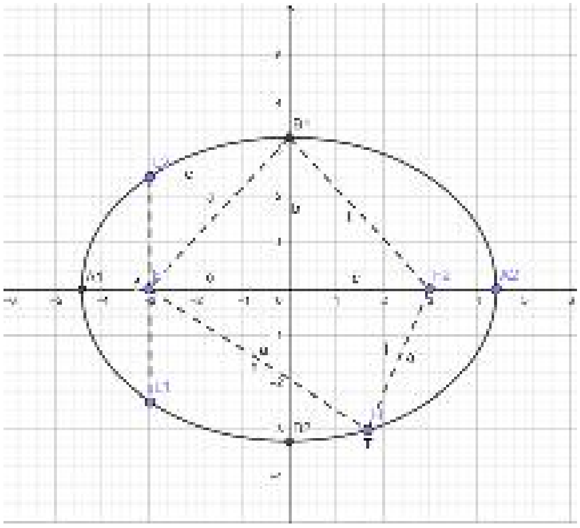
Menurut Stewart (2015) erdapat dua macam bentuk elips, yaitu sebagai berikut:

1. Elips Horizontal
   Elips Horizontal merupakan elips yang sumbu utamanya berimpit dengan sumbu x
2. Elips vertikal
   Elips Vertikal merupakan elips yang sumbu utamanya berimpit dengan sumbu y (Pangabean,2021)

Kedua jenis elips tersebut memiliki unsur yang berbeda pula, untuk lebih memahami perbedaan kedua jenis elips tersebut maka kita tinjau unsur-unsur dari kedua elips tersebut.

4.3.1 Unsur-unsur Elips Horizontal

1. Koordinat titik fokus atau sumbu utama = F1(-c,0) dan F2(c,0)

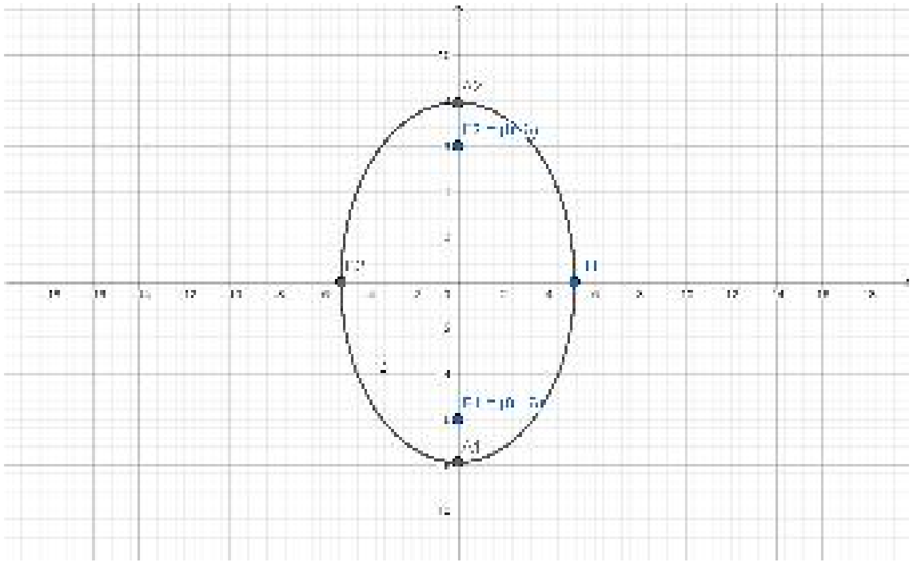


Gambar 4.2: Elips Horizontal.

2. Sumbu panjang (Mayor) pada sumbu x= A1(-a,0) dan A2(a,0)=2a
3. Sumbu pendek (Minor) pada sumbu y= B1(0,b) dan B2(0,-b)=2b
4. A1, A2, B1, B2 = Puncak-pucak elips
5. Latus rectum (L), ruas garis yang melalui fokus tegak lurus pada sumbu mayor dan terletak di dalam elips.
6. Persamaan garis direktris, sebuah garis yang tegak lurus sumbu nyata yang ditunjukkan oleh garis g.
7. Eksentrisitas (e), perbandingan jarak dari suatu titik pada elips ke titik fokus dengan garis direktris g. Sehingga, e=c/a.

4.3.2 Unsur-unsur Elips Vertikal

1. Koordinat titik fokus atau sumbu utama = F1(0,-c) dan F2(0,c)
2. Sumbu panjang (Mayor) pada sumbu y= A1(0,-a) dan A2(0,a)=2a
3. Sumbu pendek (Minor) pada sumbu x= B1(b,0) dan B2(-b,0)=2b



Gambar 4.3: Elips Vertikal.

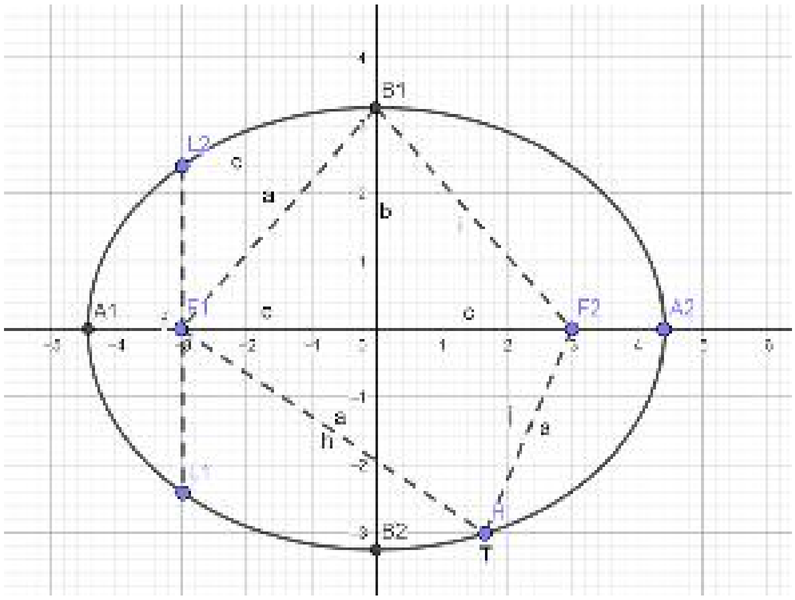
4. A1, A2, B1, B2 = Puncak-pucak elips
5. Latus rectum (L) $=\frac{2b^2}{a}$
6. Persamaan garis direktris $= y = -\frac{a^2}{c}$ dan $y = \frac{a^2}{c}$
7. Eksentrisitas (e), perbandingan jarak dari suatu titik pada elips ke titik fokus dengan garis direktris g. Sehingga, e=c/a.

4.4 Persamaan Elips

Elips dibedakan berdasarkan titik pusatnya. Terdapat Elips dengan pusat 0(0,0) dan Elips dengan pusat M(p,q).

4.4.1 Persamaan Elips yang berpusat dititik (0,0)

Persamaan Elips di titik pusat 0(0,0). Didalam elips yang berpusat di titik (0,0) terdapat koordinat titik fokus atau sumbu utama. Titik fokus dapat dibedakan sesuai letak sumbu-x dan sumbu-y (Thoas dan finney,1996).



Gambar 4.4: Elips dengan Pusat 0(0,0).

4.4.2 Persamaan elips dengan titik fokus pada sumbu x

Persamaan elips dengan titik fokus yang terletak pada sumbu-x di titik A1(-a,0) dan A2(a,0) yang memotong sumbu-y di titik B1 (0,b) dan B2 (0,-b) dengan titik fokus pada sumbu-x. Sehingga persmaan elips dengan titik fokus pada sumbu-x didefinisikan berikut:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

  Pembuktian Rumus =

$$|TF1| + |TF2| = 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$
$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \frac{cx}{a}$$

$$(x+c)^2+y^2 = (a+\frac{cx}{a})^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2 = a^2+2a\frac{cx}{a}+\frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2 = a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$x^2-\frac{c^2x^2}{a^2}+y^2 = a^2-c^2$$

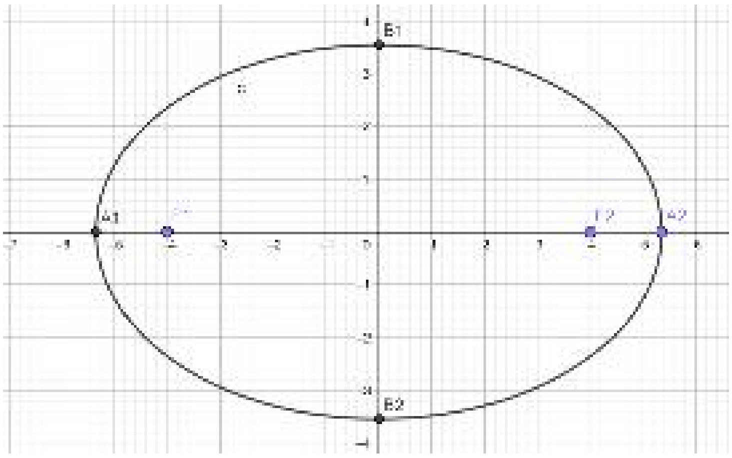
$$(1-\frac{c^2}{a^2}x^2+y^2 = a^2-c^2$$

$$(\frac{a^2}{a^2}-\frac{c^2}{a^2})x^2+y^2 = a^2-c^2$$

$$(\frac{a^2-c^2}{a^2})x^2+y^2 = a^2-c^2$$

$$\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2 = b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$



Gambar 4.5: Elips Berpusat di O(0,0) dan Sejajar Sumbu-X.

4.4.3 Persamaan elips dengan titik fokus pada sumbu y

Persamaan elips dengan titik fokus yang terletak pada sumbu-y di titik A1(0,-a) dan A2(0,a) yang memotong sumbu-x di titik B1(-b,0) dan B2(b,0) dengan titik fokus pada sumbu-y (Zill dan Wright 2013). Sehingga persamaan elips dengan titik fokus pada sumbu-y didefinisikan berikut :

- $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}$

  Pembuktian Rumus =

$$|TF1| + |TF2| = 2a$$
$$\sqrt{(x)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x)^2 + (y-c)^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x)^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{(x)^2 + (y+c)^2}$$
$$x^2 + y^2 - 2yc + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x^2) + (y+c)^2} + x^2 + 2yc + c^2$$
$$4a\sqrt{(x^2) + (y+c)^2} = 4a^2 + 4yc$$
$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = a + \frac{yc}{a}$$

$$x^2 + (y+c)^2 = (a + fraqyca)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2yc + c^2 = a^2 + 2a\frac{yc}{a} + \frac{c^2y^2}{a^2}$$

$$x^2 + 2xc + c^2y^2 = a^2 + 2cy + \frac{c^2y^2}{a^2}$$

$$x^2 - \frac{c^2y^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$

$$x^2 - y^2(\frac{c^2}{a^2} - 1) = b^2$$

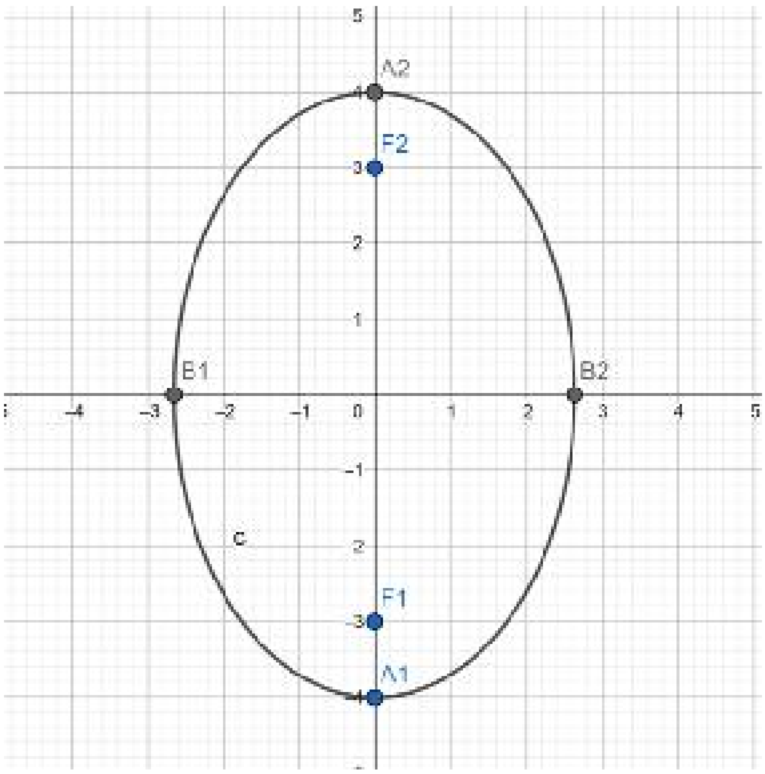
$$x^2 - y^2(\frac{c^2}{a^2} - \frac{a^2}{a^2}) = b^2$$

$$x^2 + y^2(-\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{a^2}) == b^2$$

$$x^2 - y^2(\frac{a^2 - c^2}{a^2} == b^2$$

$$x^2 + y^2\frac{b^2}{a^2} = b^2$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Gambar 4.6: Elips Berpusat di O(0,0) Sejajar Sumbu-Y.

4.4.4 Persamaan Elips yang berpusat di titik M(p,q)

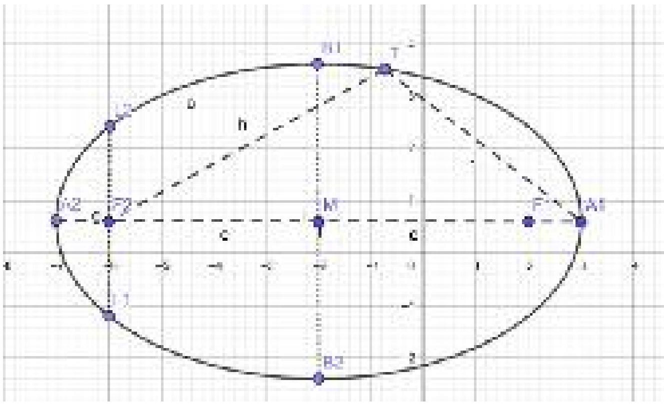
Persamaan Elips yang berpusat pada titik M(p,q) juga terdapat koordinat titik fokus atau sumbu utama. Titik fokus dapat dibedakan sesuai letak sumbu-x dan sumbu-y.

4.4.5 Persamaan elips M(p,q) dengan titik fokus sejajar sumbu-x

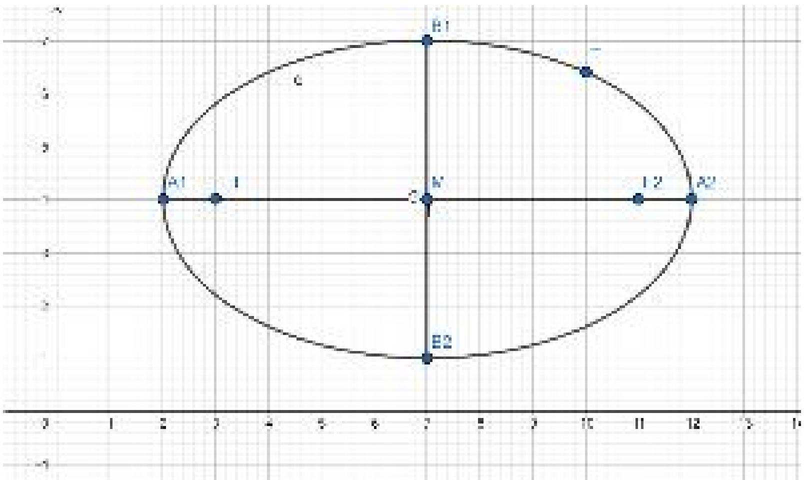
Persamaan pada gambar elips dengan koordinat titik fokus F1(p-c,q) dan F2(p+c,q) sejajar dengan sumbu-x. Sehingga persaman elips dapat didefinisikan berikut :

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

Pembuktian Rumus =



Gambar 4.7: Elips dengan Pusat $M(p,q)$.



Gambar 4.8: Elips dengan Pusat $M(p,q)$ dan sejajar sumbu-X.

Matriks translasinya dapat di tulis T :
$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Hubungan titik awal dan bayangannya : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + x \\ q + y \end{pmatrix}$$

$x' = p + x- > x = x' - p$

$y' = q + y- > y = y' - q$

Sehingga persamaan baru setelah digeser yaitu :

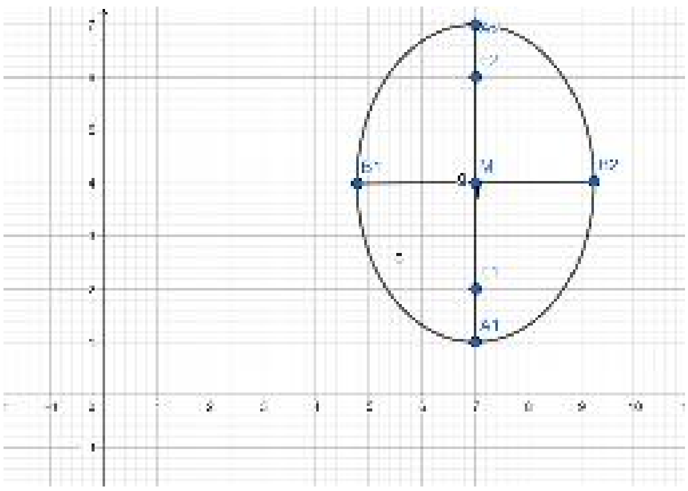
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{(x'-p)^2}{a^2} + \frac{(y'-q)^2}{b^2} = 1$

atau dapat ditulis :

$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

4.4.6 Persamaan elips M(p,q) dengan titik fokus sejajar sumbu-y



Gambar 4.9: Elips Berpusat di $M(p, q)$ sejajar sumbu-Y.

Persamaan pada elips dengan titik fokus sejajar sumbu-y dengan koordinat titik fokus F1(p,q-c) dan F2(p,q+c) dan koordinat titik ekstrim A1(p,q-a) dan A2(p,q+a) serta B1(p,q-b) dan B2(p,q+b), sehingga koordinat titik fokusnya sejajar dengan sumbu-y. Sehingga persamaan elips ini dapat didefinisikan sebagai berikut:

Hubungan titik awal dan bayangannya : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+x \\ q+y \end{pmatrix}$$
$x' = p + x- > x = x' - p$
$y' = q + y- > y = y' - q$
$Sehinggapersamaanbarusetelahdigeser:$
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
$\frac{(x'-p)^2}{b^2} + \frac{(y'-q)^2}{a^2} = 1$
atau dapat ditulis :
$\frac{(x-p)^2}{b^2} + \frac{(y-q)^2}{a^2} = 1$

4.5 Garis Singgung Elips

Persamaan garis singgung elips dapat ditentukan melalui diketahuinya gradien atau titik singgungnya. Persamaan garis singgung dapat terjadi pada pusat O(0,0) ataupun pusat M(x_1, y_1). Berikut ini akan dijelaskan masing-masing persamaannya:

4.5.1 Persamaan garis singgung elips dengan gradien m dan pusat 0(0,0)

Persamaan garis singgung elips dengan gradien m dan pusat 0(0,0)adalah sebagai berikut :

- $y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$

  Pembuktian Rumus =
  Misalkan persamaan garis singgung sebagai: :

$$y = mx + n.....(1)$$

Persamaan Elips dengan pusat M(0,0)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1......(2)$$

Subtitusikan persamaan (1) ke persamaan (2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+n)(mx+n)}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mxn + a^2n^2}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mxn + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + (2a^2mn)x + (a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

Kita asumsikan sebagai bentuk

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Karena syarat sebuah garis menyinggung, maka kita menggunakan D=0

$$b^2 - 4ac$$

$$(2a^2mn)^2 - 4((b^2 + a^2m^2)(a^2n^2 - a^2b^2)) = 0$$

$$4a^2m^2n^2 - 4a^2b^2n^2 + 4a^2m^2n^2 + 4a^2b^2m^2 = 0$$

$$-4a^2b^2n^2 + 4a^2b^2 + 4a^2b^2m^2 = 0$$

Persamaan dibagi dengan

$$-4a^2b^2$$

Sehingga

$$n^2 - b^2 - a^2m^2 = 0$$

$$n^2 = b^2 + a^2m^2$$

$$n = \sqrt{b^2 + a^2m^2}$$

Kita subtitusikan ke persamaan (2)

$$y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$$

Jadi, rumus Persamaan garis singgung elips dengan gradien m dan pusat 0(0,0)adalah

$$y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$$

4.5.2 Persamaan garis singgung elips dengan gradien m dan pusat $M(x_1, y_1)$

Persamaan garis singgung elips dengan gradien m dan pusat $M(x_1, y_1)$ adalah sebagai berikut :

- $y - q = (x - p) \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$

Pembuktian Rumus = Misalkan persamaan garis singgung sebagai: :

$$y - q = m(x - p) + n.....(1)$$

Persamaan Elips dengan pusat M(p,q)

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{y-q)^2}{b^2} = 1......(2)$$

Subtitusikan persamaan (1) ke persamaan (2)

$$\frac{x-p)^2}{a^2} + \frac{(m(x-p)+n)^2}{b^2}$$

$$\frac{b^2(x-p)^2 + a^2((m(x-p)+n)(m(x-p)+n))}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2(x-p)^2 + a^2x^2 + 2a^2mxn + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

$$(b^2 + a^2m^2)(x-p) + (2a^2mn)(x-p) + (a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

Kita asumsikan sebagai bentuk

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Karena syarat sebuah garis menyinggung, maka kita menggunakan D=0

$$b^2 - 4ac$$

$$(2a^2mn)^2 - 4((b^2 + a^2m^2)(a^2n^2 - a^2b^2)) = 0$$
$$4a^2m^2n^2 - 4a^2b^2n^2 + 4a^2m^2n^2 + 4a^2b^2m^2 = 0$$
$$-4a^2b^2n^2 + 4a^2b^2 + 4a^2b^2m^2 = 0$$

Persamaan dibagi dengan

$$-4a^2b^2$$

Sehingga

$$n^2 - b^2 - a^2m^2 = 0$$
$$n^2 = b^2 + a^2m^2$$
$$n = \sqrt{b^2 + a^2m^2}$$

Kita subtitusikan ke persamaan (2)

$$y - q = m(x - p) \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$$

Jadi, rumus persamaan garis singgung elips dengan gradien m dan pusat M(x1,y1) adalah :

$$y - q = m(x - p) \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$$

4.5.3 Persamaan garis singgung elips yang titik singgungnya dapat diketahui dengan pusat $O(0,0)$

Misalkan titik singgungnya $A(x_1, y_2)$ dengan diketahui dengan pusat $O(0,0)$ adalah sebagai berikut :

- $\frac{x_2.x}{a^2} + \frac{y_1.y}{b^2} = 1$

  Pembuktian Rumus =
  Rumus Persamaan Garis melalui 2 titik :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$
$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$
$$\frac{y - y_1}{X - X_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$(y - y_1) = m(x - x_1).....(1)$$

  Rumus Persamaan Elips di Titik X

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$(b^2x^2)(a^2y^2) = a^2b^2$$
$$(b^2x_1^2) + (a^2y_1^2) = a^2b^2.....(2)$$
$$(b^2x_2^2) + (a^2y_2^2) = a^2b^2.....(3)$$
$$(b^2x_1^2) + (a^2y_1^2) = (a^2b^2) = (b^2x_2^2) + (a^2y_2^2) = (a^2b^2)$$
$$b^2x_2^2 - b^2x_1^2 + a^2y_2^2 - a^2y_1^2 = 0$$
$$b^2(x_2^2 - x_1^2) + a^2(y_2^2 - y_1^2) = 0$$
$$b^2(x_2^2 - x_1^2) = -a^2()y_2^2 - y_1^2$$
$$b^2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = -a^2(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)$$
$$(x_2 - x_1) - (x_2 + x_1) = \frac{-a^2}{b^2}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)$$
$$\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{y_2 + y_1} = \frac{-a^2}{b^2}y_2 - y_1$$

$$\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} = \frac{-a^2(x_2 - x_1)}{b^2(y_2 - y_1)}$$

$$\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} = \frac{-a^2}{b^2}(m)$$

$$\frac{-a^2(x_2 + x_1)}{b^2(y_2 + y_1)} = m.....(4)$$

Substitusikan persamaan 4 ke persamaan 1

$$m(x - x_1) = y - y_1$$

$$\frac{-b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}(x - x_1) = y - y_1$$

$$\frac{-b^2(x_1 + x_1)}{a^2(y_1 + y_1)}(x - x_1) = y - y_1$$

$$\frac{-b^2(2x_1)}{a^2(2y_1)}x - x_1 = y - y_1$$

$$-b^2x_1(x - x_1) = y - y_1(a^2y_1)$$

$$(-b^2x_1x) + (b^2x_1^2) = (a^2y_1y) - (a^2y_1^2)$$

$$(a^2y_1^2) + (b^2x_1^2) = (a^2y_1y) + (b^2x_1x)$$

$$(a^2y_1^2) + (b^2x_1^2) = a^2b^2$$

$$\frac{y_1y}{b^2} + \frac{x_1x}{a^2} = 1$$

Jadi, Rumus persamaan garis singgung elips yang titik singgungnya dapat diketahui dengan pusat O(0,0) adalah :

$$\frac{y_1y}{b^2} + \frac{x_1x}{a^2} = 1$$

4.5.4 Persamaan garis singgung elips yang titik singgungnya dapat diketahui dengan pusat $M(x_0, y_0)$

Persamaan garis singgung elips yang titik singgungnya dapat diketahui. Misalkan titik singgungnya A(x1,y1) dengan diketahui dengan pusat M(x0,y0) adalah sebagai berikut :

- $\frac{(x-x_0)(x_1-x_0)}{a^2} + \frac{(y-y_0)(y_1-y)}{b^2} = 1$

Pembuktian Rumus =

Semisal pada titik M (x0,y0) mewakili sumbu x dan y,maka hanya mentranslasikan(menggeser pusatnya) dari rumus titik singgung yang terletak pada pusat O = (0,0)

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x_1 - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)(y - y_0)}{b^2}$$

Jadi, rumus persamaan garis singgung elips yang titik singgungnya dapat diketahui dengan pusat M(x0,y0) adalah :

$$\frac{(x_1 - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)(y - y_0)}{b^2}$$

4.6 Contoh Soal Elips

1.Sebuah elips mempunyai persamaan

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Tentukan: a.) Koordinat pusat, fokus, dan puncak dari elips b.) Panjang sumbu mayor dan sumbu minor

2. Tentukan persamaan garis singgung elips

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

dengan gradien $\sqrt{5}$ adalah. . .

4.7 Latihan Soal Elips

1. Carilah persamaan sederhana pada elips yang melalui titik pusat O(0,0) serta buatlah sketsa grafiknya dengan a=10,b=6 dan kedua fokusnya terletak pada sumbu x!
2. Persamaan garis singgung berikut pada elips yang terletak pada titik (-4,1) adalah. . .
$$\frac{(x+5)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{6} = 1$$
3. Tentukan titik pusat, sumbu panjang, sumbu pendek, dan titik fokus elips dengan persamaan
$$9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$$
4. Tentukan koordinat titik puncak, titik fokus, panjang latus rektum, dan persamaan sumbu simetri dari elips $25x^2 + 16y^2 = 400$!
5. Tentukan koordniat titik puncak, titik fokus, panjang laktus rektum, dan persamaan sumbu simetri dari elips $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$!
6. Tentukan persamaan elips yang memiliki titik puncak dititik (±6,0) dan sumbu minornya sepanjang 10 !
7. Tentukan persamaan elips yang memiliki titik puncak di (±4,0) dan panjang latus rektumnya 2
8. Tentukan persamaan elips yang fokusnya (2,-7), serta panjang sumbu minornya dua per tiga dari panjang sumbu mayor.
9. Tentukan persamaan garis singgung elips $16x^2 + 25y^2 = 400$ di titik yang koordinatnya 2!
10. Tentukan persamaan elips yang memiliki titik ujung sumbu minor di $(\pm 4, 0)$ dan panjang latus rektumnya 4.
11. Tentukan nilai k sehingga garis $y = -x+k$ menyinggung elips $x^2+4y^2 = 20$
12. Tentukan luas elips $x^2 + 4y^2 + 6x - 16y - 11 = 0$

Table 4.1: Rumus elips Horizontal

Ket	Elips horizontal O(0,0)	Elips horizontal M(p,q)
mayor	(+-a,0)	(p +-a,q)
minor	(0,+-b)	(p,q +-b)
fokus	(+-c,0)	(p+-c, q)
e	e=c/a	e=c/a
x	x= +- a/e	x= p +- a/e
Pj. mayor	2a	2a
Pj. minor	2b	2b
L. rectum	$2b^2/a$	$2b^2/a$
Persamaan	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$	$(x-p)^2/a^2 + (y-q)^2/b^2 = 1$
pgs titik	$xx_1/a^2 + yy_1/b^2 = 1$	$(x-p)(x_1-p)/a^2 + (y-q)(y_1-q)/b^2 = 1$
pgs gradien	$y = mx + -\sqrt{(p^2m^2 + q^2)}$	$(y-q) = m(x-p) + -\sqrt{(p^2m^2 + q^2)}$

13. Tentukan persamaan garis singgung elips $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ di titik yang absisnya 5
14. Tentukan persamaan elips yang memiliki titik puncak di $(0, \pm 8)$ dan titik - titik ujung sumbu minor di $(\pm 3, 0)$.
15. Tentukan persamaan elips yang memiliki puncak di (0,13), fokus terdekat dengan titik puncak itu adalah (0,5), dan pusatnya di titik asal.

Table 4.2: Rumus elips vertikal

Ket	Elips vertikal O(0,0)	Elips vertikal M(p,q)
mayor	(0,+-a)	(p,q +-a)
minor	(+-b,0)	(p +-b,q)
fokus	(0, +-c)	(p, q+-c)
e	e=c/a	e=c/a
x	y= +- a/e	y= q +- a/e
Pj. mayor	2a	2a
Pj. minor	2b	2b
L. rectum	$2b^2/a$	$2b^2/a$
Persamaan	$x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$	$(x-p)^2/b^2 + (y-q)^2/a^2 = 1$
pgs titik	$xx_1/b^2 + yy_1/a^2 = 1$	$(x-p)(x_1-p)/b^2 + (y-q)(y_1-q)/a^2 = 1$
pgs gradien	$y = mx + -\sqrt{(}p^2 + q^2m^2)$	$(y-q) = m(x-p) + -\sqrt{(}p^2 + q^2m^2)$

4.8 Daftar Pustaka

1. Larson, R. E., Edwards, B. H. (2014). Calculus (10th ed.). Cengage Learning.
2. Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals (8th ed.). Cengage Learning.
3. Thomas, G. B., Finney, R. L. (1996). Calculus and Analytic Geometry (9th ed.). Addison Wesley.
4. Zill, D. G., Wright, W. S. (2013). Calculus: Early Transcendentals (4th ed.). Jones Bartlett Learning.

BAB 5

Hiperbola

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-01: Mahasiswa mampu menganalisis berbagai bentuk persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar, serta mampu menunjukkan relasi dan transformasi diantara objek-objek Geometri tersebut, melalui pengembangan pemikiran matematis dan penalaran logis dengan mandiri, bermutu, dan terukur.

5.1 Pendahuluan

Hiperbola dan Hiperboloida adalah dua konsep penting dalam matematika dan geometri. Keduanya memiliki bentuk geometris yang menarik dan memiliki aplikasi yang luas dalam berbagai bidang, seperti fisika, teknik, dan matematika terapan. Hiperbola adalah kurva geometris yang didefinisikan sebagai himpunan semua titik dalam bidang yang memiliki perbedaan jarak yang konstan dari dua titik tetap yang disebut fokus. Hiperbola sering digunakan dalam bidang ilmu fisika dan teknik, seperti dalam perhitungan orbit planet dan satelit.

Sementara itu, hiperboloida adalah permukaan geometris yang didefinisikan sebagai himpunan semua titik dalam ruang tiga dimensi yang memiliki perbedaan jarak yang konstan dari dua titik tetap dan terletak pada sumbu utama dari hiperboloida. Hiperboloida juga memiliki berbagai macam bentuk, seperti hiperboloida satu lembar dan hiperboloida dua lembar. Pemahaman tentang konsep hiperbola dan hiperboloida sangat penting dalam geometri dan matematika terapan, terutama dalam perhitungan fisika dan teknik. Konsep ini juga digunakan dalam berbagai aplikasi praktis, seperti dalam desain mesin dan konstruksi bangunan. Oleh karena itu, mempelajari hiperbola dan hiperboloida dapat membantu kita memahami berbagai konsep matematika yang kompleks dan mengembangkan keterampilan analisis dan pemecahan masalah yang kuat

5.2 Definisi Hiperbola

Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu adalah tetap. Kedua titik tertentu itu disebut titik fokus.

5.2.1 Unsur-Unsur Hiperbola

Pada suatu kurva hiperbola, terdapat berbagai unsur pembentuk, yaitu (Panggabean, 2020):

- Sumbu utama atau Sumbu mayor
- Sumbu sekawan atau Sumbu minor
- Pusat hiperbola
- Puncak hiperbola
- Asimtot
- Cabang
- Direktris
- Titik Fokus

5.2.2 Kedudukan Titik terhadap Hiperbola

Terdapat tiga jenis kedudukan titik terhadap hiperbola, yaitu :

1. Titik berada di dalam kurva hiperbola,
2. Titik berada pada kurva hiperbola,
3. Titik berada di luar kurva hiperbola.

Untuk mengetahui kedudukan suatu titik terhadap hiperbola, digunakan cara subsitusi koordinat titik tersebut pada persamaan hiperbola (Yunita & Hamdunah, 2017). Sehingga didapatkan tiga syarat atau tiga kemungkinan yang akan terjadi, yaitu :

a. Jika nilai ruas kiri $>$ ruas kanan , maka titik tersebut berada di dalam kurva hiperbola,

b. Jika nilai ruas kiri $=$ ruas kanan , maka titik tersebut berada pada kurva hiperbola,

c. Jika nilai ruas kiri $<$ ruas kanan , maka titik tersebut berada di luar kurva hiperbola.

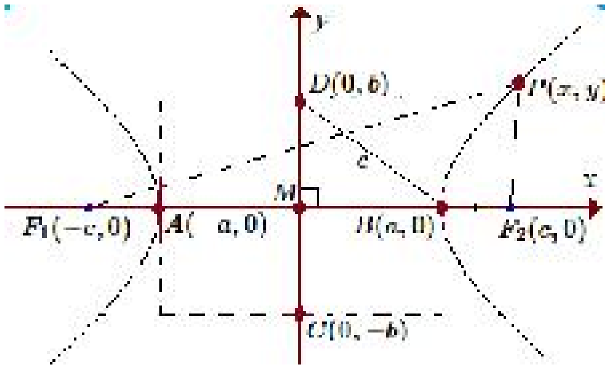
5.3 Persamaan Hiperbola

Persamaan umum hiperbola adalah:

$$\boxed{Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0}$$

Suatu kurva hiperbola didapatkan dari perpotongan antara dua kerucut yang saling berhadapan dengan sebuah bidang yang memotong setengah dari kerucut tersebut (Pasandoran & Ma'ruf, 2018).

Persamaan hiperbola dibagi menjadi empat sesuai dengan macam-macam hiperbola dan kedudukan titik pusatnya :



Gambar 5.1: Garis Singgung Hiperbola.

5.3.1 Persamaan Hiperbola dengan Titik Pusat $O(0,0)$

HORIZONTAL

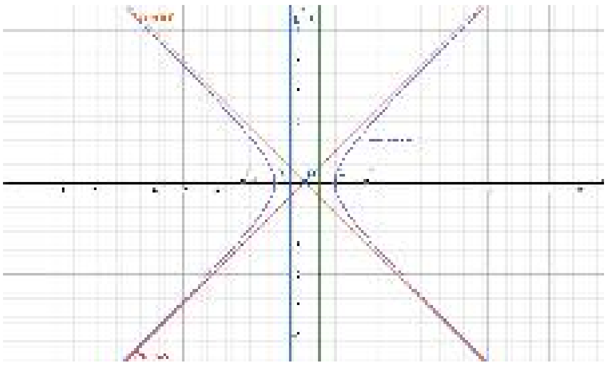
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
|PF_1| - |PF_2| &= 2a \\
\sqrt{(x-x1)^2+(y-y1)^2} - \sqrt{(x-x2)^2+(y-y2)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2)} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} \\
(\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2})^2 &= (2a + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2})^2 \\
x^2+2xc+c^2+y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - \\
2xc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} - 2xc \\
4xc - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}
\end{aligned}$$

Dibagi 4:

$$
\begin{aligned}
xc - a^2 &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(xc - a^2)^2 &= (a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \\
x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 &= a^2((x-c)^2 + y^2) \\
x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 &= a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\
x^2c^2 + a^4 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\
x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\
x^2(b^2) - a^2y^2 &= a^2(b^2) \\
\tfrac{x^2b^2}{a^2b^2} - \tfrac{a^2y^2}{a^2b^2} &= \tfrac{a^2b^2}{a^2b^2} \\
\tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}
$$



Gambar 5.2: Hiperbola dengan Pusat di Titik $O(0,0)$.

VERTIKAL

$$\boxed{\tfrac{y^2}{a^2} - \tfrac{x^2}{b^2} = 1}$$

Bukti:

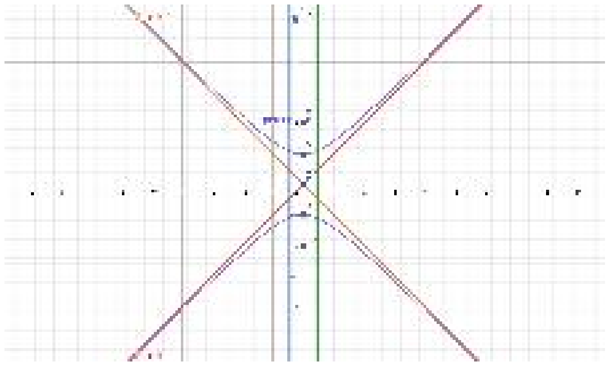
$$
\begin{aligned}
|PF_1| - |PF_2| &= 2a \\
\sqrt{(x-x1)^2 + (y-y1)^2} - \sqrt{(x-x2)^2 + (y-y2)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-0)^2 + (y-(-c))^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2)} &= 2a + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} \\
(\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2})^2 &= (2a + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2})^2 \\
((y+c)^2 + x^2) &= (4a^2 + 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2} + ((y - \\
y^2 + 2yc + c^2 + x^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2} + y^2 - 2 \\
2yc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2} - 2yc \\
4yc - 4a^2 &= 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2}
\end{aligned}
$$

Dibagi 4:

$$
\begin{aligned}
(yc - a^2)^2 &= (a\sqrt{(y-c)^2 + x^2})^2 \\
y^2c^2 - 2yca^2 + a^4 &= a^2((y-c)^2 + x^2) \\
y^2c^2 - 2yca^2 + a^4 &= a^2(y^2 - 2yc + c^2 + x^2) \\
y^2c^2 - 2yca^2 + a^4 &= a^2y^2 - 2yca^2 + a^2c^2 + a^2x^2 \\
y^2c^2 + a^4 &= a^2y^2 + a^2c^2 + a^2x^2 \\
y^2c^2 - a^2y^2 - a^2x^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\
y^2(b^2) - a^2x^2 &= a^2(b^2) \\
\tfrac{y^2b^2}{a^2b^2} - \tfrac{a^2x^2}{a^2b^2} &= \tfrac{a^2b^2}{a^2b^2} \\
\tfrac{y^2}{a^2} - \tfrac{x^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}
$$

Dengan unsur-unsur (Fonna & Murralin, 2018):

- Titik pusat : (0,0)
- Titk fokus : F1 (-c,0) dan F2 (c,0)
- Titik puncak : A(-a,0) dan B(a,0)
- Sumbu utama adalah sumbu Y
- Sumbu sekawan adalah sumbu X



Gambar 5.3: Hiperbola dengan Pusat di Titik $O(0,0)$.

- Panjang sumbu nyata = 2a
- Panjang sumbu imajiner: 2b
- Panjang latus rectum: $\frac{2b^2}{a}$
- Eksentrisitas: $e = \frac{c}{a}$
- Persamaan direktris: $y = \pm\frac{a^2}{c}$

10.3.2 Persamaan Hiperbola dengan Titik Pusat M(p,q)

HORIZONTAL

Persamaan hiperbola yang berfokus pada sumbu utama dan sejajar pada sumbu x, persamaannya sebagai berikut (Handayani dkk., 2015):

$$\boxed{\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1}$$

Bukti : Menggunkaan transalasi

Diketahui matriks translasi $T = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+x \\ q+y \end{bmatrix}$$

$$x' = p + x \to x = x' - p$$

$$y' = q + y \to y = y' - q$$

Persamaan hiperbola horizontal
Persamaan awal:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Substitusikan ke persamaan awal:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

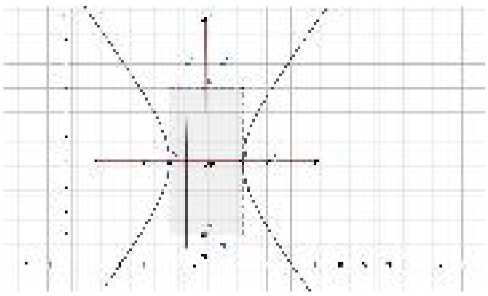
$$\frac{(x'-p)^2}{a^2} - \frac{(y'-q)^2}{b^2} = 1$$

atau

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

Dengan:

- Titik pusat $M(p, q)$
- Titik fokus $F(p \pm c, q)$
- Titik puncak $(p \pm a, q)$
- Panjang sumbu mayor atau sumbu nyata $= 2a$
- Panjang sumbu minor atau sumbu imajiner$= 2b$
- Panjang latus rectum : $\frac{2b^2}{a}$



Gambar 5.4: Hiperbola Berbentuk Horizontal dengan Pusat di Titik $M(p, q)$.

- Persamaan asimptot : $y - q = \pm \frac{b}{a}(x - p)$
- Persamaan direktriks : $x = p \pm \frac{a^2}{c}$
- Persamaan eksentersitas : $e = \frac{c}{a}$

VERTIKAL

Persamaan hiperbola yang berfokus pada sumbu utama dan sejajar pada sumbu y, persamaannya sebagai berikut:

$$\frac{(y-q)^2}{a^2} - \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$$

Pembuktian

Persamaan hiperbola vertikal

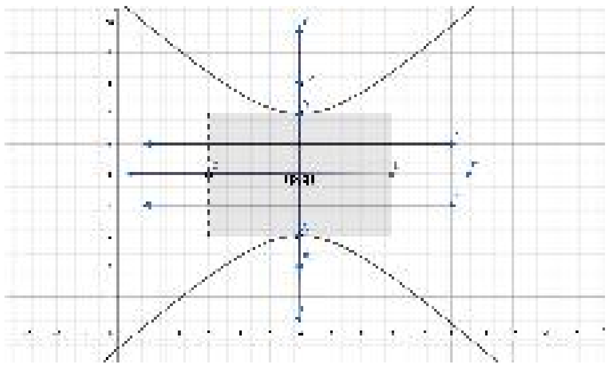
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y'-q)^2}{a^2} - \frac{(x'-p)^2}{b^2} = 1$$

atau

$$\frac{(y-q)^2}{a^2} - \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$$

Dengan:



Gambar 5.5: Hiperbola Berbentuk Vertikal dengan Pusat di Titik $M(p, q)$.

- Titik pusat : M(p,q)
- Titik fokus $F(p, q \pm c)$
- Titik puncak $A(p, q \pm a)$
- Panjang sumbu mayor atau sumbu nyata = 2a
- Panjang sumbu minor atau sumbu imajiner= 2b
- Panjang latus rectum :

$$\frac{2b^2}{a}$$

- Persamaan asimtot :

$$y - q = \pm\frac{q}{b}(x - p)$$

- Persamaan direktriks :

$$x = p \pm \frac{a^2}{c}$$

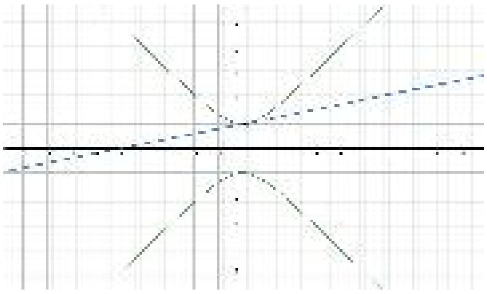
- Persamaan eksentersitas :

$$e = \frac{c}{a}$$

5.4 Persamaan Garis Singgung Hiperbola

10.4.1 Persamaan Garis Singgung Hiperbola

Persamaan garis singgung di kurva hiperbola dibagi menjadi dua, yaitu berada di titik (0,0) dan di titik M(p,q).



Gambar 5.6: Garis Singgung Hiperbola dalam Kurva.

PUSAT O(0,0)

Diberi persamaan hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dan $P(x_2, y_2)$ pada hiperbola, maka berlaku

$$\tfrac{x_2^2}{a^2} - \tfrac{y_2^2}{b^2} = 1$$

$$atau$$

$$b^2x_2^2 - a^2y_2^2 = a^2b^2......(1)$$

dan $T(x_1, y_1)$ pada hiperbola maka berlaku

$$\tfrac{x_1^2}{a^2} - \tfrac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$atau$$

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2......(2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), berlaku:

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = b^2x_2^2 - a^2y_2^2$$

$$atau$$

$$\begin{aligned}
b^2x_1^2 - b^2x_2^2 &= a^2y_1^2 - a^2y_2^2 \\
b^2(x_1^2 - x_2^2) &= a^2(y_1^2 - y_2^2) \\
b^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) &= a^2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) \\
\tfrac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)} &= \tfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}
\end{aligned}$$

Persamaan garis PT adalah

$$y - y_1 = \tfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x - x_1)$$

atau

$$y - y_1 = \tfrac{b^2(x_1+x_2)(x-x_1)}{a^2(y_1+y_2)}$$

Jika P mendekati T sedemikian hingga P berimpit dengan T sehingga $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$, akibatnya $\overrightarrow{PT}$ menjadi garis singgung di titik T, persamaannya adalah (Lumbantoruan, 2021)

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= \tfrac{b^2(2x_1)}{a^2(2y_1)}(x - x_1) \\
y - y_1 &= \tfrac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \\
a^2y_1(y - y_1) &= b^2x_1(x - x_1) \\
a^2y_1y - a^2y_1^2 &= b^2x_1x - b^2x_1^2 \\
b^2x_1x - a^2y_1y &= b^2x_1^2 - a^2y_1^2
\end{aligned}$$

Kedua ruas persamaan dibagi dengan a^2b^2

$$\begin{aligned}
\tfrac{x_1x}{a^2} - \tfrac{y_1y}{b^2} &= \tfrac{x_1x^2}{a^2} - \tfrac{y_1y^2}{b^2} \\
\tfrac{x_1x}{a^2} - \tfrac{y_1y}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

Persamaan garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ di titik $T(x_1, y_1)$ adalah

$$\boxed{\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1}$$

Dengan menggunakan analisis yang sama, persamaan garis singgung hiperbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ di titik $T(x_1, y_1)$ adalah:

$$\boxed{\frac{y_1y}{a^2} - \frac{x_1x}{b^2} = 1}$$

PUSAT M(p,q)

Diberikan persamaan hiperbola $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ dan P(x_1, y_1) serta T(x_2, y_2) pada hiperbola, maka berlaku :

$$b^2(x_1 - p)^2 - a^2(y_1 - q)^2 = a^2b^2......(1)$$
$$b^2(x_2 - p)^2 - a^2(y_2 - q)^2 = a^2b^2......(2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) tersebut berlaku :

$$b^2(x_1 - p)^2 - a^2(y_1 - q)^2 = b^2(x_2 - p)^2 - a^2(y_2 - q)^2$$

$$atau$$

$$\begin{aligned} b^2(x_1 - p)^2 - b^2(x_2 - p)^2 &= +a^2(y_1 - q)^2 - a^2(y_2 - q)^2 \\ b^2((x_1 - p)^2 - (x_2 - p)^2) &= a^2((y_1 - q)^2 - (y_2 - q)^2) \end{aligned}$$

Misalkan bahwa

$$j = (x_1 - p); k = (x_2 - p); l = (y_1 - q); m = (y_2 - q)$$

maka berlaku

$$\begin{aligned}
b^2(j^2-k^2) &= a^2(l^2-m^2) \\
b^2(j-k)(j+k) &= a^2(l-m)(l+m) \\
\tfrac{b^2(j+k)}{a^2(l+m)} &= \tfrac{(l-m)}{(j-k)} \\
\tfrac{b^2((x_1-p)+(x_2-p))}{a^2((y_1-q)+(y_2-q))} &= \tfrac{(y_1-q)-(y_2-q)}{(x_1-p)-(x_2-p)}
\end{aligned}$$

Persamaan garis PT tersebut

$$y-y_1=\frac{b^2((x_1-p)+(x_2-p))}{a^2((y_1-q)+(y_2-q))}(x-x_1)$$

Jika P mendekati T sedemikian hingga P berimpit dengan T sehingga $x_2-p=x_1-p$ dan $y_2-q=y_1-q$, akibatnya (PT) menjadi garis singgung di titik T, persamaanya adalah

$$y-y_1=\frac{b^2((x_1-p)+(x_2-p))}{a^2((y_1-q)+(y_2-q))}(x-x_1)$$

$$y-y_1=\frac{b^2((x_1-p)+(x_1-p))}{a^2((y_1-q)+(y_1-q))}(x-x_1)$$

$$y-y_1=\frac{b^2(x_1-p)}{a^2(y_1-q)}(x-x_1)$$

$$(y-y_1)(a^2(y_1-q))=(b^2(x_1-p))(x-x_1)$$

$$ya^2(y_1-q)-y_1a^2(y_1-q)=xb^2(x_1-p)-x_1b^2(x_1-p)$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan a^2b^2

$$\frac{y(y_1-q)}{b^2}-\frac{y_1(y_1-q)}{b^2}=\frac{x(x_1-p)}{a^2}-\frac{x_1(x_1-p)}{a^2}$$

Dengan menggunakan pendekatan matrik translasi seperti pada persamaan garis singgung di titik $M(p,q)$ didapatkan

$$x_1=p+x\rightarrow x=x_1-p$$

$$y_1 = q + y \rightarrow y = y_1 - q$$

Sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned}
\tfrac{y(y_1-q)}{b^2} - \tfrac{y_1(y_1-q)}{b^2} &= \tfrac{x(x_1-p)}{a^2} - \tfrac{x_1(x_1-p)}{a^2} \\
\tfrac{(y_1-q)(y_1-q)}{b^2} - \tfrac{(q+y)(y_1-q)}{b^2} &= \tfrac{(x_1-p)(x_1-p)}{a^2} - \tfrac{(p+x)(x_1-p)}{a^2} \\
\tfrac{(y_1-q)(y_1-q)}{b^2} - \tfrac{(y_1-q)^2}{b^2} &= \tfrac{(x_1-p)(x_1-p)}{a^2} - \tfrac{(x_1-p)^2}{a^2} \\
\tfrac{(x_1-p)^2}{a^2} - \tfrac{(y_1-q)^2}{b^2} &= \tfrac{(x_1-p)(x_1-p)}{a^2} - \tfrac{(y_1-q)(y_1-q)}{b^2}
\end{aligned}$$

Maka persamaan garis singgungnya adalah :

$$1 = \frac{(x-p)(x_1-p)}{a^2} - \frac{(y-q)(y_1-q)}{b^2}$$

Dengan menggunakan analisis yang sama, persamaan garis singgung hiperbola berbentuk vertikal di titik $T(x_1, y_1)$ adalah :

$$1 = -\frac{(x-p)(x_1-p)}{b^2} + \frac{(y-q)(y_1-q)}{a^2}$$

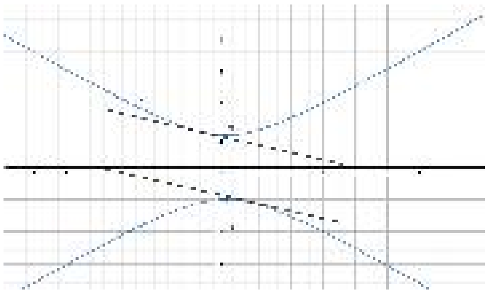
10.4.2 Persamaan Garis Singgung Diketahui Gradiennya

Persamaan garis singgung pada hiperbola dengan gradien tertentu menjadi dua, yaitu berpusat di titik $(0, 0)$ dan di titik $M(p, q)$ (Susilo & Hariyani, 2019).

PUSAT O(0,0)

Persamaan garis singgung pada hiperbola dengan gradien tertentu yang berpusat di $(0, 0)$ dapat diketahui dengan menggunakan persamaan hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Gambar 5.7: Garis Singgung Hiperbola Bergradien.

yang memiliki gradien m dengan persamaan $y = mx + p$.

Melalui persamaan tersebut dapat diketahui absis titik potong garis dan hiperbola yaitu:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+p)^2}{b^2} = 1$$

Atau

$$\begin{aligned} b^2x^2 - a^2m^2 - 2a^2mpx - a^2p^2 &= a^2b^2 \\ (b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mpx - a^2p^2 - a^2b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan diskriminan, didapatkan :

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= 4a^4m^2p^2 - 4(b^2 - a^2m^2)(-a^2p^2 - a^2b^2) \\ &= 4a^4m^2p^2 - 4(a^4m^2p^2 + a^4b^2m^2 - a^2b^2p^2 - a^2b^4) \\ &= 4a^4m^2p^2 - 4a^4m^2p^2 - 4a^4b^2m^2 + 4a^2b^2p^2 + 4a^2b^4 \\ D &= 4a^2b^2(-a^2m^2 + b^2 + p^2) \end{aligned}$$

Garis singgung hiperbola memiliki syarat yaitu:

$$\begin{aligned} D = 0 \rightarrow (-a)^2m^2 + b^2 + p^2 &= 0 \\ p^2 &= a^2m^2 - b^2 \\ p &= \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2} \end{aligned}$$

Berdasarkan analisis, persamaan garis singgung hiperbola yang memiliki persamaan umum $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ memiliki gradien m yaitu :

$$\boxed{y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}}$$

Dengan analasisi yang sama, persamaan garis singgung hiperbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ memiliki gradien m yaitu :

$$\boxed{y = mx \pm \sqrt{a^2 - m^2b^2}}$$

PUSAT $M(p, q)$

Persamaan garis singgung pada hiperbola dengan diketahui gradien tertentu dengan pusat hiperbola di titik $M(p, q)$ dapat diketahui dengan menggunakan persamaan hiperbola $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$.

Diketahui persamaan garis dengan suatu gradien tertentu adalah :

$$y - q = m(x - p) + k$$

Dari persamaan garis singgung hiperbola yang berpusat di (0,0) diperoleh bahwa $p = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$, dimana p sama dengan k. Jika disubstitusikan pada persamaan, maka didapatkan persamaan garis singgung yang berpusat di $M(p, q)$ yaitu :

$$\boxed{y - q = m(x - p) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}}$$

atau

$$\boxed{y - q = m(x - p) \pm \sqrt{a^2 - m^2b^2}}$$

Contoh Soal:

Persamaan garis singgung hiperbola $\frac{(y+4)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$ yang tegak lurus $3x + y + 4 = 0$ adalah...

Penyelesaian:

Diketahui bahwa titik pusat hiperbola berada di (2,-4). Gradien dari persamaan garis $3x + y + 4 = 0$ adalah :

$y = -3x - 4$; $m = -3$

Karena garis singgung tegak lurus, maka gradien garis singgungnya adalah

$m_1 \times m_2 = -1$

$-3 \times m_2 = -1$

$m_2 = \frac{1}{3}$

Dari persamaan dapat diketahui nilai $a^2 = 9$ dan $b^2 = 16$. Maka persamaan garis singgung hiperbola tersebut adalah:

$m = \frac{1}{3} \rightarrow m^2 = \frac{1}{9}$

$y - q = m(x - p) \pm \sqrt{b^2 - a^2m^2}$

$y + 4 = \frac{1}{3}(x - 2) \pm \sqrt{16 - 9 \times \frac{1}{9}}$

$y + 4 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \pm \sqrt{15}$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} - 4 \pm \sqrt{15}$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} - \frac{12}{3} \pm \sqrt{15}$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{14}{3} \pm \sqrt{15}$

$3y = x - 14 \pm 3\sqrt{15}$

$3y - x = -14 \pm 3\sqrt{15}$

5.5 Latihan Soal

Selesaikan soal-soal dibawah ini

1. Tentukan persamaan hiperbola jika diketahui :
    - Titik fokus (2,3) dan (6,3) dengan panjang sumbu nyata 2
    - Titik fokus (-1,-3) dan (-1,5) serta panjang sumbu imajiner 4
2. Tentukan persamaan garis singgung pada Hiperbola $\frac{(x-4)^2}{24} - \frac{(y+5)^2}{2}$ yang sejajar dengan garis $x + 2y = -12$!
3. Tentukan persamaan garis asimtot hiperbola $3y^2 - y^2 = 48$!
4. Tentukan titik puncak, titik focus, persamaan garis asimstot, eksentrisitas hiperbola, dan panjang Latus Rectum dari elips $9x^2 - 16y^2 = 400$!
5. Diketahui hiperbola $-9x^2 + 16y^2 - 18x + 96y - 9 = 0$, Tentukanlah puncak dan fokus!
6. Tentukan persamaan hiperbola dengan pusat di $(-5, 4)$, puncaknya di $(-11, 4)$ dan salah satu asimtotnya adalah $4x - 3y + 32 = 0$!
7. Persamaan garis singgung hiperbola $4x^2 - y^2 - 40x - 4y + 48 = 0$ di titik $(9, 2)$ adalah
8. Persamaan garis singgung pada hiperbola dengan persamaan $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 23 = 0$ yang sejajar dengan garis $y = 2x - 1$ adalah
9. Persamaan garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9}$ yang sejajar dengan garis $y - 2x + 4 = 0$ adalah
10. Persamaan garis singgung hiperbola $\frac{(y+4)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{1} = 1$ yang tegak lurus garis $3x + y + 4 = 0$ adalah
11. Persamaan garis singgung hiperbola $\frac{(y+1)^2}{8} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$ di titik $(3, 3)$ adalah
12. Persamaan garis singgung hiperbola $6x^2 - 15y^2 - 12x - 30y + 99 = 0$ di titik $(4, 3)$ adalah

13. Tentukan koordinat titik puncak, titik fokus, panjang latus rektum, persamaan direktriks, eksentrisitas, dan persamaan asimtot dari hiperbola $9(x+2)^2 - 16(y-3)^2 = 144$!
14. Sebuah hiperbola mempunyai fokus $(-6, 0)$ dan $(4, 0)$. Salah satu titik potong hiperbola dengan sumbu x adalah $(3, 0)$. Tentukan asimtot hiperbola tersebut!
15. Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ yang tegak lurus garis $4x + 3y - 7 = 0$!

5.6 Daftar Pustaka

1. Pasandaran, R.F. dan Ma'rufi. 2018. Geometri Analitik Bidang dan Ruang. Sulawesi Selatan. Global Research and Consulting Institute (Global- RCI).

2, Panggabean, E. M. 2020. Geometri Analitik Ruang. Penerbit Pustaka Pemuda

3. Yunita, A. dan Hamdunah. 2017. Geometri Analitik. Padang: Rumahkayu Pustaka Utama.
4. Fonna, M., dan Mursalin. 2018. *Pengantar Geometri Analitik*. Aceh Utara : UNIMAL Press.
5. Handayani, S., Mashadi., dan S. Gemawati. 2015. Persamaan Garis Singgung pada Hiperbola. *Jurnal Karismatika*. 1(2) : 33-37.
6. Lumbantoruan, J. H. 2021. *Geometri Analitik*. Perbalingga : CV Eureka Media Aksara.
7. Susilo, D. A., dan S. Hariyani. 2019. *Geometri Analitik (Datar dan Ruang)*. Malang : Kanjuruhan Press.

BAB 6

Parabola

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-01: Mahasiswa mampu menganalisis berbagai bentuk persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar, serta mampu menunjukkan relasi dan transformasi diantara objek-objek Geometri tersebut, melalui pengembangan pemikiran matematis dan penalaran logis dengan mandiri, bermutu, dan terukur.

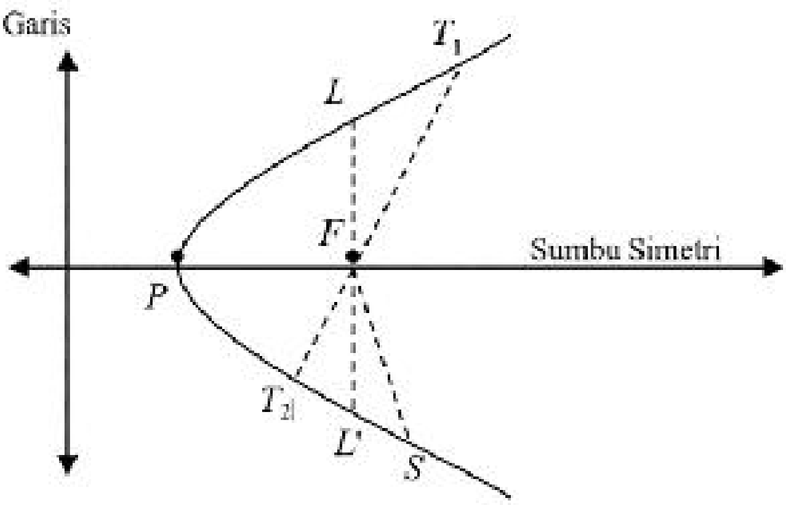
6.1 Pendahuluan

Parabola adalah salah satu kurva geometris paling dasar dan penting dalam matematika dan geometri. Parabola memiliki bentuk yang menarik dan banyak digunakan dalam berbagai bidang, seperti fisika, teknik, dan matematika terapan. Parabola dapat didefinisikan sebagai kurva yang dihasilkan oleh potongan sebuah kerucut dengan bidang sejajar dengan salah satu garis pelukis kerucut. Parabola memiliki sifat-sifat matematika yang unik, seperti memiliki titik puncak (vertex) dan sumbu simetri yang sejajar dengan salah satu sumbu koordinat. Parabola sering digunakan dalam berbagai aplikasi praktis, seperti dalam perhitungan mekanika, perhitungan orbit planet dan satelit, desain mesin, dan konstruksi bangunan. Parabola juga merupakan bagian penting dari topik seperti persamaan kuadrat dan analisis vektor.

Memahami konsep parabola sangat penting dalam matematika dan geometri, karena parabola digunakan sebagai dasar dalam mempelajari berbagai konsep matematika lainnya, seperti persamaan kuadrat, geometri analitik, dan analisis vektor. Oleh karena itu, mempelajari parabola dapat membantu kita memahami berbagai konsep matematika yang kompleks dan mengembangkan keterampilan analisis dan pemecahan masalah yang kuat.

6.2 Definisi Parabola

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama terhadap suatu titik tertentu dan garis tertentu. Titik –tertentu itu disebut titik api (fokus) dan garis tertentu itu disebut direktriks (Hw, 2018).

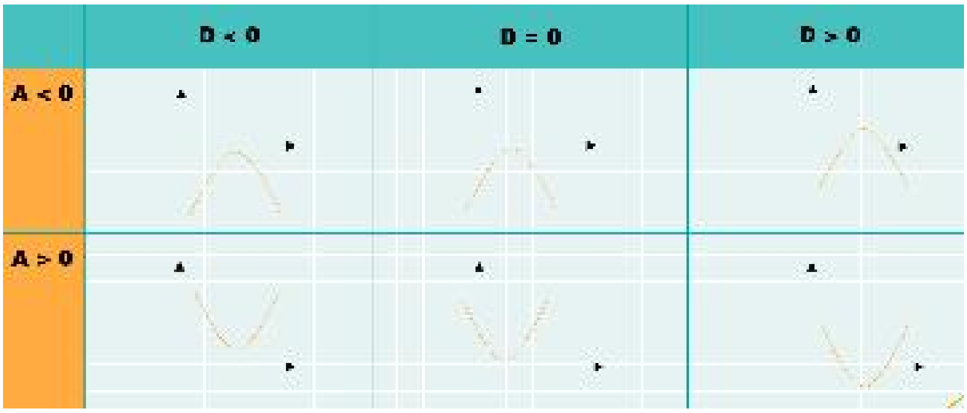


Gambar 6.1: Parabola.

Keterangan :
P = Titik puncak

F = Fokus(titik api)
LL' = Latus rectum (tali busur fokal terpendek)
T1,T2 = Tali busur fokal (tali busur yang melewati fokus)
FS = jari-jari fokal

6.3 Kedudukan Parabola



Gambar 6.2: Kedudukan Parabola.

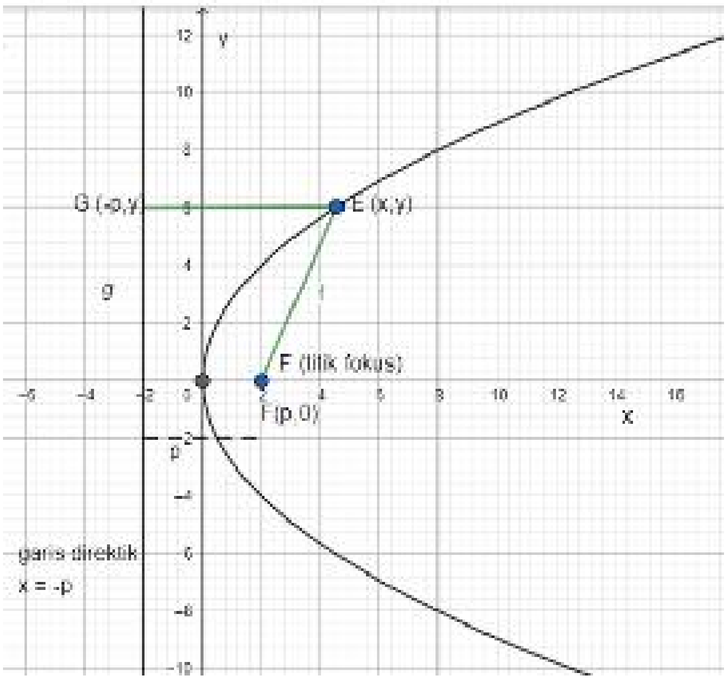
1. Jika $A < 0$ dan $D < 0$ maka parabola tidak mengenai sumbu x dan terbuka ke bawah
2. Jika $A < 0$ dan D=0 maka parabola menginggung sumbu x di satu titik dan terbuka ke bawah
3. Jika $A < 0$ dan $D > 0$ maka parabola memotong sumbu x di dua titik dan terbuka kebawah
4. jika $A > 0$ dan $D < 0$ maka parabola tidak mengenai sumbu x dan terbuka ke atas
5. jika $A > 0$ dan D=0 maka parabola menyinggung sumbu x di satu titik dan terbuka ke atas
6. jika $A > 0$ dan $D > 0$ maka parabola memotong sumbu x di dua titik dan terbuka ke atas

6.4 Persamaan Parabola

6.4.1 Persamaan Parabola di Puncak O(0,0) dan Fokus F(p,0)

A. Parabola Terbuka ke Kanan

O(0,0) merupakan puncak parabola, garis g adalah direktriks parabola dengan persamaan direktriks x = -p, F(p,0) merupakan titik fokus parabola dan E sebarang titik di parabola (Cahyono, 2019). Berdasarkan definisi parabola maka diperoleh :



Gambar 6.3: Parabola dengan Puncak $O(0,0)$ dan Fokus $F(p,0)$.

$$JarakEF = JarakEG$$

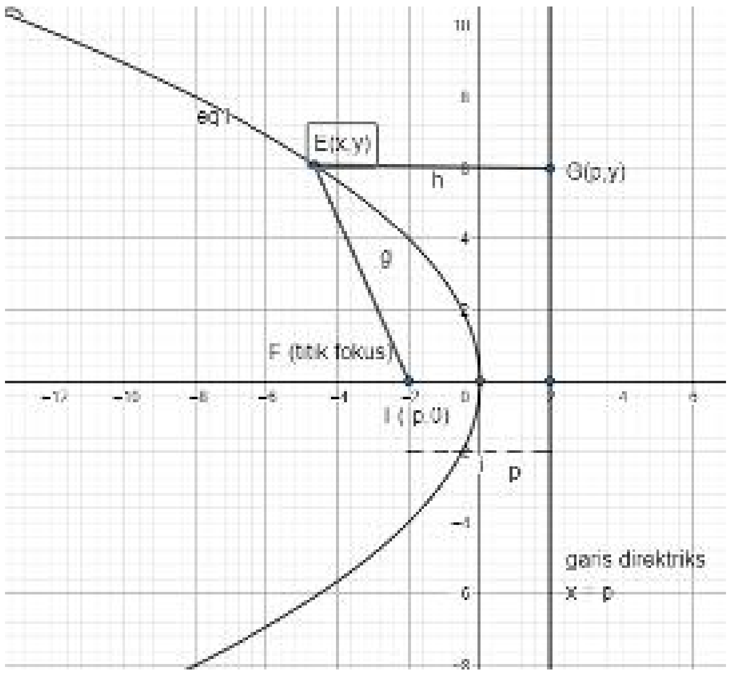
$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$
$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - x^2 - 2px - p^2 = 0$$
$$-4px + y^2 = 0$$
$$y^2 = 4px$$

Dengan demikian persamaan parabola yang berpuncak di O(0,0) dengan fokus F(p,0) adalah $y^2 = 4px$

B. Parabola Terbuka ke Kiri

O(0,0) merupakan puncak parabola, garis g adalah direktriks parabola dengan persamaan direktriks x = p, F(-p,0) merupakan titik fokus parabola dan E sebarang titik di parabola. Berdasarkan definisi parabola maka diperoleh :



Gambar 6.4: Parabola dengan Puncak $O(0,0)$ dan Fokus $F(-p,0)$.

$$
\begin{aligned}
Jarak EF &= Jarak EG \\
\sqrt{(x+p)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{(x-p)^2 + (y-y)^2} \\
(x+p)^2 + y^2 &= (x-p)^2 \\
x^2 + 2px + p^2 + y^2 &= x^2 - 2px + p^2 \\
x^2 + 2px + p^2 + y^2 - x^2 + 2px - p^2 &= 0 \\
4px + y^2 &= 0 \\
y^2 &= -4px
\end{aligned}
$$

Dengan demikian persamaan parabola yang berpuncak di O(0,0) dengan fokus F(-p,0) adalah $y^2 = -4px$.

C. Sifat Persamaan Parabola

1. Jazuli (2019)Sifat Parabola dengan Persamaan $y^2 = -4px$ adalah:
a. Fokus F(p, 0)
b. Direktriks d: x = -p
c. Sumbu simetri y = o(sumbu x)
d. Puncak O(0, 0)
e. Nilai p positif dan parabola membuka ke kanan

2. Sifat parabola dengan persamaan $y^2 = 4px$ adalah:
a. Fokus F(-p, 0)
b. Direktriks d: x = p
c. Sumbu simetri y = o(sumbu x)
d. Puncak O(0, 0)
e. Nilai p negatif dan parabola membuka ke kiri

Contoh Soal 1
Tentukan persamaan parabola dengan puncak di O(0,0) dan fokus pada sumbu x melalui titik (2,8).
Penyelesaian:

Parabola fokus pada sumbu x artinya horizontal dengan puncak O(0,0) sehingga bentuk persamaan umumnya $y^2 = 4px$

$$y^2 = 4px$$

$$8^2 = 4p(2)$$

$$64 = 8p$$

$$p = 8$$

Subtitusikan terhadap persamaan awal, maka persamaan parabola dengan puncak O(0,0) dan titik (2,8) adalah $y^2 = 32x$

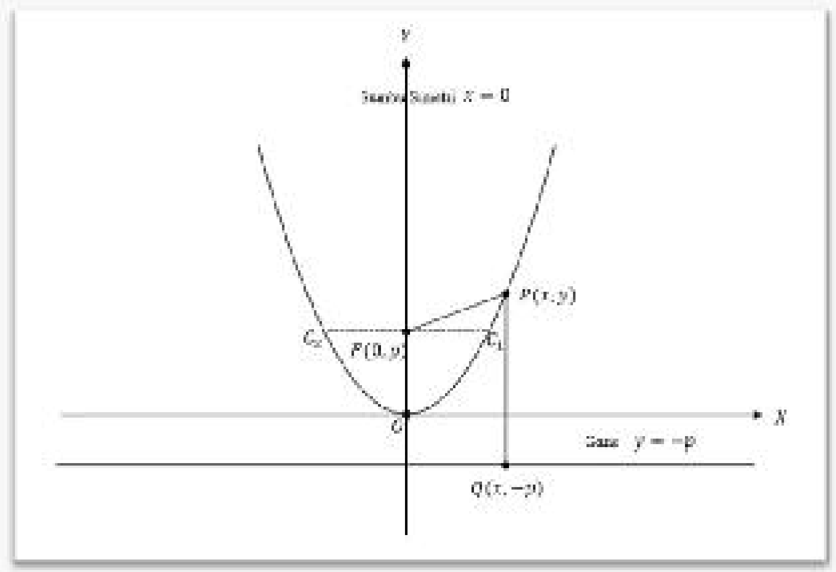
6.5 Persamaan Parabola di Puncak O(0,0) dan Fokus F(0,p)

A. Parabola yang Terbuka ke Atas

Persamaan umum dari suatu parabola dapat diperoleh dengan mengkombinasikan definisi di atas dan rumus jarak. Dengan tidak mengurangi keumuman, kita dapat menganggap parabola yang ditunjukkan pada gambar di atas memiliki titik puncak di $O(0, 0)$ dan memiliki titik fokus di $(0, p)$. Seperti yang ditunjukkan oleh gambar di atas, parabola yang dimaksud memiliki direktriks dengan persamaan $y = -p$ (Mashadi, 2018).

Titik P(x,y) adalah sembarang titik pada parabola. Berdasarkan definisi diperoleh:

$$JarakPF = JarakPQ$$



Gambar 6.5: Parabola dengan Puncak $O(0,0)$ dan Fokus $F(0,p)$.

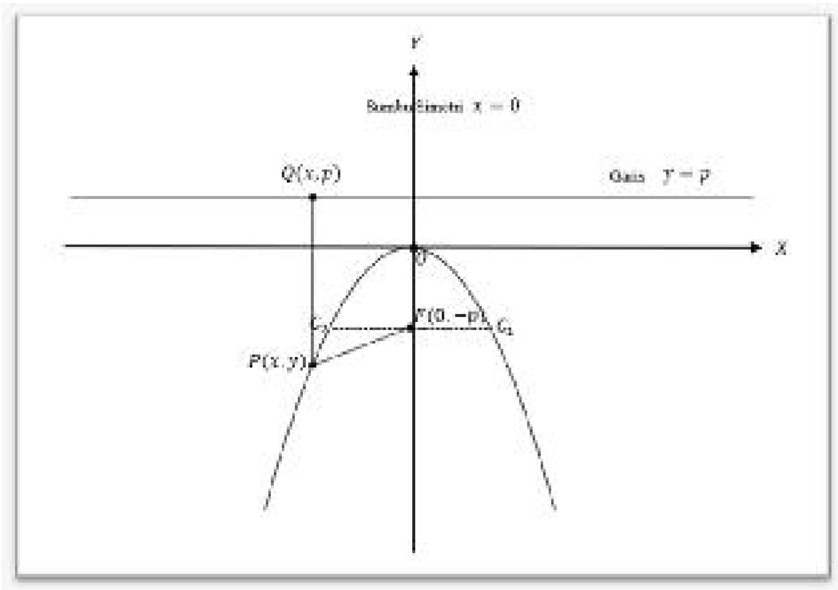
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$
$$x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$$
$$x^2+y^2-y^2+p^2-p^2-2py-2py = 0$$
$$x^2-4py = 0$$
$$x^2 = 4py$$

Jadi, persamaan parabola di puncak O(0,0), fokus F(0,p)dengan garis arah y=-p , dan parabola yang terbuka ke atas adalah

$$x^2 = 4py$$

B. Parabola yang Terbuka ke Bawah

Persamaan umum dari suatu parabola dapat diperoleh dengan mengkombinasikan definisi di atas dan rumus jarak. Dengan tidak



Gambar 6.6: Parabola dengan Puncak $O(0,0)$ dan Fokus $F(0,-p)$.

mengurangi keumuman, kita dapat menganggap parabola yang ditunjukkan pada gambar di atas memiliki titik puncak di $O(0,0)$ dan memiliki titik fokus di $(0,-p)$. Seperti yang ditunjukkan oleh gambar di atas, parabola yang dimaksud memiliki direktriks dengan persamaan $y=p$ (Panggabean, 2021).

Titik P(x,y) adalah sembarang titik pada parabola. Berdasarkan definisi diperoleh:

$$JarakPF = JarakPQ$$
$$\sqrt{(x-0)^2+(y+p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-p)^2}$$
$$x^2+(y+p)^2 = (y-p)^2$$
$$x^2+y^2-y^2+p^2-p^2+2py+2py = 0$$
$$x^2+4py = 0$$
$$x^2 = -4py$$

Jadi, persamaan parabola di puncak O(0,0), fokus F(0,p)dengan garis arah y=p , dan parabola yang terbuka ke bawah adalah

$$x^2 = -4py$$

C. Sifat Persamaan Parabola

1.Sifat parabola dengan persamaan $x^2 = 4py$ adalah:

a. Fokus F(0,p)

b. Direktriks d: y=-p

c. Sumbu simetri x=0(sumbu y)

d. Puncak O(0,0)

e. Nilai p positif dan parabola membuka ke atas

2.Sifat parabola dengan persamaan $x^2 = -4py$ adalah:

a. Fokus F(0,-p)

b. Direktriks d: y=p

c. Sumbu simetri x=0(sumbu y)

d. Puncak O(0,0)

e. Nilai p negatif dan parabola membuka ke bawah

Contoh Soal 2

Tentukan titik fokus, garis direktris, dan panjang latus rektum dari parabola $2x^2 - 24y = 0$ adalah......

Penyelesaian :

$$2x^2 - 24y = 0$$

$$2x^2 = 24y$$

$$x^2 = 12y$$

$$x^2 = 4py$$

$$4py = 12y$$

$$p = 3$$

- Titik fokus adalah (0,p), sehingga titik fokusnya yaitu (0,3).

- Garis direktrisnya yaitu garis y=-p, sehingga persamaan garis direktrisnya yaitu $y = -3$.

- Panjang latus rektum adalah 4p, sehingga panjang latus rektumnya yaitu 12.

6.6 Persamaan Parabola Berpuncak di A(a,b)

A. Persamaan parabola

Persamaan parabola
$(y-b)^2 = 4p(x-a)$
$(y-b)^2 = -4p(x-a)$
$(x-a)^2 = 4p(y-b), p \neq 0$
$(x-a)^2 = -4p(y-b)$

Persamaan parabola yang berpuncak di titik A(a,b) dapat secara langsung diperoleh dengan menggeser gambar sejauh a satuan ke kanan / kiri dan b satuan ke atas / bawah, sehingga diperoleh persamaan parabolanya adalah sebagai berikut (Sunardi dan Erfan , 2014):

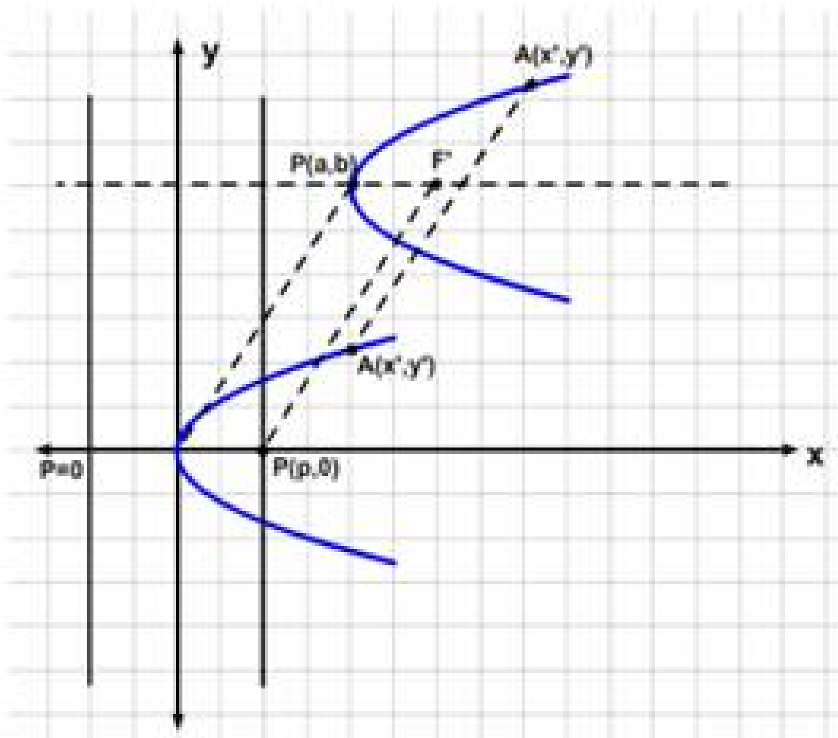
$$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$

B. Pembuktian

Menentukan persamaan parabola yang berpuncak di (a,b) dan titik fokusnya (a + p,b) dapat pula dilakukan dengan cara sebagai berikut. Jika parabola y2=4px. Ditransformasikan dengan transisi (a/b) Yaitu transisi sejauh a satuan ke kanan dan b satuan keatas. Maka akan kita dapatkan parabola baru dengan puncak P'(a,b) dan fokus F'(a+a,b) (Susilo dan Hariyani, 2019). misalkan A (x,y) adalah sembarang titik pada parabola dan A'(x',y') adalah bayangan titik A(x,y) oleh translasi di atas, maka akan kita dapatkan :

$$x = x + a, y` = y + b$$

Dengan demikian. Kita memperoleh hubungan
$x = x' - a$. . . . . 1)



Gambar 6.7: Parabola dengan Puncak di $A(a, b)$.

$y = y' - b$. . . . . 2)
Jika (1) dan (2) disubtitusikan pada persamaan , maka kita peroleh :

$$(y - b)^2 = 4p(x' - a)$$

Karena y' dan x' merupakan peubah, maka lambangnya dapat diganti dengan lambang lain. Untuk mempermudah mendapatkan pengganti y' dengan y dan x' dengan x. sehingga memperoleh :

$$(y - b)^2 = 4p(x - a)$$

Yang merupakan persamaan parabola yang mempunyai titik puncak (a,b) dan fokus (a + p,b).

Contoh soal 3

Untuk masing-masing persamaan parabola berikut, carilah titik puncak, titik fokus, persamaan direktriks, panjang latus rektum, dan persamaan sumbu simetrinya.

$a.) y^2 - 9x + 16y - 8 = 0$
$b.) y^2 + 12y - 16y - 15 = 0$

Penyelesaian :
$a.) y^2 - 9x + 16y - 8 = 0$

$$
\begin{aligned}
y^2 - 9x + 16y - 8 = 0 \\
y^2 + 16x + 16y = 8x + 8 \\
y^2 + 16y + 64 = 8x + 8 + 64 \\
(y + 8)2 = 8x + 72 \\
(y + 8)2 = 8(x + 9)
\end{aligned}
$$

Persamaan ini berbentuk a=-9,b=-8 dan p=2. Jadi,
(i) titik puncak parabola (-9,-8)
(ii) titik fokus: (-7,-8)
(iii) persamaan direktriks: x= - 9 – 2 = - 11
(iv) panjang latus rektum = 8
(v) persamaan sumbu simetri: y = -8

$b.) y^2 + 12x - 6y - 15 = 0$

$$
\begin{aligned}
{}^2 - 6y = -12x + 15 \\
y^2 - 6y + 9 = -12x + 15 + 9 \\
(y - 3)^2 = -12x + 24 \\
(y - 3)^2 = -12(x - 2)
\end{aligned}
$$

Persamaan ini berbentuk (y-b)2=-4p(x-a) dengan a=2,b=3 dan p=-3. Jadi

(i) Titik puncak parabola : (2,3)

(ii) Titik fokus parabola: (2+(-3), 3) = (-1, 3)

(iii) Persamaan direktriks: x = 5

(iv) Panjang latus rektum = 12

(v) Persamaan sumbu simetri: y = 3

6.7 Persamaan Garis Singgung Parabola

6.7.1 Persamaan Garis Singgung Parabola di Puncak O(0,0)

Diketahui persamaan parabola $y^2 = 4px$ dan diberikan sebuah garis dengan gradien b yang mempunyai persamaan garis singgung nya yaitu z: y=mx+k Akan ditentukan persamaan garis singgung dengan gradien b terhadap parabola.

Garis tersebut berpotongan dengan sebuah parabola, maka akan menghasilkan persamaan:

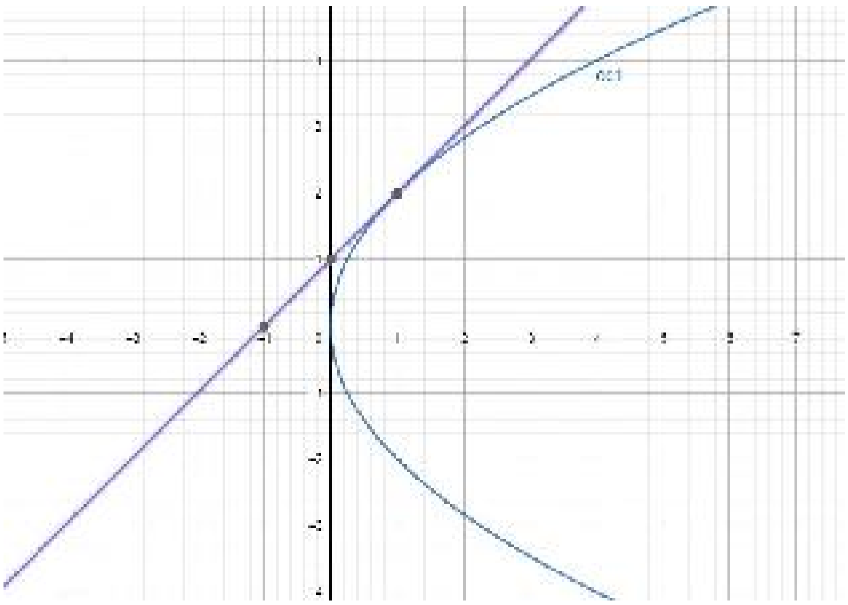
$$(mx + k)^2 = 4(px)$$

$$m^2x^2 + (2mk - 4p)x + k^2 = 0$$

Persamaan diatas merupakan persamaan kuadrat dalam x, yang kemudian dapat ditentukan diskriminan nya dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$b^2 - 4ac$$

$$(2mk - 4p)^{2\smile}4m^2k^2 = 0$$



Gambar 6.8: Parabola dengan Puncak $O(0, 0)$.

Hasil perhitungan diskrimanan tersebut terdiri atas 3 kemungkinan. Dimana untuk memenuhi syarat garis z menyinggung parabola haruslah memiliki nilai diskriminan sama dengan 0, dengan perhitungan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
D &= (2mk - 4p)^{2\smile}4m^2k^2 = 0 \\
&= p^{2\smile}pmk = 0 \\
&= p(p - mk) = 0 \\
&= k = \frac{p}{m}
\end{aligned}
$$

Jadi, garis singgung dengan gradien m pada parabola $y^2 = 4px$ adalah:

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

Maka, persamaan garis singgung parabola dengan gradien m, adalah seperti tabel berikut ini:

Persamaan Parabola	**Persamaan Garis Singgung Parabola**
$y^2 = 4px$	$y = mx + \frac{p}{m}$
$y^2 = -4px$	$y = mx - \frac{p}{m}$
$x^2 = 4py$	$y = mx - pm^2$
$x^2 = 4py$	$y = mx + pm^2$

Contoh Soal 4

Persamaan garis singgung pada prabola $y^2 = 12x$ yang tegak lurus garis $y = \frac{1}{6}x + 2$ adalah

Penyelesaian:

Gradien dari garis singgung yang tegak lurus $y = \frac{1}{6}x + 2$ adalah $m1 = \frac{1}{6}$ maka berlaku $m1 \times m2 = -1$, kemudian $m2 = -\frac{1}{\frac{1}{6}} = -6$

$$y^2 = 4px$$

$$12x = 4px$$

Maka:

$$p = 3$$

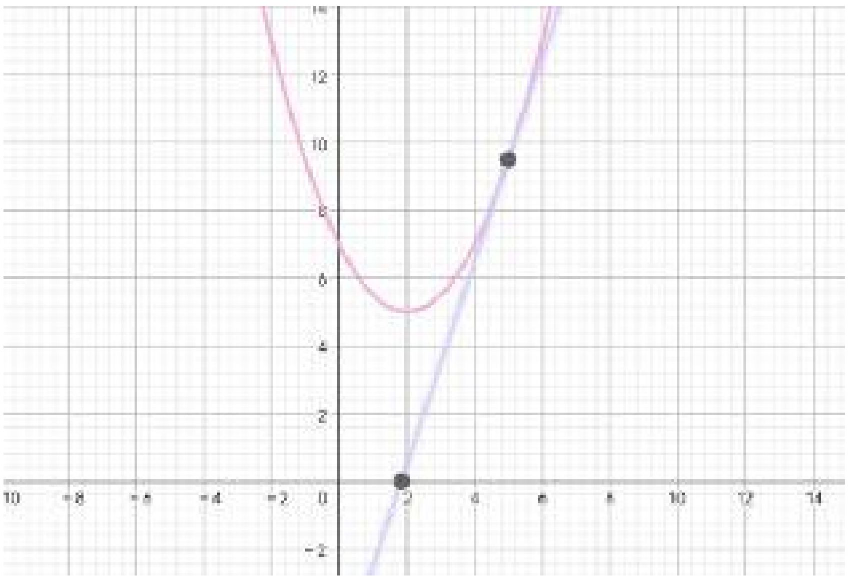
Sehingga persamaan garis singgung nya adalah:

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

$$y = -3 + \frac{3}{-6}$$

6.7.2 Persamaan Garis Singgung Parabola di Puncak (a,b)

Untuk persamaan parabola dengan puncak (a,b) yang memiliki garis singgung $y = mx + n$, maka persamaan garis singgungnya dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan ke dalam persamaan parabola.



Gambar 6.9: Parabola dengan Puncak (a, b) dan Garis Singgung $y = mx + n$.

Misal akan dicari persamaan garis singgung parabola yang memiliki bentuk umum $(x-a)^2 = 4p(y-b)$, maka:

$$(x-a)^2 = 4p(mx+n-b)$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = 4pmx + 4p(n-b)$$
$$x^2 - 2ax - 4pmx + a^2 - 4p(n-b) = 0$$
$$x^2 + (-2a - 4pm)x + a^2 - 4p(n-b) = 0$$

Syarat garis menyinggung parabola adalah D=0

$$(-2a-4pm)^2 - 4 * 1 * (-4p(n-b)) + a^2 = 0$$
$$4a^2 + 16pma + 16pm^2 + 16p(n-b) - 4a^2 = 0$$
$$16pma + 16p^2m^2 + 16p(n-b) = 0$$
$$----------------------: 16p$$

$$ma + pm^2 + (n - b) = 0$$
$$(n - b) = -ma - pm^2$$
$$n = -ma - pm^2 + b$$

Kemudian substitusi nilai $n = -ma - pm^2 + b$ pada $y = mx + n$

$$y = mx + (-ma - pm^2 + b)$$
$$y = m(x - a) = pm^2 + b$$
$$y - b = m(x - a) - pm^2$$

Dengan pendekatan yang sama, diperoleh:

Persamaan Parabola	**Persamaan Garis Singgung**
$(y-b)^2 = 4p(x-a)$	$(y-b) = m(x-a) - \frac{p}{m}$
$(y-b)^2 = -4p(x-a)$	$(y-b) = m(x-a) + \frac{p}{m}$
$(x-a)^2 = 4p(y-b)$	$(y-b) = m(x-a) - pm^2$
$(x-a)^2 = -4p(y-b)$	$(y-b) = m(x-a) + pm^2$

Contoh Soal 5

Tentukan persamaan garis singgung parabola $x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ yang sejajar dengan garis $3x - 4y + 5 = 0$

Penyelesaian:

Pertama, ubah terlebih dahulu persamaan $x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ ke dalam bentuk umumnya

$$x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 = 2y + 4$$
$$x^2 - 6x + 9 = 2(y + 2)$$
$$(x - 3)^2 = 2(y + 2)$$

Sehingga, diperoleh nilai $a = 3$, $b = -2$, dan $p = \frac{1}{2}$

Langkah selanjutnya adalah menentukan gradien dari garis $3x-4y+5 = 0$, yaitu $m = \frac{3}{4}$. Karena persamaan garis singgung yang akan dicari sejajar dengan garis tersebut maka berlaku $m1 = m2 = \frac{3}{4}$

Persamaan garis singgung parabola $x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ yang sejajar dengan garis $3x - 4y + 5 = 0$ adalah sebagai berikut:

$$(y - b) = m(x - a) - pm^2$$

$$\begin{aligned}
(y - (-2)) &= \frac{3}{4}(x - 3) - \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2 \\
y + 2 &= \frac{3}{4}x - \frac{9}{4} - \frac{9}{32} \\
y &= \frac{3}{4}x - \frac{9}{4} - \frac{9}{32} - 2 \\
y &= \frac{3}{4}x - \frac{145}{32}
\end{aligned}$$

6.7.3 Persamaan Garis Singgung Parabola melalui titik (x_1, y_1)

Berikut merupakan persamaan Garis Singgung Parabola melalui titik (x_1, y_1) yaitu

Mencari persamaaan garis singgung y yang melalui titik P(x_1, y_1) yang terletak pada parabola $y^2 = -4px$. Maka persamaan garis singgungnya yaitu:

$$y_1y = -2p(x + x_1)$$

PEMBUKTIAN

Pembuktian garis singgung melalui titik (x_1, y_1) dan misalkan gradiennya m maka persamaannya dapat ditulis

$$y - y_1 = m(x, x_1)$$

Persamaan Parabola	**Persamaan Garis Singgung Parabola**
$y^2 = 4px$	$y_1y = 2p(x + x_1)$
$y^2 = -4px$	$y_1y = -2p(x + x_1)$
$x^2 = 4py$	$x_1x = 2p(y + y_1)$
$x^2 = -4py$	$x_1x = -2p(y + y_1)$
$(y - b)^2 = 4p(x - a)$	$(y - b)(y_1 - b) = 2p(x + x_1 - 2a)$
$(y - b)^2 = -4p(x - a)$	$(y - b)(y_1 - b) = -2p(x + x_1 - 2a)$
$(x - a)^2 = 4p(y - b)$	$(x - a)(x_1 - a) = 2p(y + x_1 - 2b)$
$(x - a)^2 = -4p(y - b)$	$(x - a)(x_1 - a) = -2p(y + x_1 - 2b)$

kemudian gradien m dapat dicari dengan :

$$x = \frac{y^2}{-4p}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{(-4p)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{(-2p)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2p}{(y)}$$

kemudian nilai m tersebut disubtitusi ke persamaan $y - y_1 = m(x, x_1)$ sehingga diperoleh :

$$y - y_1 = \frac{-2p}{y}(x, x_1)$$

$$y_1(y - y_1) = -2px + 2px_1$$

$$y_1y - y_1^2 = -2px + 2px_1$$

$$y_1y - (-4px_1) = -2px + 2px_1$$

$$y_1y + 4px_1 = -2px + 2px_1$$

$$y_1y = -2px - 2px_1$$

$$y_1 y = -2p(x + x_1)$$

m Dengan demikian persamaan garis singgung terbukti dan yang dimaksud yaitu

$$y_1 y = -2p(x + x_1)$$

Contoh Soal 6

Tentukan persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = -4x$ di titik(-1,-2)

Penyelesaian:

- Mencari nilai p terlebih dahulu

$$y^2 = -4px$$

$$-4p = -4$$
$$p = \frac{-4}{-4}$$
$$p = 1$$

- Subtitusi kedalam rumus persamaan garis singgung

$$y_1 y = -2p(x + x_1)$$

$$-2y = -2.1(x + -1)$$
$$-2y = -2(x - 1)$$
$$-2y = -2x + 2$$
$$-y = -x + 1$$
$$x - y - 1 = 0$$

Jadi persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = -4x$ di titik (-1,-2) yaitu x-y-1=0

Persamaan garis singgung parabola $(y-b)^2 = 4p(x-a)$ di titik P(x_1, y_1) yaitu

$$(y - b)(y_1 - b) = 2p(x + x_1 - 2a)$$

PEMBUKTIAN

$$(y_1 - b)^2 = 4p(x_1 - a)$$
$$(y_1)^2 - 2by_1 + b^2 = 4p(x_1 - a)$$
$$(y_1)^2 = 2by_1 - b^2 + 4px(x_1 - a)$$

Persamaan garis singgung melalui P (x_1, y_1) yaitu

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Dilanjut dengan mencari gradien m dengan cara seperti berikut :

$$(y - b)^2 = 4p(x - a)$$
$$(x - a) = \frac{1}{4p}(y - b)^2$$
$$\frac{d(x - a)}{dy} = \frac{1}{4p}.2(y - b)$$
$$\frac{d(x - a)}{dy} = \frac{(y - b)}{2p}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2p)}{(y - b_)}$$

Sehingga dititik (x_1, y_1) nilai m =

$$\frac{(2p)}{(y - b)}$$

Kemudian subtitusi persamaan1.3 ke 1.2

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$
$$(y - y_1) = \frac{(2p)}{(y - b)}(x - x_1)$$
$$(y - y_1)(y_1 - b) = 2p(x - x_1)$$
$$yy_1 - by - y_1^2 + by_1 = 2p(x - x_1)$$

Subtitusi persamaan 1.1 ke persamaan 1.4

$$yy_1 - by - y_1^2 + by_1 = 2p(x - x_1)$$

$$yy_1 - by - (2by_1 - b^2 + 4px(x_1 - a)) + by_1 = 2px - 2px_1$$
$$yy_1 - by - by_1 + b^2 = 4px_1 - 4pa + 2px - 2px_1$$
$$(y - b)(y_1 - b) = 2px_1 - 4pa + 2px$$
$$(y - b)(y_1 - b) = 2p(x - x_1 - 2a)$$

Jadi persamaan garis singgung pada parabola $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ di titik P (x_1, y_1) yaitu

$$(y - b)(y_1 - b) = 2p(x + x_1 - 2a)$$

Contoh soal 7

Mencari persamaan garis singgung pada parabola $(x - 1)^2 = -3(y - 2)$ pada titik (2,-1)

Penyelesaian: Mencari nilai p terlebih dahulu Sesuai dengan rumus

$$(x - a)^2 = -4p(y - b)$$

Maka

$$(x - 1)^2 = -3(y - 2)$$
$$-4p = -3$$
$$p = \frac{-3}{-4}$$
$$p = \frac{3}{4}$$

Subtitusi kedalam persamaan garis singgung

$$(x - a)(x_1 - a) = -2p(y + x_1 - 2b)$$

$$
\begin{aligned}
(x-(-1))(2-(-1)) &= -2\frac{3}{4}(y+(-1)-2.2) \\
(x+1)(3) &= \frac{-3}{2}(y-5) \\
2(x+1) &= -(y-5) \\
2x+2 &= -y+5 \\
2x-3 &= -y \\
y &= -2x+3
\end{aligned}
$$

persamaan garis singgung pada parabola $(x-1)^2 = -3(y-2)$ pada titik (2,-1) yaitu $y = -2x+3$

6.8 Latihan Soal

1. Tentukan koordinat titik fokus, persamaan direktris, dan persamaan sumbu simetris dari parabola-parabola dibawah ini.......
   a. $y^2 = 20x$
   b. $x^2 = -12y$
2. Diberikan persamaan parabola $3x-y^2+4y+8=0$. Tentukan titik puncak, titik fokus, direktris, dan sumbu simetrinya....
3. $y^2 - 8y - 6x - 20 = 0$
   Tentukan :
   a. Koordinat titik puncak
   b. Titik fokus
   c. Direktrik
4. Carilah persamaan parabola yang mempunyai titik puncak dan titik fokus berturut turut $p(2,3)$ dan $F(4,3)$ kemudian tentukan pula panjang, retrum dan diretriksnya.
5. Tentukan persamaan parabola yang fokusnya $(0,3)$ dan persamaan garis direktrisnya $y = 1$.

6. Tentukan persamaan parabola yang fokusnya $(2, 0)$ dan persamaan garis direktrisnya $x = 4$.
7. Tentukan persamaan parabola yang fokusnya $(2, 3)$ dan persamaan garis direktrisnya $y = x + 1$.
8. Tentukan persamaan garis singgung $y^2 = 8x$ yang memebntuk sudut 30^o dengan sumbu x.
9. Tentukan persamaan garis singgung parabola $y^2 = 9x$ yang melalui titik $A(4, 6)$.
10. Tentukan persamaan garis singgung parabola $(y - 2)^2 = 8x$ melalui titik $P(5, 4)$.
11. Tentukan persamaan garis singgung pada parabola $x^2 = 4y$ di titik (2,1).
12. Tentukan persamaan garis singgung parabola $x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ yang sejajar dengan garis $3x - 4y + 5$.
13. Sebuah parabola memiliki titik fokus di $F(0, 4)$ dengan puncak $O(0, 0)$. Bagaimana bentuk persamaan parabolanya?
14. Persamaan parabola dengan puncaknya O, terletak di tengah-tengah bidang atas,simetris terhadap OY,dan parameternya $p = \frac{1}{4}$ adalah
15. Gambarkan parabola $y = 4x^2 - 6x + 1$.

6.9 Daftar Pustaka

1. Cahyono, H. 2019. Geometri Analitik Bidang. Malang: Univeristas Negeri Malang.
2. Hw, S. 2018. Geometri Analitik Bidang Datar. Surakarta: Muhammadiyah University press.
3. Jazuli, A. 2019. Geometri analitik Bidang. Purwokerto. UM Purwokerto, Press.
4. Mashadi. 2018. Buku Geometri Edisi Kedua. Riau: Pusbangdik Universitas Riau.

5. Panggabean, E. M. 2021. Geometri Analitik Bidang Datar. Medan: UMSU Press.
6. Sunardi dan Erfan Y. 2014. Teori dan Soal-Soal Geometri Analitika Bidang. Jember: UPT Penerbitan UNEJ.
7. Susilo, D. A. dan S. Hariyani. 2019. Geometri Analitika (Datar dan Ruang). Malang: Kanjuruhan
8. Sutama, S. Narimo, dan M. Novitasari. Geometri Analitika Ruang.

BAB 7

Relasi antara titik, garis, bidang

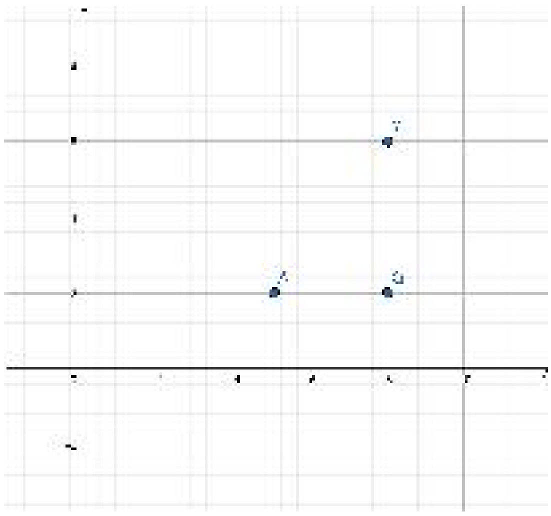
Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-02: Mahasiswa mampu mengaplikasikan konsep Geometri mengenai persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar secara mandiri, bermutu, dan terstruktur untuk menyelesaikan permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari.

7.1 Pendahuluan

Dalam geometri, titik, garis, dan bidang adalah konsep dasar yang sangat penting dan sering digunakan. Setiap benda geometris dalam dimensi yang lebih tinggi dapat dijelaskan dalam istilah titik, garis, dan bidang. Oleh karena itu, pemahaman yang baik tentang konsep ini akan sangat membantu dalam mempelajari dan memahami konsep-konsep geometri yang lebih lanjut.

7.2 Pengertian Titik

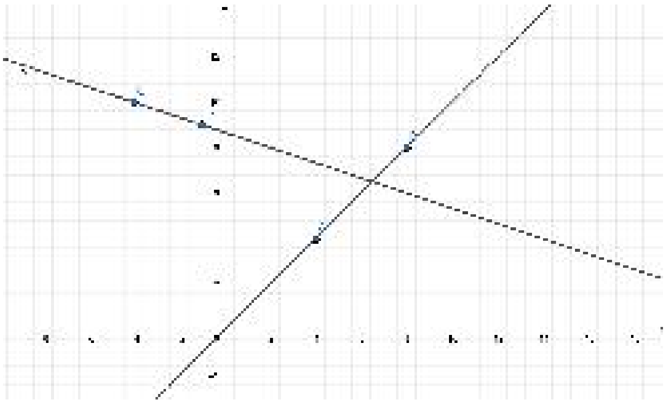
Suatu titik ditentukan oleh letaknya, tetapi tidak memiliki ukuran sehingga dikatakan bahwa titik tidak berdimensi. Sebuah titik digambarkan dengan tanda noktah "." dan diberi nama menggunakan huruf kapital. Sedangkan dalam geometri, titik merupakan konsep yang tidak berwujud atau tidak berbentuk, tidak mempunyai ukuran, serta tidak mempunyai panjang, lebar, maupun tinggi (Susanto & Widodo, 2017). Misalnya terdapat dua buah titik yang titik A dan B.



Gambar 7.1: Contoh Keberadaan Titik.

7.3 Pengertian Garis

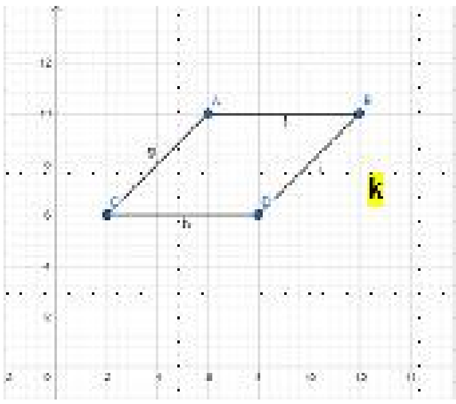
Garis adalah himpunan titik – titik yang anggotanya terdiri lebih dari satu titik. Garis hanya memiliki ukuran panjang sehingga dikatakan garis berdimensi satu. Garis ini diberi nama dengan menggunakan sebuah huruf kecil seperti a ataupun dua buah huruf kapital seperti AB (Greenberg, 2008).



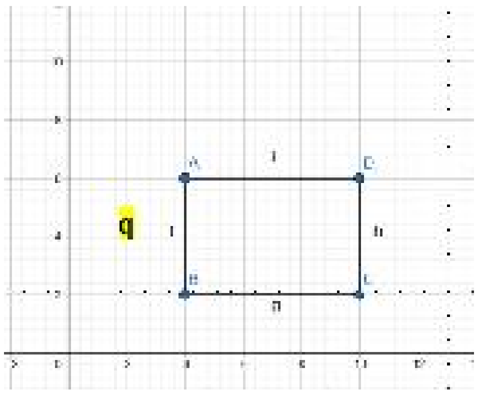
Gambar 7.2: Contoh Keberadaan Garis.

7.4 Pengertian Bidang

Bidang adalah himpunan garis - garis yang anggotanya juga terdiri dari lebih satu buah garis. Bidang ini memiliki ukuran panjang dan luas sehingga bidang dikatakan berdimensi dua (Rosidin, 2015).



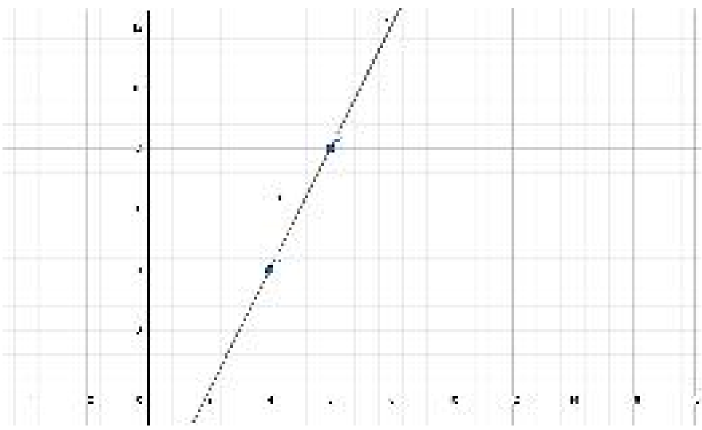
Gambar 7.3: Contoh Bidang k.



Gambar 7.4: Contoh Bidang q.

7.5 Aksioma tentang Garis dan Bidang

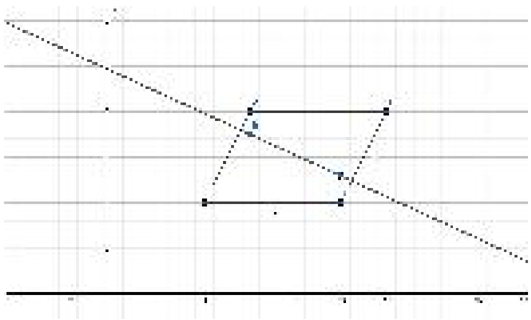
1. Melalui dua buah titik sembarang yang tidak berimpit hanya dapat dibuat sebuah garis lurus



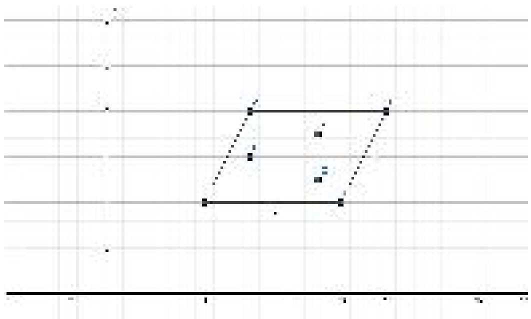
Gambar 7.5: Ilustrasi Aksioma Pertama.

2. Jika sebuah garis dan sebuah bidang memiliki dua titik persekutuan maka garis itu seluruhnya terletak pada bidang

3. Melalui tiga buah titik sembarang tidak segaris hanya dapat sebuah bidang



Gambar 7.6: Ilustrasi Aksioma Kedua.



Gambar 7.7: Ilustrasi Aksioma Ketiga.

7.6 Dalil (Teorema)

1. Sebuah bidang ditentukan oleh tiga titik sembarang yang tidak segaris

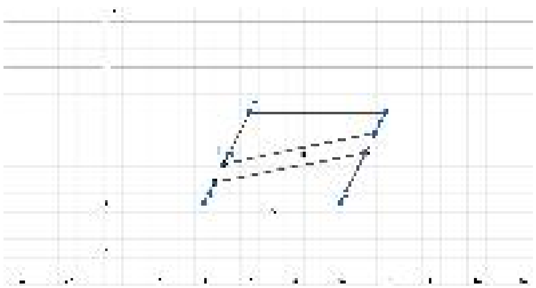
2. Sebuah bidang ditentukan oleh sebuah garis dan sebuah titik dengan titik terletak di luar garis

3. Sebuah bidang ditentukan oleh dua buah garis berpotongan

4. Sebuah bidang ditentukan oleh dua buah garis sejajar.

Gambar 7.8: Ilustrasi Dalil Kedua.

Gambar 7.9: Ilustrasi Dalil Ketiga.



Gambar 7.10: Ilustrasi Dalil Keempat.

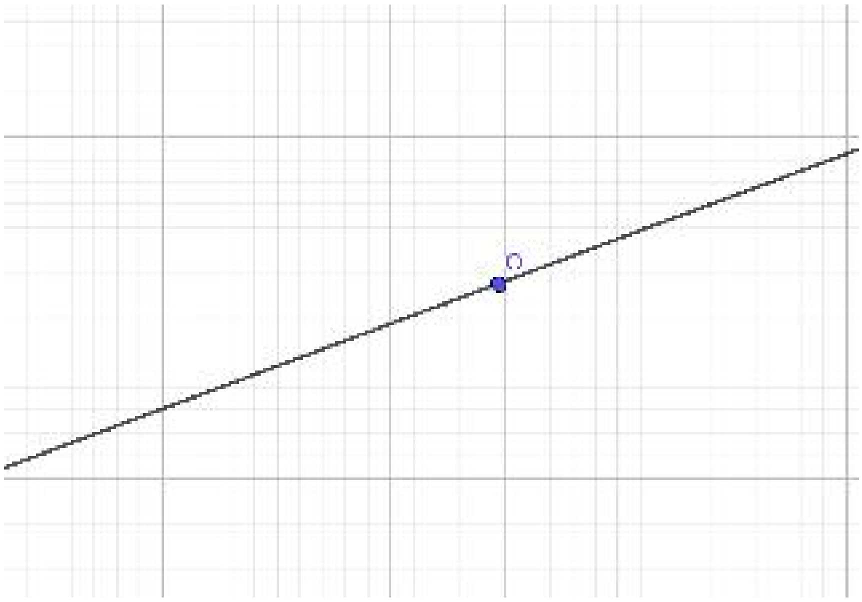
7.7 Relasi di antara Titik, Garis, dan Bidang

8.7.1 Kedudukan Titik Terhadap Garis

Kedudukan titik terhadap garis terbagi menjadi dua kemungkinan, yakni titik terletak pada garis dan titik di luar garis.

a. Titik terletak pada garis

Sebuah titik O dapat dikatakan terletak pada garis m apabila titik O dilalui oleh garis m.

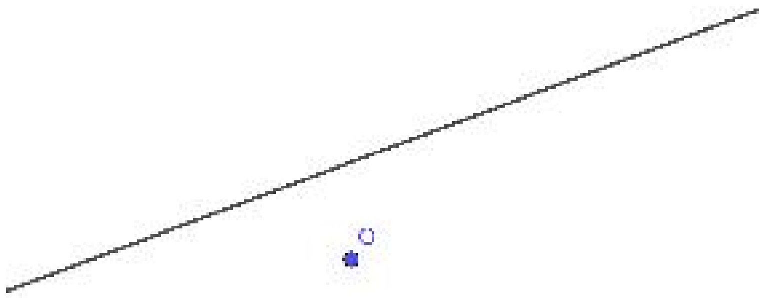


8.7.1

Gambar 7.11: Titik Terletak pada Garis.

b. Titik di Luar Garis

Sebuah titik O dapat disebut berada di luar garis m apabila titik O tidak dilalui oleh garis m.



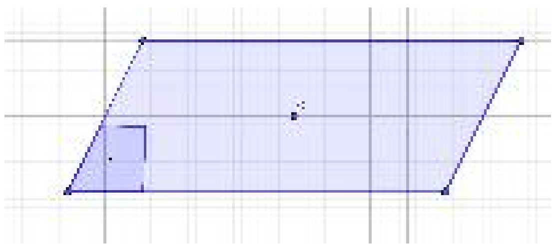
Gambar 7.12: Titik Terletak di Luar Garis.

8.7.2 Kedudukan Titik Terhadap Bidang

Kedudukan yang dapat terjadi pada titik terhadap bidang dibedakan menjadi dua kemungkinan seperti berikut:

a. Titik Terletak pada Bidang

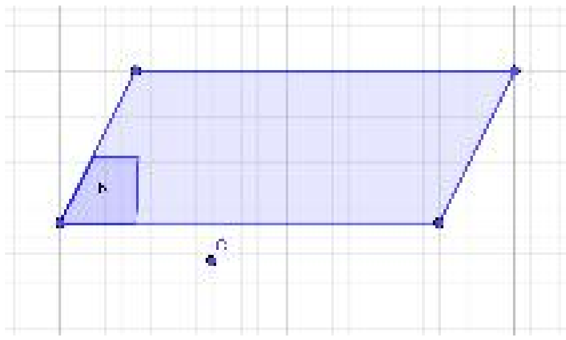
Sebuah titik O dikatakan terletak pada bidang K jika titik O dilalui oleh bidang K.



Gambar 7.13: Titik Terletak pada Bidang.

b.Titik di Luar Bidang

Sebuah titik O dikatakan berada di luar bidang K apabila titik O tidak dilalui oleh bidang K.

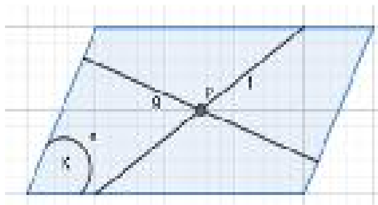


Gambar 7.14: Titik di Luar Bidang.

8.7.3 Kedudukan Garis terhadap Garis

a. Dua Garis Berpotongan

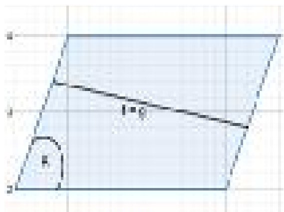
Garis g dan f berpotongan jika kedua garis itu terletak pada sebuah bidang dan memiliki sebuah titik persekutuan (Titik potong di p)



Gambar 7.15: Dua Garis Berpotongan.

b. Dua Garis Berimpit

Dua garis f dan g dikatakan berimpit jika dua garis itu berpotongan lebih dari satu titik potong.



Gambar 7.16: Dua Garis Berimpit.

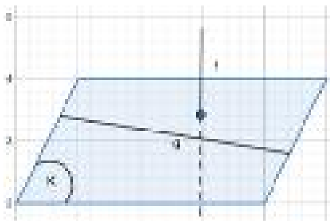
c. Garis sejajar

Dua garis f dan g dikatakan sejajar jika kedua garis itu terletak pada sebuah bidang dan tidak satupun memiliki persekutuan.

Gambar 7.17: Garis sejajar pada Bidang.

d. Garis bersilangan

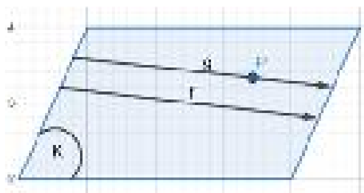
Dua garis f dan g dikatakan bersilangan jika kedua garis itu tidak terletak pada sebuah bidang. tidak berpotongan dan tidak sejajar.



Gambar 7.18: Garis Bersilangan pada Bidang.

8.7.4 Aksioma tentang dua garis sejajar

Melalui sebuah titik yang berada diluar sebuah garis tertentu hanya dapat dibuat sebuah garis yang sejajar dengan garis tertentu itu.

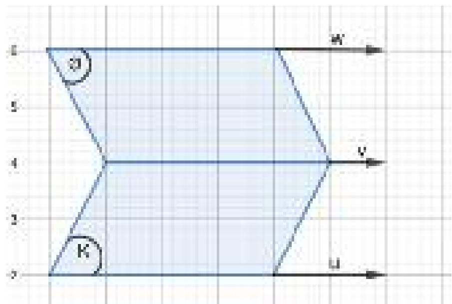


Gambar 7.19: Aksioma Dua Garis sejajar.

Titik P berada diluar garis f sehingga melalui titik P dan garis f dapat dibuat bidang K dan melalui titik P dapat dibuat sebuah garis g yang sejajar dengan garis (Rosidin, 2015).

8.7.5 Dalil Tentang Dua Garis Sejajar

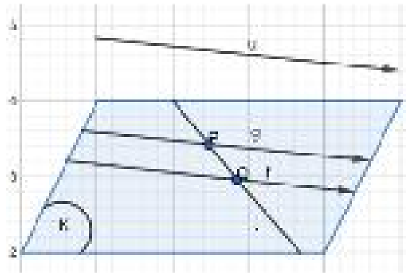
- Jika garis u sejajar dengan garis v dan garis v sejajar dengan garis w maka garis u sejajar dengan garis w (Wijaya & Suananda, 2018).



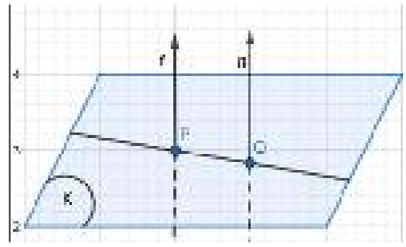
Gambar 7.20: Dalil Dua Garis Sejajar I.

- Jika garis g sejajar dengan garis u dan memotong garis j di P, garis f sejajar dengan garis u dan memotong garis j di Q maka garis-garis f,g, dan j terletak pada sebuah bidang K (Hidayat, 2019).

  Jika garis f sejajar dengan garis g dan garis g menembus bidang K maka garis f juga menembus bidang K.



Gambar 7.21: Dalil Dua Garis Sejajar II.

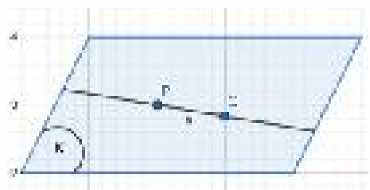


Gambar 7.22: Dalil Dua Garis Sejajar III.

7.8 Kedudukan Garis terhadap Bidang

a. Garis terletak pada bidang

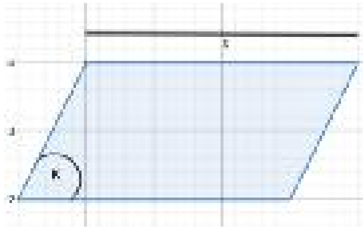
jika garis s dan bidang K sekurang-kurangnya memiliki dua titik persekutuan.



Gambar 7.23: Garis yang Terletak pada Bidang.

b. Garis sejajar bidang

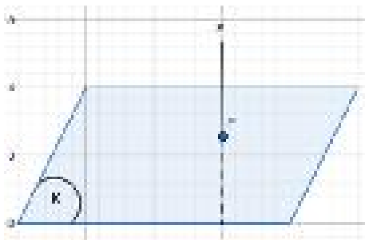
jika garis s dan bidang K tidak mempunyai satupun titik persekutuan



Gambar 7.24: Garis Sejajar Bidang.

c. Garis menembus atau memotong bidang

jika garis s dan bidang K hanya mempunyai satu titik persekutuan yang disebut titik tembus atau titik potong.

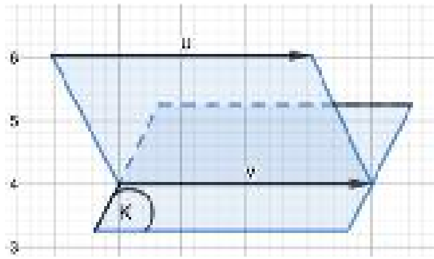


Gambar 7.25: Garis Memotong atau Menembus Bidang.

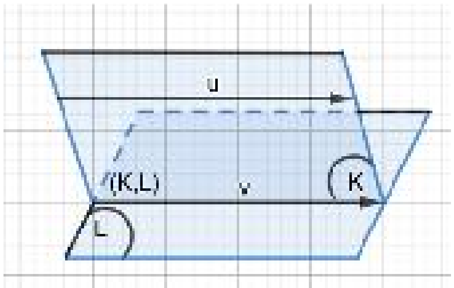
7.9 Dalil-Dalil Tentang Garis Sejajar Bidang

Jika garis u sejajar dengan garis v dan garis v terletak pada bidang K maka garis u sejajar dengan bidang K

Jika bidang K melalui garis u dan garis u sejajar dengan bidang L maka garis potong antara bidang K dan L sejajar dengan garis u ((K,L) / / u).

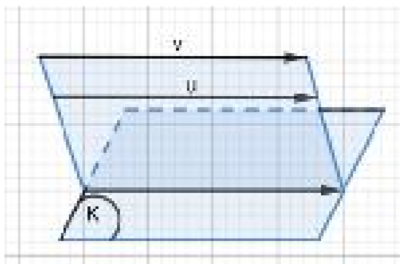


Gambar 7.26: Dalil 1 Garis Sejajar Bidang.



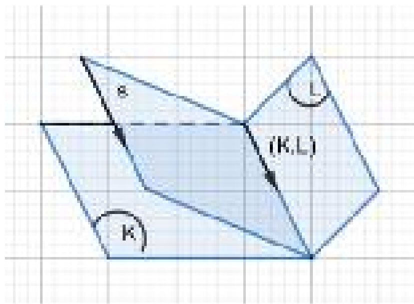
Gambar 7.27: Dalil 2 Garis Sejajar Bidang.

Jika garis v sejajar dengan garis u dan garis u sejajar dengan bidang K maka garis v sejajar dengan bidang K



Gambar 7.28: Dalil 3 Garis Sejajar Bidang.

Jika bidang K dan L berpotongan dan masing-masing sejajar dengan garis s maka garis potong antara kedua bidang tersebut sejajar dengan garis s ((K,L) / / s).



Gambar 7.29: Dalil 4 Garis Sejajar Bidang.

7.10 Kedudukan Bidang terhadap Bidang

Kedudukan bidang terhadap bidang mengalami tiga kemungkinan sebagai berikut:

a. Berimpit

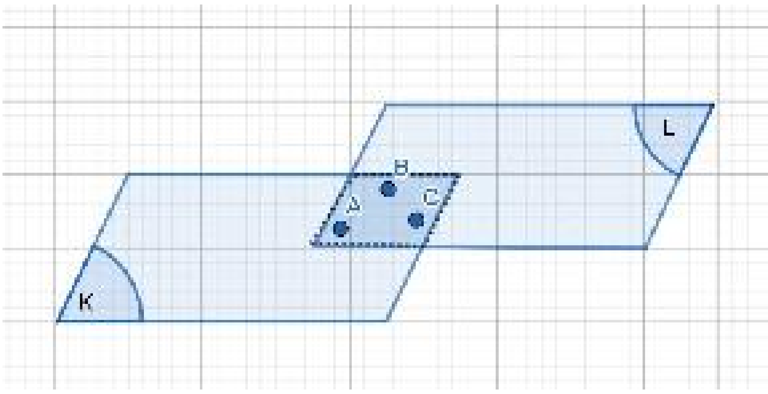
Hal ini ter jadi jika kedua bidang memiliki tiga buah titik persekutuan yang tidak segaris. Titik A, B, dan C terletak pada K juga terletak pada L, maka K dan L disebut berimpit.

b. Sejajar

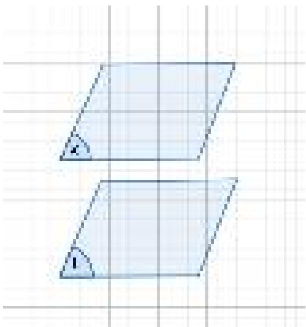
Terjadi apabila kedua bidang tidak memiliki titik persekutuan.

c. Berpotongan

Jika kedua bidang tersebut tidak berimpit dan tidak sejajar. Perpotongan kedua bidang berupa garis lurus yang dinamakan garis potong/tembus/perpotongan/ Pada Gambar garis potongnya adalah (K, L)



Gambar 7.30: Dua Bidang yang Berimpit.



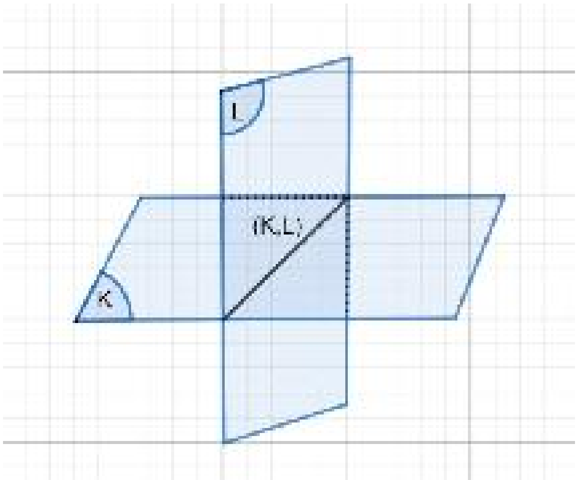
Gambar 7.31: Dua Bidang yang Sejajar.

7.11 Contoh Soal

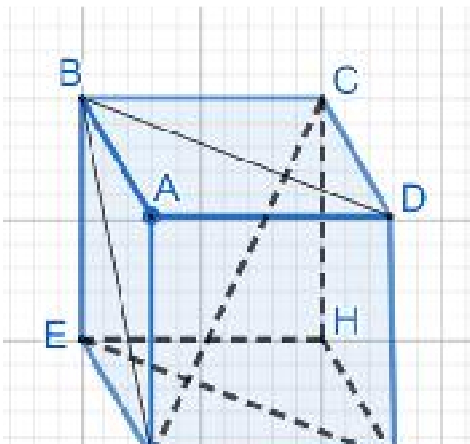
Perhatikan Gambar kubus ABCD.EFGH Tunjukan manakah pernyataan dibawah ini yang benar!

1. CF dan BD berpotongan
2. AF sejajar dengan CH
3. CF menyilang dengan CH
4. BF sejajar dengan CG

Penyelesaian:



Gambar 7.32: Dua Bidang yang Saling Berpotongan.



Gambar 7.33: Kubus.

1. CF dan BD berpotongan (Salah)
   CF dan BD bersilangan
2. AF sejajar dengan CH (Benar)
3. CF menyilang dengan CH (Salah)
   CF berpotongan dengan CH
4. BF sejajar dengan CG (Benar)

   Berdasarkan pernyataan diatas yang bernilai benar adalah (2) dan (4)

7.12 Daftar Pustaka

1. Greenberg, M. J. (2008). Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History (4th ed.). W. H. Freeman and Company.
2. Hidayat, A. (2019). Geometri Analitik: Teori dan Aplikasi dalam Matematika dan Teknik. Penerbit PT. Penerbit IPB Press.
3. Rosidin, A. (2015). Geometri Analitik: Bidang dan Ruang. Penerbit Universitas Pendidikan Indonesia.
4. Susanto, B., Widodo, T. (2017). Geometri Analitik Bidang dan Ruang. Deepublish.
5. Wijana, I. M., & Suananda, I. K. (2018). Geometri Analitik. Penerbit Universitas Udayana.

BAB 8

Jarak antara titik, garis, bidang

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-02: Mahasiswa mampu mengaplikasikan konsep Geometri mengenai persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar secara mandiri, bermutu, dan terstruktur untuk menyelesaikan permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari.

8.1 Pendahuluan

Jarak antara titik, garis, dan bidang adalah konsep penting dalam matematika dan geometri. Konsep ini sangatlah fundamental dalam mempelajari berbagai macam topik dalam geometri, seperti trigonometri, analisis vektor, dan persamaan garis dan bidang. Jarak antara titik dapat diartikan sebagai panjang garis lurus yang menghubungkan titik tersebut dengan titik lain atau suatu garis, sedangkan jarak antara garis adalah jarak terdekat antara dua garis tersebut, dan jarak antara bidang adalah jarak terdekat antara dua bidang.

Dalam aplikasinya, jarak antara titik, garis, dan bidang sering digunakan untuk menghitung jarak antara dua objek dalam dunia nyata, seperti jarak antara dua titik pada peta atau jarak antara dua garis pada konstruksi bangunan. Dalam pembelajaran geometri, pemahaman yang kuat tentang konsep jarak antara titik, garis, dan bidang sangat penting untuk memperluas pemahaman tentang berbagai topik lainnya, dan untuk menyelesaikan berbagai macam soal geometri yang kompleks

8.2 Jarak antara Titik ke Titik

Jarak titik ke titik dapat dihubungkan dengan suatu garis yang disebut dengan segmen garis dari kedua titik. Sehingga jarak titik ke titik menyatakan jarak terpendek dari kedua titik. Gambar berikut menjelaskan bahwa jarak titik A ke titik B merupakan panjang segmen garis AB (Anton et al., 2013).

Gambar 8.1: Ilustrasi Jarak Titik ke Titik.

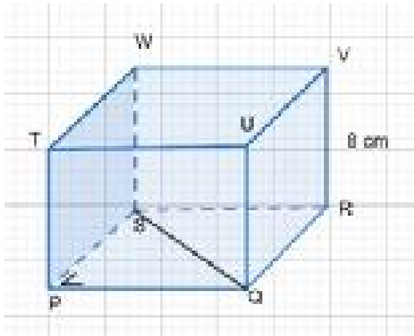
Sehingga cara memperoleh jarak antara dua titik pada sebuah bangun ruang yakni dengan bantuan Teorema Pythagoras. Caranya dengan menghubungkan kedua titik dan titik lain pada suatu bangun ruang sehingga diperoleh segitiga siku-siku. Kemudian di mana jumlah kuadrat sisi tegak segitiga sama dengan kuadrat sisi miring segitiga.

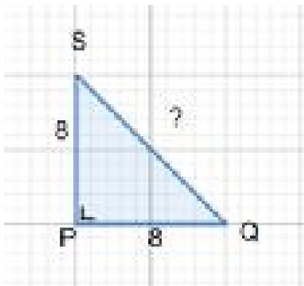
$c^2 = a^2 + b^2$

Contoh Soal

Diketahui gambar kubus disamping dengan panjang rusuk 8 cm. Tentukan jarak titik S ke titik Q !

PENYELESAIAN





Jarak antara titik S ke titik Q pada gambar tersebut merupkan panjang diagonal kubus PQRS.TUVW sehingga menentukan jarak dari titik S ke titik Q dapat menggunakan rumus pythagoras dari segitiga SPQ.

Maka :

SQ = $\sqrt{PQ^2 + SP^2}$

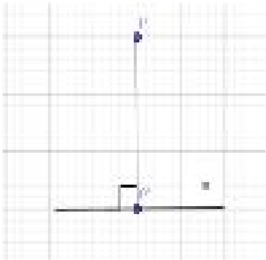
$=\sqrt{8^2 + 8^2}$

$=\sqrt{64 + 64}$

$=\sqrt{64 * 2}$

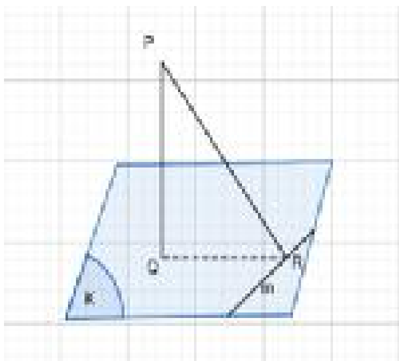
$=8\sqrt{2}$

8.3 Jarak antara Titik ke Garis



Gambar 8.2: Ilustrasi Jarak Titik ke Garis.

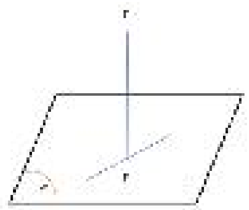
Jarak antara titik P dan garis m dimana titik P berada di luar garis m adalah panjang ruas garis PP' dengan titik P' merupakan proyeksi titik P pada garis m. Dengan arti lain jarak antara titik P dan garis m dapat ditentukan dengan cara menarik garis dari titik P tegak lurus pada garis m dan memotongnya di titik P' maka garis PP' adalah jarak antara titik P dan garis m (Herlina, 2016).



Gambar 8.3: Ilustrasi Jarak Titik ke Garis.

Apabila terdapat garis m yang terletak pada bidang K dan terdapat titik P terletak di luar bidang K maka untuk menentukan jarak antara titik P dan garis m ditempuh dengan membuat garis PQ yang tegak lurus pada bidang K, kemudian tarik garis QR yang tegak lurus pada garis m sehingga didapat panjang ruas garis PR yang adalah jarak antara titik P dan garis m.

8.4 Jarak antara Titik ke Bidang



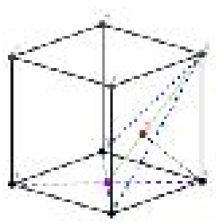
Gambar 8.4: Ilustrasi Jarak Titik ke Bidang.

Jarak titik ke bidang merupakan panjang ruas garis yang ditarik titik sampai memotong tegak lurus suatu bidang (Kusno, 2019). Sehingga langkah dalam menentukan jarak titik ke suatu bidang yakni :

- Proyeksikan titik P pada bidang α (titik P' merupakan hasil proyeksi titik P pada bidang α
- Jarak titik P ke bidang α adalah PP'.

Contoh Soal

Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 12 cm. Tentukan jarak C ke bidang BDG !



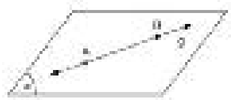
PENYELESAIAN
Diketahui =

Panjang AC = $12\sqrt{2}$ cm
Panjang PC = 1/2 AC = $6\sqrt{2}$ cm
Panjang PG (menggunakan teorema Phytagoras) :
$PG^2 = \sqrt{PC^2 + CG^2}$
PG=$\sqrt{6\sqrt{2}^2 + 12^2}$
PG=$\sqrt{72 + 144}$
PG= $\sqrt{216}$
$= 6\sqrt{6}$
Dengan menggunakan kesebangunan segitiga maka segitiga CPX sebangun dengan PCG,
maka,
PC/PG = CX/PG
$= 6\sqrt{2}/6\sqrt{6} = CX/12$
$= \sqrt{2}/\sqrt{6}$
$CX = 4\sqrt{3}$ cm

8.5 Sudut Garis dan Bidang

Sudut antara garis dan bidang

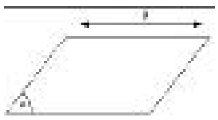
8.5.1.1 Garis terletak pada bidang



Gambar 8.5: Garis yang Terletak pada Bidang.

2. Garis sejajar dengan bidang

Terdapat sebuah gambar yang menembus bidang ABCD di titik O. Proyeksi garis g akan membentuk garis EF yang berumput dan sejajar dengan bidang ABCD. Besar sudut yang dibentuk oleh garis g dengan dengan bidang ABCD adalah sudut yang dibentuk oleh garis g dengan



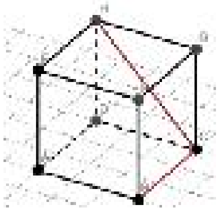
Gambar 8.6: Garis yang Sejajar dengan Bidang.

Gambar 8.7: Ilustrasi Sudut Antara Garis dan Bidang.

garis proyeksinya yaitu sebesar *bheta*. Jadi, sudut antara garis dan bidang adalah sudut lancip yang dibentuk oleh garis tersebut dengan proyeksinya pada bidang (Lay, 2016).

8.5.2 Sudut antara garis dan garis

1. Sudut antara dua garis yang berpotongan

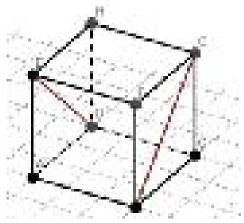


Gambar 8.8: Ilustrasi Sudut Antara Dua Garis yang Berpotongan.

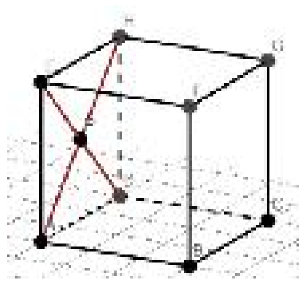
Perhatikan garis BC dan CH. Kedua garis tersebut berpotonan di titik C. Dalam teorema apabila suatu garis tegak lurus pada suatu bidang maka garis tersebut akan tegak lurus ke semua garis yang terletak pada bidang

DCGH. HC adalah garis yang terletak pada DCGH yang berarti BC tegak lurus pada HC. Jadi, garis BC CH berpotongan tegak lurus atau 90°.

2. Sudut antara dua garis yang bersilangan



Sudut antara dua garis yang bersilangan dapat ditentukan dengan menggeser salah satu garis sehingga kedua garis berpotongan dan sebidang Perhatikan garis ED dan GB. Cara menentukan sudutnya adalah tarik salah satu garis atau geser salah satu garis sehingga memotong garis lainnya.

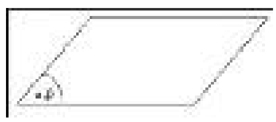


Gambar 8.9: Ilustrasi Sudut Antara Dua Garis yang Bersilangan.

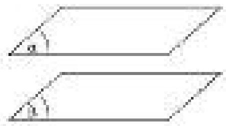
Setelah di geser sudut antara garis EDGB sama saja dengan sudut antara garis EDAH. Sudutnya yaitu antara HPE. Dilihat garis AEDH adalah persegi, apabila persegi maka perpotongan diagonal didangnya adalah saling tegak lurus, jadi sudunya adalah 90°

8.5.3 Sudut antara bidang dan bidang.

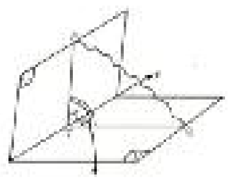
1. Dua bidang saling berimpit



Gambar 8.10: Ilustrasi Sudut Antara Bidang dan Bidang.



Gambar 8.11: Dua Bidang Saling Sejajar.



Gambar 8.12: Sudut Antara Garis P dan Garis Q.

2. Dua bidang saling sejajar

   Dari 2 buah bidang U dan V terdapat sebuah potongan garis g. Untuk menentukan sudut antara kedua bidang yaitu diawali dengan membuat garis pada bidang U yang tegak lurus dengan garis g (yang dinamai dengan garis PT). Dari garis P tersebut terdapat titik T yang merupakan titik tumpuan. Dari titik T, dibuat garis pada bidang V yang juga tegak lurus dengan garis g (dinamai dengan garis TQ). Maka, sudut antara bidang U dan V merupakan sudut antara garis P dan garis Q (Stewart, 2015).

Contoh soal

Tentukan tangen antara garis AE dan bidang AFH pada kubus ABCD EFGH

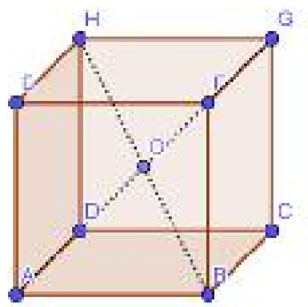
Penyelesaian :

Misal sudut (AE,AFH) = sudut (AE, AP) = $alpha$

$$AP^2 = AE^2 + AP^2$$
$$AP^2 = a^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2$$
$$AP^2 = a^2 + \frac{a^2}{2}$$
$$AP^2 = \frac{3a^2}{2}$$
$$AP = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$
$$AP = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

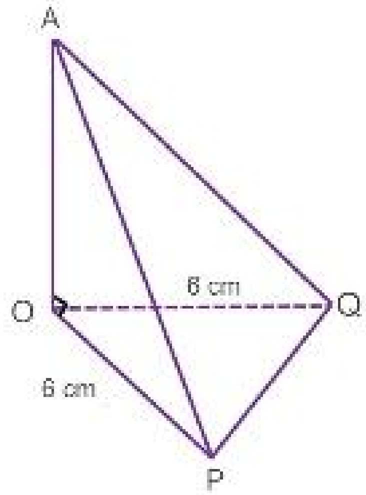
8.6 Latihan Soal

1. Perhatikan Gambar dibawah ini dan Nyatakan Dalam Benar dan Salah



Titik O terletak pada bidang ACGE
Titik M tidak terletak pada bidang BDHF
Titik O terletak di luar bidang ABCD
Titik O di luar bidang ABGH

2. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan Panjang rusuk 6 cm. Titik P,Q, dan R berturut-turut terletak pada pertengahan garis AB, BC dan bidang ADHE. Tentukan jarak dari titik P ke titik R dan jarak fari titik Q ke titik R!
3. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 8 cm. Jarak titik H ke garis AC adalah......
4. Kubus ABCD.EFGH memiliki panjang rusuk 12 cm. Nilai cosinus sudut antara bidang AFH dan bidang ABCD adalah....
5. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk $2\sqrt{2}$ cm. Jika titik P ditengah-tengah AB dan titik Q ditengah-tengah BC, maka jarak antara titik H dengan garis PQ adalah....
6. Diketahui R adalah titik yang terletak di perpanjangan GC pada kubus ABCD.EFGH dengan perbandingan $CR : GC = 1 : 2$. Jika Panjang rusuk kubus adalah 6 cm, jarak titik E ke titik R adalah...
7. Diketahui limas segi empat beraturan A.PQRS dengan $PQ = QR = 5\sqrt{2}$ cm, $AP = 13$ cm. Maka jarak titik P ke garis AR adalah...
8. Alice memiliki ruang belajar berbentuk balok dengan panjang 6 m, lebar 4 m, dan tinggi 4 m. Dia ingin memasang lampu tepat di atas bagian tengah ruangan. Ia juga ingin memasang sakelar lampu di bagian tengah salah satu dinding ruangan. Jarak terpendek sakelar dengan lampu adalah ... meter
9. Perhatikan Gambar dibawah ini!
   Jika OA, OP, dan OQ adalah segmen yang saling tegak lurus di O dengan panjang masing - masing 6 cm, jarak titik O ke bidang APQ adalah...
10. Diketahui prisma tegak segitiga sama sisi ABC.DEF dengan panjang $AB = r$ dan $AD = s$. Jika titik O terletak di tengah rusuk EF, maka panjang AG adalah...
11. Diketahui kubus PQRS.TUVW dengan panjang rusuk 2 cm. A adalah titik tengah VW, B adalah titik tengah UV, dan C adalah titik tengah AB. Jika BD adalah proyeksi BC pada bidang ABCD, maka panjang BD sama dengan ... cm



12. Diketahui A.PQR adalah limas segitiga beraturan dengan panjang rusuk alas 12 cm dan panjang rusuk tegak $6\sqrt{2}$ cm serta titik E di tengah rusuk AR. Jarak titik P ke QE adalah...
13. Diberikan balok ABCD.EFGH dengan panjang BC = 4, FB = $\sqrt{11}$, dan CD = 3. Jika O pada FD sehingga panjang OC = 3, maka jarak O ke D adalah...
14. Diketahui jarak titik T ke bidang PUW pada kubus PQRS.TUVW sebesar $\frac{8}{3}\sqrt{(3)}$. Berapakah panjang rusuk kubus tersebut?
15. Sebuah kubus KLMN.OPQR memiliki titik tengah X. Titik tengah tersebut terletak di antara garis KO. Jarak X ke bidang LNRP sebesar $2\sqrt{2}$ cm. Berapakah panjang rusuk kubus tersebut?

8.7 Daftar Pustaka

1. Anton, H., Bivens, I., Davis, S. (2013). Calculus. John Wiley Sons.
2. Herlina, E. (2016). Geometri Analitik 3D. Alfabeta.
3. Kusno, K. (2019). Geometri Analitik Bidang Datar. Cipta Prima Nusantara

4. Lay, S. R. (2016). Analysis with an Introduction to Proof. Pearson Education, Inc.

5. Stewart, J. (2015). Calculus: Early Transcendentals. Cengage Learning..

BAB 9

Persamaan Garis dan Bidang dalam Ruang R^3

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-02: Mahasiswa mampu mengaplikasikan konsep Geometri mengenai persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar secara mandiri, bermutu, dan terstruktur untuk menyelesaikan permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari.

9.1 Pendahuluan

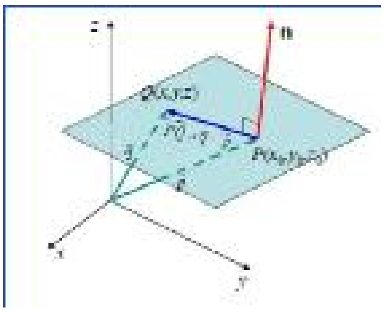
Persamaan garis dan bidang dalam ruang adalah topik penting dalam matematika yang melibatkan koordinat tiga dimensi. Garis dapat didefinisikan sebagai himpunan titik-titik dalam ruang yang memenuhi persamaan linear, sedangkan bidang adalah himpunan titik-titik dalam ruang yang memenuhi persamaan linear dengan dua variabel bebas.Dalam konteks geometri, persamaan garis dan bidang dapat digunakan untuk memodelkan objek-objek dalam ruang seperti bangun datar, bangun ruang, dan objek geometri lainnya. Selain itu, persamaan garis dan bidang juga memiliki banyak aplikasi di bidang teknik, fisika, dan lain-lain.

Dalam pembelajaran persamaan garis dan bidang, kita akan mempelajari berbagai teknik dan strategi untuk menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan topik ini. Misalnya, kita akan belajar cara menentukan persamaan garis yang melalui dua titik, cara menentukan persamaan bidang yang melalui tiga titik, dan cara menentukan jarak antara titik dengan garis atau bidang tertentu. Dalam hal ini, pengetahuan tentang aljabar linier dan geometri dasar menjadi sangat penting untuk memahami konsep persamaan garis dan bidang dalam ruang. Dengan memahami konsep ini, kita dapat meningkatkan pemahaman kita tentang objek-objek geometri dalam ruang dan meningkatkan kemampuan kita dalam menyelesaikan masalah-masalah matematika yang berkaitan dengan topik ini.

9.2 Persamaan Bidang dalam Ruang R^3

Pada pembahasan awal ini, akan dijelaskan bagaimana menentukan persamaan bidang dalam ruang R^3. Pada bidang, gradien digunakan untuk menentukan persamaan suatu garis (Pasandaran & Ma'rufi, 2018). Dalam ruang, akan lebih mudah jika kita gunakan vektor untuk menentukan persamaan suatu garis.

Perhatikan gambar dibawah ini!



Gambar 9.1: Ilustrasi Persamaan Bidang.

Pada gambar, sebuah titik $P(x_0, y_0, z_0)$ berada pada bidang maka diambil titik sebarang $Q(x, y, z)$ yang ada pada bidang.

Vektor $\vec{p}$ adalah vektor posisi dari P dan vektor $\vec{q}$ adalah vektor posisi Q Vektor $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ adalah vektor normal yang tegak lurus pada bidang, termasuk vektor $\vec{PQ}$karena antara vektor $\vec{PQ}$ dan vektor $\vec{n}$ saling tegak lurus, maka dalam perkalian titik menjadi: (Sukirman, 2016)

$$\vec{n}.\vec{PQ} = 0$$
$$\vec{n}.(\vec{p} - \vec{q}) = 0$$
$$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

Maka dapat diperoleh persamaan umum bidang dalam R^3 adalah sebagai berikut:

$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

Contoh Soal:

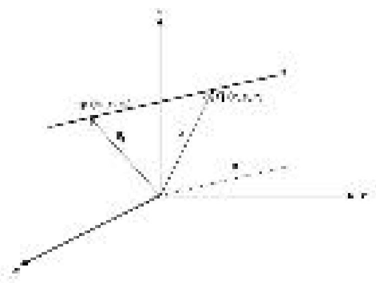
1. Carilah persaman bidang yang melalui titik $Q(2, 4, -1)$ dengan vektor normal $\vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$!
Penyelesaian:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z - (-1)) = 0$$
$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$$
$$2x - 4 + 3y - 12 + 4z + 4 = 0$$
$$2x + 3y + 4z - 4 - 12 + 4 = 0$$
$$2x + 3y + 4z - 12 = 0$$

Jadi persamaan bdang yang melalui titik $Q(2, 4, -1)$ dengan vektor $\vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ adalah $2x + 3y + 4z - 12 = 0$

9.3 Persamaan Garis Ruang R^3

9.3.1 Persamaan Vektor Garis



Gambar 9.2: Vektor Garis.

Sebuah garis lurus melalui titik g melalui $Q(x,y,z)$ dan terdapat sebuah vektor $\vec{v}$ sejajar garis g. Maka untuk mencari persamaan vektor garis tersebut dilakukan dengan mengambil sembarang titik pada garis$g$, misal $P(x_1,y_1,z_1)$,sehingga panjang vektor $\vec{PQ}$ karena sejajar dengan vektor $\vec{v}$ dapat ditentukan dengan : (Hw, 2018)

$$\vec{PQ} = \lambda\vec{v}$$

Misalkan λ merupakan bilangan rill maka panjang vektor $\vec{PQ}$ adalah sebuah perkalian dengan vektor $\vec{v}$ (panjang vektor $\vec{PQ}$ sekian kali lipat vektor $\vec{v}$). titik P mempunyai vektor posisi $\vec{r_0}$=$[x_1,y_1,z_1]$ dan titik $\vec{r}$=$[x,y,z]$, maka dengan menggunakan metode penjumlahan segitiga didapatkan (Panggabean, 2020):

$$\vec{PQ} = -\vec{r_0} + \vec{r}$$

$$\vec{PQ} = \vec{r} - \vec{r_0}$$

vektor $\vec{v}$ mempunyai vektor posisi $\vec{v} = [a,b,c]$ sehingga,

$$\vec{r} - \vec{r_0} = \lambda\vec{v}$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{v}$$

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[a, b, c].....(1)$$

Persamaan (1) disebut dengan persamaan vektor garis g.

Persamaan vektor digunakan untuk mempresentasikan garis atau bidang dalam kerangka tiga dimensi. Bidang tiga dimensi memerlukan tiga koordinat terhadap tiga sumbu dan disini vektor berguna untuk memudahkan merepresentasikan persamaan vektor suatu garis atau bidang. Selain itu, persamaan vektor digunakan untuk mempresentasikan persamaan garis atau bidang dengan bantuan x, y, z.

9.3.2 Persamaan Parameter Garis Lurus dalam R^3

Berdasarkan persamaan $[x,y,z] = [x_1,y_1,z_1] + \lambda\ [a,b,c]$ maka diperoleh:

$$x = x_1 + \lambda a$$

$$y = y_1 + \lambda b$$

$$z = z_1 + \lambda c$$

Persamaan diatas disebut dengan persamaan paremeter atau persamaan kanonik garis g

9.3.3 Persamaan Garis yang Melalui Titik P dan Vektor arah $\vec{v}$

Misal titik $P(x_1,y_1,z_1)$ dengan vektor arah $\vec{v} = [a,b,c]$ Dari persamaan parameter garis lurus diperoleh: (Yunita & Hamdunah, 2017)

$$x = x_1 + \lambda a$$

$$\lambda = \frac{(x - x_1)}{a}$$

$$y = y_1 + \lambda b$$

$$\lambda = \frac{y - y_1}{b}$$

$$z = z_1 + \lambda c$$

$$\lambda = \frac{z - z_1}{c}$$

maka :

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} ...(2)$$

9.3.4 Hal-Hal Khusus Mengenai Vektor arah

Garis melalui titik O. garis melalui titik O(0,0,0) akan berbentuk :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Vektor arah [a,b,c] :

a) Jika $a = 0$, vektor arah [0,b,c] terletak pada bidang datar yang sejajar bidang YOZ, sehingga persamaan (1) menjadi :

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[a, b, c]$$

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[o, b, c]$$

$$x = x_1 + \lambda a \bigwedge x = x_1$$

$$y = y_1 + \lambda b \bigwedge \lambda = \frac{y - y_1}{b}$$

$$z = z_1 + \lambda c \bigwedge \lambda = \frac{z - z_1}{c}$$

Sehingga persamaan garis tersebut :

$$x = x_1, \frac{y - y_1}{b}, \frac{z - z_1}{c}$$

b) Jika $b = 0$, vektor arah $[a, 0, c]$ terletak pada bidang datar yang sejajar bidang XOZ, persamaan garis menjadi:

$$\frac{x - x_1}{a}, y = y_1, \frac{z - z_1}{c}$$

c) Jika $c = 0$, vektor arah $[a,b,0]$ terletak pada bidang datar yang sejajar bidang XOY, persamaan garis menjadi :

$$\frac{x - x_1}{a}, \frac{y - y_1}{b}, z = z_1$$

d) Jika $a = c = 0$, vektor $[0, b, 0]$ sejajar dengan arah sumbu Y Jika $a = b = 0$, vektor $[0,0,c]$ sejajar dengan arah sumbu Z

e) Jika $b = c$, vektor $[a,0,0]$ sejajar dengan arah sumbu X (Ramayanti & Lisa, 2022).

Contoh Soal:
1. Tentukan persamaan vektor garis lurus yang melalui titik $A(1, 3, 2)$ dan $B(5, -3, 2)$
Penyelesaian:

Karena diketahui dua titik maka, ditentukan $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = [(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)]$$

$$\vec{AB} = [(5 - 1), (-3 - 3), (2 - 2)]$$

$$\vec{AB} = [4, -6, 0]$$

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[a, b, c]$$

$$[x, y, z] = [1, 3, 2] + \lambda[4, -6, 0]$$

Persamaan vektor garis lurus melalui titik (1,3,2) dan (5,−3,2) adalah $[x,y,z] = [1,3,2] + \lambda\ [4,-6,0]$

9.3.5 Persamaan Garis Lurus Yang Melalui Dua Titik

Untuk menentukan persamaan garis lurus yang melalui 2 titik yaitu titik $[x_1, y_1, z_1]$ dan $[x_2, y_2, z_2]$ dapat menggunakan persamaan (2) yaitu dari persamaan kanonik

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Sehingga diperoleh :

$$a = x_2 - x_1$$

$$b = y_2 - y_1$$

$$c = z_2 - z_1$$

Maka :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \ldots (3)$$

Persamaan (3) disebut persamaan garis lurus yang melalui dua titik $[x_1, y_1, z_1]$ dan $[x_2, y_2, z_2]$ dengan syarat $(x_2 - x_1) \neq 0$, $(y_2 - y_1) \neq 0$, $(z_2 - z_1) \neq 0$ (Jazuli, 2019). Persamaan garis lurus tidak selalu dapat digunakan jika beberapa bilangan arahnya sama dengan nol. Jika salah satu bilangan arahnya sama dengan nol, maka:

1. Jika $a = 0$, maka persamaan garis lurusnya menjadi $\frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ dan $x = x$ berarti garis lurus tersebut sejajar dengan bidang YOZ.
2. Jika $b = 0$, maka persamaan garis lurusnya menjadi $\frac{x-x_1}{a} = \frac{z-z_1}{c}$ dan $y = y$, berarti garis lurus tersebut sejajar dengan bidang XOZ.
3. Jika $c = 0$, maka persamaan garis lurusnya menjadi $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b}$ dan $z = z$, berarti garis lurus tersebut sejajar dengan bidang XOY.
4. Jika $a = 0$ dan $b = 0$, maka persamaan garis lurusnya menjadi $x = x_1$ dan $y = y_1$, berarti garis lurus tersebut sejajar dengan sumbu Z.
5. Jika $a = 0$ dan $c = 0$, maka persamaan garis lurusnya menjadi $x = x_1$ dan $z = z_1$, berarti garis lurus tersebut sejajar dengan sumbu Y.
6. Jika $b = 0$ dan $c = 0$, maka persamaan garis lurusnya menjadi $y = y_1$ dan $z = z_1$, berarti garis lurus tersebut sejajar dengan sumbu X.

Contoh Soal:

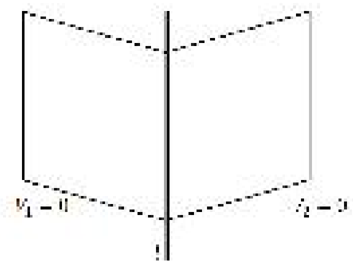
1. Tentukanlah persamaan garis g yang melalui titik $A(-1, 2, 3)$ dan titik $B(3, -5, 4)$!

   Penyelesaian:

   $A = (-1, 2, 3)$

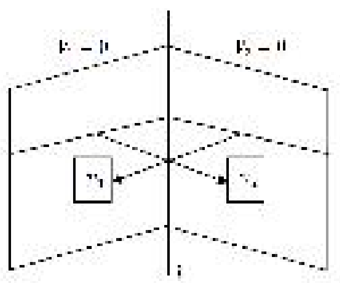
   $B = (3, -5, 4)$ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ $\frac{x-(-1)}{3-(-1)} = \frac{y-2}{-5-2} = \frac{z-3}{4-3}$ $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-3}{1} \rightarrow \times 28$ $7x + 7 = -4y + 8 = 28z - 84$

9.3.6 Persamaan Garis dari Perpotongan Dua Bidang



Gambar 9.3: Garis dari Perpotongan Dua Bidang.

Bedasarkan gambar, dimisalkan terdapat dua bidang yaitu bidang V_1 dan V_2 yang memiliki persamaan sebagai berikut:
$V_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ yang memiliki $n_1 = [A_1, B_1, C_1]$
$V_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ yang memiliki $n_2 = [A_2, B_2, C_2]$,



Gambar 9.4: Garis dari Perpotongan Dua Bidang.

Dimana n_1 dan n_2 merupakan vektor normal dari bidang V_1 dan V_2 maka apabila kedua bidang tersebut berpotongan pada suatu garis maka vektor arah garis tersebut akan tegak lurus dengan n_1 dan n_2, akan menghasilkan sebuah garis yang disebut dengan garis l (Susilo & Hariyani, 2019).

Dari gambar diatas diperoleh persamaan garis l yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$l : \begin{cases} V_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ V_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

sehingga diperoleh persamaan garis l :

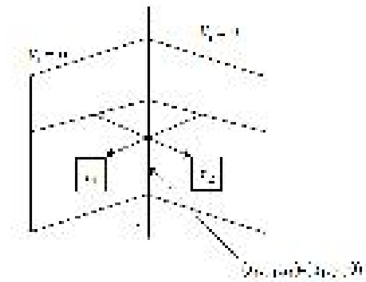
$$l[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + \lambda[a, b, c]$$

Dimana x_1, y_1, z_1 merupakan titik yang terdapat pada garis l dan a,b,c merupakan vector arah dari garis l.
Untuk memperoleh persamaan garis l maka diperlukan vektor arah dan sebuah titik pada garis l. Berikut merupakan cara-cara untuk memperoleh vektor arah dan sebuah titik pada garis l :

- Vektor arah dari garis l
  Ingat kembali bahwa vektor normal bidang $V_1(n_1)$ pasti tegak lurus dengan bidang V_1 begitu juga dengan vektor normal bidang $V_2(n_2)$ maka akan tegak lurus dengan bidang V_2. Apabila dikalikan $n_1 \times n_2$ akan menghasilakan sebuah vektor U yang tegak lurus dengan vektor n_1 dan n_2 atau searah dengan garis l. Maka nilai $[a, b, c]$ didapatkan dengan mengalikan vektor normal n_{12} dan dipatkan vektor arah garis l atau vektor U:

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= [A_1, B_1, C_1] \times [A_2, B_2, C_2] \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \\ &= \left[\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right] \\ &= \text{[a,b,c]} \end{aligned}$$

- Sebuah titik pada garis l
  Diambil sebarang titik pada garis l yaitu seperti ada gambar dibawah ini :



Gambar 9.5: Sebarang Titik dari Dua Bidang.

Misalkan titik yang di ambil adalah $(x_1, y_1, z_1) = (x_1, y_1, 0)$ kemudian disubstitusikan ke persamaan bidang V_1, V_2 maka diperoleh persamaan baru yaitu :

$A_1x + B_1y + D_1 = 0$ atau $A_1x + B_1y = -D_1$
$A_2x + B_2y + D_2 = 0$ atau $A_2x + B_2y = -D_2$

kemudian dieliminasi y, maka diperoleh :

$$\mathbf{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

kemudian dieliminasi x, maka diperoleh :

$$\mathbf{y_1} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Contoh Soal:

Tentukan persamaan garis lurus dari garis perpotongan antara bidang 1 dengan persamaan $2x - y - 5z = 14$ dan bidang 2 dengan persamaan $4x + 5y + 4z = 28$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{2x-y-5z-14} &= 0 \rightarrow n_1 = [2, -1, -5] \\ \text{4x+5y+4z-28} &= 0 \rightarrow n_2 = [4, 5, 4] \end{aligned}$$

Diperoleh nilai dari :

$\mathrm{A}_1 = 2$
$B_1 = -1$
$C_1 = -5$

$A_2 = 4$
$B_2 = 5$
$C_2 = 4$

- Mencari nilai vector arah dari garis dengan mengalikan kedua vector normal dari masing-masing bidang :

$$\begin{aligned}
[a,b,c] &= \left[\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right] \\
&= \left[\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\right] \\
&= [21, -26, 15]
\end{aligned}$$

- Mencari titik yang berada pada garis perpotongan kedua bidang $(x_1, y_1, z_1) = (x_1, y_1, 0)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{z}_1 &= 0 \\
\mathbf{x_1} &= \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -1 \\ 28 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} \\
&= \tfrac{42}{14} = 3 \\
\mathbf{y_1} &= \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 28 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} \\
&= \tfrac{0}{14} = 0
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan garis l yang merupakan perpotongan dari dua bidang V_1 dan V_2 adalah

$$\begin{aligned}
\mathrm{l[x,y,z]} &= [x_1, y_1, z_1] + \lambda[a, b, c] \\
\mathrm{l[x,y,z]} &= [3, 0, 0] + \lambda[21, -26, 15]
\end{aligned}$$

9.4 Latihan Soal

1. Tentukan persamaan vektor garis lurus yang melalui titik P$(5, 8, 12)$ dan Q(1,10,3)!
2. Tentukan persamaan garis g yang melalui titik P$(-3, 9, 1)$ dan titik Q $(5,\ 6,\ -3)$?
3. Carilah persamaan bidang yang melalui titik (4,-2, 7) dengan vektor $\vec{n} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$!
4. Tentukan persamaan-persamaan garis lurus yang merupakan perpotongan bidang-bidang $x - 2y + z = 1$ dan $3x\breve{}\ y\ +\ 5z\ =\ 8$!
5. Tulis persamaan garis yang melalui $(2, 1, 3)$ yang sejajar dengan vektor $v = 2i + 4j + 6k$!
6. Tulis persamaan garis yang melalui dua titik P$(2, 4, 5)$ dan Q$(1, 3, 1)$.
7. Tuliskan persamaan garis yang memotong dibidang $x + y + z = b$ dan bidang $x - y + z = 2a$!
8. Temukan persamaan garis yang melewati (2,1,3) dan sejajar dengan bidang $2x - 3y + 2z = 5$ dan $3x + 2y - 2z = 7$!
9. Tuliskan persamaan garis yang melalui titik P(4,-3,5) dan sejajar garis yang memiliki vektor $-2i + 3j + 4k$!
10. Tentukan persamaan kanonik garis l yang melalui titik A$(-4, 3, 6)$ dan sejajar vektor $\vec{v} = 4i + 2j + 3k$
11. Tentukan persamaan garis k yang melalui titik P$(-2, 4, 5)$ dan $\vec{v} = 3i + j - 2k$
12. Tentukan persamaan garis yang merupakan perpotongan dari bidang 2x+5y-3z=9 dan bidang yang melewati titik A(4,-1,2) dengan vektor normalnya adalah $\vec{n} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$!
13. Carilah persamaan bidang yang memuat garis $x = 1 + 4t$, $y = 3 - 2t$, $z = 8 + t$ dan titik (6,3,-2)!

14. Tentukan persamaan garis yang melalui titik Q(3,5,2) dan tegak lurus terhadap bidang A: $2x - 3y + z = 6$!
15. Tentukan vektor arah dari garis potong bidang-bidang $2x - y + 3z = 5$ dan $x + 2y - z + 7 = 0$!

9.5 Daftar Pustaka

1. Hw, S. 2018. Geometri Analitik Bidang Datar. Surakarta: Muhammadiyah University press.
2. Jazuli, A. 2019. Geometri analitik Bidang. Purwokerto. UM Purwokerto Press.
3. Rhamayanti, Y. dan D. Lisa. 2022. Buku Ajar Mata Kuliah Geometri Analitik Bidang. Jawa Barat. Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia.
4. Sukirman. 2016. Geometri Analit Bidang dan Ruang. Banten: Penerbit Universitas Terbuka.
5. Susilo. A., D dan S. Hariyani. 2019. Geometri Analitika (Datar dan Ruang). Malang: Kanjuruhan Press.
6. Pasandaran, R.F. dan Ma'rufi. 2018. Geometri Analitik Bidang dan Ruang. Sulawesi Selatan. Global Research and Consulting Institute (Global- RCI).
7. Panggabean, E. M. 2020. Geometri Analitik Ruang. Penerbit Pustaka Pemuda
8. Yunita, A. dan Hamdunah. 2017. Geometri Analitik. Padang: Rumahkayu Pustaka Utama.

BAB 10

Bola

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-02: Mahasiswa mampu mengaplikasikan konsep Geometri mengenai persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar secara mandiri, bermutu, dan terstruktur untuk menyelesaikan permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari.

10.1 Pendahuluan

Bola adalah objek geometri tiga dimensi yang sangat penting dan sering digunakan dalam matematika. Bola didefinisikan sebagai himpunan titik-titik yang memiliki jarak yang sama dari titik pusatnya. Bola memiliki banyak sifat dan karakteristik menarik, seperti jari-jari, diameter, permukaan, dan volume. Selain itu, bola juga memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari, seperti dalam perhitungan ruang, fisika, teknik, dan banyak lagi.

Dalam pembelajaran tentang bola, kita akan mempelajari berbagai konsep, seperti jari-jari, diameter, permukaan, dan volume bola (Ulfa, 2020). Kita juga akan belajar tentang bagaimana menentukan persamaan bola dengan menggunakan koordinat pada ruang tiga dimensi. Dalam mempelajari konsep bola, kita akan mengembangkan kemampuan kita dalam melakukan perhitungan matematika yang lebih kompleks, dan memahami hubungan antara bola dengan objek-objek geometri lainnya. Dengan demikian, pemahaman tentang konsep bola akan sangat berguna dalam kehidupan sehari-hari, terutama bagi mereka yang bekerja di bidang teknik, fisika, atau matematika.

10.2 Persamaan Bola

Bola merupakan suatu benda yang sudah tidak asing lagi bagi kita. Benda yang berbentuk bola ini sering kita gunakan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dalam permainan sepak bola, basket, voly, kasti, golf, dan lain sebagainya (Suprijadi, 2021). Setiap jenis permainan bola tersebut memiliki ukuran yang berbeda-beda. Sesuai dengan namanya, bola termasuk dalam bangun ruang (Alexander dan Fullerton, 2021). Definisi bola adalah sebagai berikut:

1. **Definisi Bola 1**
   Bola (permukaan bola) merupakan himpunan titik-titik di ruang dimensi tiga yang berjarak sama dari suatu titik tertentu (Sukirman, 2017). Jarak yang sama disebut dengan jari-jari bola sedangkan titik tertentu disebut dengan titik pusat bola (Do Carmo, 2016).
2. **Definisi Bola 2**
   Persamaan bola merupakan tempat kedudukan titik-titik ujung vektor di dalam ruang yang titik pangkalnya tertentu dan panjang vektor tersebut konstan (Iyer, 2021). Titik pangkal tertentu disebut dengan titik pusat bola, dan panjang vektor yang konstan disebut jari-jari bola (Gray dan Abbena, 2018).

Persamaan bola dengan jari-jari r dan titik pusat (a,b,c)
Langkah-langkah menentukan persamaan bola dengan pusat (a,b,c)

1. Gambarkan sebuah bola pada ruang dimensi tiga, dengan titik pusat A(a,b,c) dan jari-jari r.
2. Ambil atau buat sebuh titik sebarang B(x,y,z) pada permukaan bola tersebut.

3. Vektor $\bar{AB} = <x-a, y-b, z-c>$ dengan $\bar{AB} = r$, $\bar{AB} = |r| = <x-a, y-b, z-c>$ Kemudian kuadratkan vektor tersebut, sehingga persamaannya menjadi
$|\bar{AB}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$
$|\bar{AB}| = r =$ jari-jari bola
atau

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

4. Karena B(x,y,z) adalah sebarang titik pada permukaan bola, maka persamaan $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$ merupakan persamaan dengan bola dengan pusat A(a,b,c) dan jari-jari = r.
Persamaan bola dengan pusat A(a,b,c) dan jari-jari = r adalah

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2........(1)$$

Dengan cara proses aljabar, dapat ditentukan jika pusat persamaan bola $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ adalah titik pangkal O(0,0,0), maka persamaannya menjadi:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = r^2$$

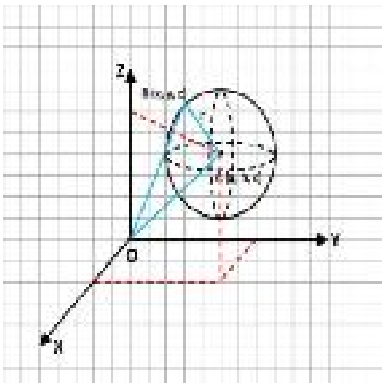
atau

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2........(2)$$

Sehingga persamaan (2) merupakan persamaan bola dengan pusat O(0,0,0) dan jari-jari = r

Contoh 10.2

Tentukan persamaan bola yang berpusat di titik (1, 2, 3) dan melalu titik (2, 4, 5)



Gambar 10.1: Persamaan Bola.

Penyelesaian
Jari-jari bola adalah jarak dua titik tersebut, yaitu

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2} \\ &= \sqrt{(1)^2+(2)^2+(2)^2} \\ &= \sqrt{1+4+4} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Persamaan bola yang dicari adalah persamaan bola dengan jari-jari 3 dan berpusat di titik (1, 2, 3), yaitu:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3^2$$

Sehingga diperoleh persamaan bola yaitu:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$$

10.3 Bentuk Umum Persamaan Bola

Bentuk umum persamaan bola dinyatakan dengan:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

untuk A, B, C, D anggota bilangan Real. Persamaan tersebut diperoleh dari:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2bx + b^2 + z^2 - 2cz + c^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

$$atau$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

dengan $A = -2a, B = -2b, C = -2c, D = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$

Bentuk umum persamaan bola tersebut dapat digunakan untuk menentukan titik pusat bola dan jari-jari bola, yaitu sebagai berikut:

$$x^2+Ax+(\frac{A}{2})^2+y^2+By+(\frac{B}{2})^2+z^2+Cz+(\frac{C}{2})^2 = -D+(\frac{A}{2})^2+(\frac{B}{2})^2+(\frac{C}{2})^2$$

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} + z^2 + Cz + \frac{C^2}{4} = -D + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4}$$

$$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 + (z + \frac{C}{2})^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}{4}$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa titik pusat bola adalah

$$(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}, \frac{-C}{2})$$

dan jari-jari bola adalah

$$\sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}{4}}$$

Contoh 10.3

Diketahui persamaan $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 4z + 2 = 0$, tentukan titik pusat dan jari-jari bola tersebut.

Penyelesaian:
Karena titik pusat bola adalah $(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}, \frac{-C}{2})$ dan jari-jari bola adalah $\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}}$, maka diperoleh:

Titik Pusat Bola:
$(\frac{-4}{2}, \frac{-(-6)}{2}, \frac{-4}{2}) = (-2, 3, -2)$
Jari-Jari Bola: $\sqrt{\frac{4^2+(-6)^2+4^2-4(2)}{4}} = \sqrt{15}$

10.4 Persamaan Bola Melalui 4 Titik

- **Cara 1: Dengan Determinan Matriks**
  Wang dan Yang (2021)Persamaan bola melalui titik $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ dan (x_4, y_4, z_4), adalah:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Contoh 10.4(Cara 1)

Tentukan persamaan bola yang melalui 4 titik $P(p, 0, 0), Q(0, q, 0)$, $R(0, 0, r)$, dan $S(0, 0, 0)$!
Penyelesaian

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ p^2+0^2+0^2 & p & 0 & 0 & 1 \\ 0^2+q^2+0^2 & 0 & q & 0 & 1 \\ 0^2+0^2+r^2 & 0 & 0 & r & 1 \\ 0^2+0^2+0^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Kolom 1 dikurangi r, dikali kolom ke-4)

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z \\ p^2 & p & 0 & 0 \\ q^2 & 0 & q & 0 \\ r^2 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(Kolom 1 dikurangi q dikali kolom ke-3)

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z \\ p^2 & p & 0 & 0 \\ q^2 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y \\ p^2 & p & 0 \\ q^2 & 0 & q \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x \\ p^2 & p \end{vmatrix} = 0$$

Atau :
$px^2+py^2+pz^2-prz-pqy-p^2x=0$
Dibagi p , kita peroleh :
$x^2+y^2+z^2-rz-qy-px=0$

- **Cara 2: Dengan Pemisalan Persmaan Lingkaran**
  Dengan pemisalan persmaan lingkaran :

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + Bx + Cz + D = 0$$

Contoh 10.4(Cara 2)

Tentukan persamaan bola yang melalui 4 titik $P(p, 0, 0), Q(0, q, 0)$, $R(0, 0, r)$, dan $S(0, 0, 0)$!

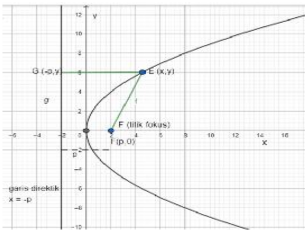
Penyelesaian
Melalui $O(0, 0, 0)$, maka $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + D = 0 \rightarrow D = 0$
Melalui $P(p, 0, 0)$, maka $p^2 + 0 + 0 + Ap + 0 + 0 + D = 0 \rightarrow A = -p$
Melalui $Q(0, q, 0)$, maka $0 + q^2 + 0 + 0 + Bq + 0 + D = 0 \rightarrow B = -q$
Melalui $R(0, 0, r)$, maka $0 + 0 + r^2 + 0 + 0 + Cr + D = 0 \rightarrow C = -r$
Jadi Persamaan bola adalah :

$$x^2 + y^2 + z^2 - px - qx - rz = 0$$

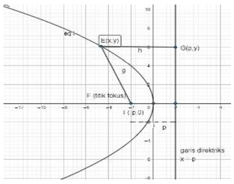
10.5 Bola dan Bidang Rata

Nasir (2020)Jika bola $S = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$ berjari-jari r, pusat $M(a, b, c)$. Bidang rata $V = Ax + By + Cz + D = 0$, dengan d adalah jarak antara pusat bola $M(a, b, c)$ ke bidang rata $V = Ax+By+Cz+D = 0$, maka ada 3 kemungkinan kedudukan antara bola $S = 0$ dan bidang rata $V = 0$, yaitu:

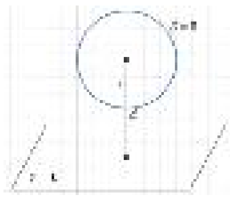
1. Jika $r > d$ berarti bola $S = 0$ berpotongan dengan bidang rata $V = 0$
2. Jika $r = d$ berarti bola $S = 0$ bersinggungan dengan bidang rata $V = 0$
3. Jika $r = d$ berarti bola $S = 0$ tidak berpotongan dan tidak bersinggungan dengan bidang rata $V = 0$



Gambar 10.2: Bola Berpotongan dengan Bidang Rata.



Gambar 10.3: Bola Bersinggungan dengan Bidang Rata.



Gambar 10.4: Bola Tidak Berpotongan dan Tidak Bersinggungan dengan Bidang Rata.

Contoh 10.5

Tentukan kedudukan bola dengan persamaan $x^2+y^2+z^2+2x+4y+4z-7=0$ terhadap bidang rata $2x+y+2z+2=0$

Penyelesaian:
- Menentukan Persamaan Bola

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

Persamaan Bola:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z - 7 = 0$$

dengan $A = 2; B = 4; C = 4; D = -7$

-Menentukan Jari-jari

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}C^2 - D}$$
$$r = \sqrt{\frac{1}{4}2^2 + \frac{1}{4}4^2 + \frac{1}{4}4^2 + 7}$$
$$r = \sqrt{1 + 4 + 4 + 7}$$
$$r = \sqrt{16} = 4$$

- Mencari titik pusat M menggunakan persamaan bola

$$M(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B, -\frac{1}{2}C$$

$$M(-\frac{1}{2}2, -\frac{1}{2}4, -\frac{1}{2}4$$
$$M(-1, -2, -2)$$

- Mencari jarak bidang rata ke titik pusat $M(-1, -2, -2)$: Persamaan Bidang Rata:

$$2x + y + 2z + 2 = 0$$

dengan $A = 2; B = 1; C = 2; D = 2$

$$d = |\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}|$$

$$d = |\frac{2(-1) + 1(-2) + 2(-2) + 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}|$$

$$d = |\frac{-2-2-4+2}{\sqrt{4+1+4}}|$$

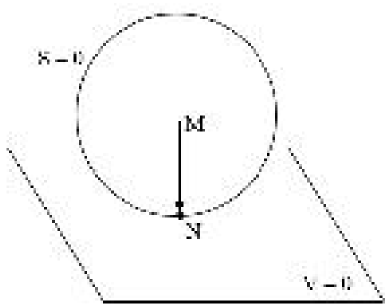
$$d = |\frac{-6}{\sqrt{9}}|$$

$$d = |\frac{-6}{3}|$$

$$d = \frac{6}{3} = 2$$

Karena $r = 4$ dan $d = 2$, sehingga $r > d(4 > 2)$, maka bola $s = 0$ BERPOTONGAN dengan bidang rata $v = 0$

10.6 Bidang Singgung Bola



Gambar 10.5: Bidang Singgung Bola di Titik N pada Bola.

Dimisalkan:
Bola

$$S = x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Pusat

$$M(-1/2A, -1/2B, -1/2C)$$

Titik singgung

$$N(x_1, y_1, z_1)$$

Berdasarkan Figure 2.5, terlihat MN merupakan vektor normal bidang singgung V, maka persamaan bidang datar V adalah

$$MN = [x_1 + 1/2A, y_1 + 1/2B, z_1 + 1/2C]$$

Sehingga persamaan V:

$$(x_1 + 1/2A)(x - x_1) + (y_1 + 1/2B)(y - y_1) + (z_1 + 1/2C)(z - z_1) = 0$$

$$x_1x + y_1y + z_1z + 1/2Ax + 1/2By + 1/2Cz - ([x_1]^2 + [y_1]^2 + [z_1]^2 + 1/2Ax_1$$
$$+1/2By_1 + 1/2Cz_1) = 0. \dots\dots\dots (1)$$

Karena titik $N(x_1, y_1, z_1)$ pada bola berarti:

$$x_1x + y_1y + z_1z + Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$$

Maka persamaan (1) menjadi:

$$x_1x + y_1y + z_1z + 1/2A(x - x_1) + 1/2B(y - y_1) + 1/2C(z - z_1) + D = 0$$

merupakan suatu bidang singgung yang ditanyakan.

LATIHAN SOAL

10.7 Latihan Soal

1. Tentukan persamaan bola yang berpusat di titik (1, 2, 3) dan melalu titik (2, 4, 5)
2. Tentukan titik pusat dan jari-jari bola $K = x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2 = 0$

3. Tentukan persamaan bola yang berpusat di titik $M(2, 1, -3)$ dan berjari-jari 4
4. Diketahui persamaan $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 4z + 2 = 0$, tentukan titik pusat dan jari-jari bola tersebut
5. Tentukan persamaan bola yang melalui 4 titik $P(4, -1, 2), Q(0, -2, 3)$, $R(1, -5, -1)$, dan $S(2, 0, 1)$!
6. Tentukan persamaan bola yang melalui 4 titik $P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0)$, $R(0, 0, 1)$, dan $S(0, 0, 0)$!
7. Tentukan persamaan bola dengan pusat (1,1,4) dan menyinggung bidang $X + Y = 12$
8. Tentukan persamaan bidang singgung pada bola $x^2+y^2+z^2+2x+4y+4z = 0$ di titik (0,0,0)
9. Tentukan persamaan bidang singgung bola $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 9$ di titik (1,3,3)
10. Tentukan kedua bidang singgung bola $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ yang melalui garis g: $x + y - 6 = 0$, $x - 2z - 3 = 0$

10.8 Daftar Pustaka

1. Alexander, J. C., Fullerton, R. E. (2021). Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. Cambridge University Press.
2. Do Carmo, M. P. (2016). Differential geometry of curves and surfaces. American Mathematical Society.
3. Gray, A., Abbena, E. (2018). Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. CRC Press.
4. Iyer, S. (2021). Bivariate Circular Distributions: Theory and Applications. Springer.
5. Nasir, M. (2020). Matematika 3: Geometri Analitik. Prenada Media.

6. Sukirman, M. (2017). Geometri Analitik 3 Dimensi: Bola, Silinder, Kerucut. UNNES Press.
7. Suprijadi, J. (2021). Geometri Analitik 3 Dimensi: Bola, Silinder, dan Kerucut. Universitas Negeri Semarang.
8. Ulfa, M. (2020). Matematika SMA Kelas XII: Geometri Analitik. Erlangga.
9. Wang, X., Yang, C. (2021). On submanifolds of the Euclidean space with partial sectional curvatures bounded. Annals of Global Analysis and Geometry, 59(2), 209-223.

BAB 11

Elipsoida

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-02: Mahasiswa mampu mengaplikasikan konsep Geometri mengenai persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar secara mandiri, bermutu, dan terstruktur untuk menyelesaikan permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari.

11.1 Pendahuluan

Elipsoida adalah permukaan geometris tiga dimensi yang memiliki bentuk seperti bola yang diperpanjang atau bentuk seperti telur. Elipsoida didefinisikan sebagai himpunan semua titik dalam ruang tiga dimensi yang memiliki jumlah jarak yang konstan dari tiga titik tetap yang disebut fokus. Elipsoida memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang, seperti dalam ilmu matematika, fisika, dan teknik. Contoh penerapan elipsoida dalam fisika adalah dalam perhitungan medan listrik dan magnet, serta dalam perhitungan kecepatan dan percepatan objek pada orbit planet dan satelit. Elipsoida juga digunakan dalam desain mesin, perancangan pesawat, dan konstruksi bangunan.

Elipsoida memiliki beberapa sifat matematika yang unik dan menarik. Misalnya, elipsoida memiliki tiga sumbu utama yang sejajar dengan tiga sumbu koordinat, dan setiap sumbu memiliki panjang yang berbeda-beda.

Selain itu, elipsoida juga memiliki titik paling jauh yang disebut titik fokus dan memiliki jarak yang sama dari permukaan elipsoida. Memahami konsep elipsoida sangat penting dalam matematika dan geometri, karena elipsoida sering digunakan dalam perhitungan fisika dan teknik. Studi tentang elipsoida dapat membantu kita memahami konsep matematika yang lebih kompleks, seperti transformasi koordinat dan matriks rotasi. Oleh karena itu, mempelajari elipsoida dapat membantu kita mengembangkan keterampilan analisis dan pemecahan masalah yang kuat.

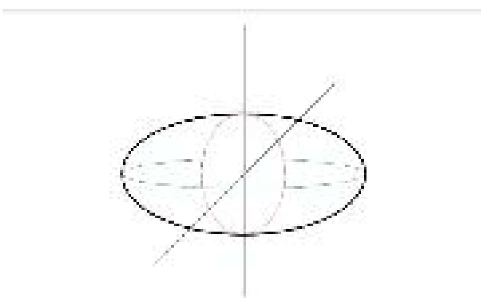
11.2 Definisi Elipsoida

Elipsoida adalah suatu permukaan kuadrik tertutup yang merupakan analog tiga dimensi dari elips. Secara umum, elipsoida memiliki grafik persamaan F(x,y,z) = C. Persamaan elipsoida secara matematis dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

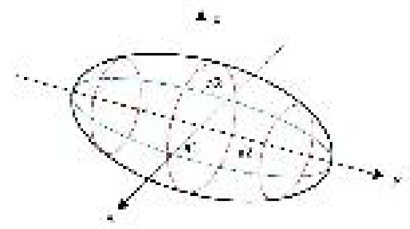
(Fonna & Mursalin, 2018).

Elipsoida dengan pusat $(0, 0, 0)$ memiliki enam titik puncak, yaitu $(a, 0, 0), (-a, 0, 0), (0, b, 0), (0, -b, 0), (0, 0, c), (0, 0, -c)$. Elipsoida dengan pusat (p, q, r) juga memiliki enam titik puncak, yaitu $(a, q, r), (-a, q, r), (p, b, r), (p, -b, r),\ (p, q, c), (p, q, -c)$ (Handayani dkk., 2015).



Gambar 11.1: Elipsoida dengan Pusat $(0, 0, 0)$.

Dari beberapa persamaan yang sering digunakan: $f = \frac{a-b}{a}; e = \sqrt{2f - f^2}$



Gambar 11.2: Elipsoida.

Dari gambar di atas, persamaan elipsoida dapat dijelaskan sebagai berikut:
- Elipsoida merupakan permukaan tertutup
- Elipsoida berpusat di titik (0,0,0)
- Memiliki bidang simetri yang terdiri dari XOY, XOZ, dan YOZ.
- Garis yang memotong dua bidang yang simetris disebut sumbu simetri, yaitu sumbu X, sumbu Y, dan sumbu Z.
- $a_1xa_1, a_2ya_2, a_3za_3$
- Panjang $2a_1, 2a_2, 2a_3$ disebut panjang sumbu elipsoida
- Bola merupakan elipsoida yang memiliki sumbu-sumbu yang panjangnya sama
- Elipsoida yang berpotongan dengan sumbu simetrinya disebut puncak elipsoida - Irisan dengan bidang sejajar bidang simetri merupakan elips
- Persamaan elipsoida terdiri dari beberapa bentuk, yaitu di bidang XOY, XOZ, dan YOZ (Lumbantoruan, 2021).

Pembuktian rumus elipsoida

Misalkan pada bidang XOY dan YOZ masing-masing ditentukan elips dengan persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Dengan ketentuan sebagai berikut:

- Elips dibidang XOY digerakkan secara sejajar sepanjang sumbu OZ dan pusat elips hasil pergerakan dipertahankan tetap di sumbu OZ.

- Semua elips hasil pergerakan selain tegak lurus terhadap sumbu OZ satu terhadap yang lain saling sebangun.

- Puncak elips hasil pergerakan selalu terletak di bidang YOZ.

Misalkan persamaan elips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dibidang XOY atau z-0, digerakkan ke bidang z=T
Menurut ketentuan tersebut, maka sumbu-sumbu elips baru akan sejajar sumbu-sumbu lama pada bidang YOZ, titik (0,y,τ) akan terletak di elips

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(Yunita & Hamdunah, 2017)
Sehingga berlaku:

$$\frac{y\tau^2}{b^2} + \frac{\tau^2}{c^2} = 1$$

$$y\tau^2 = b^2(1 - \frac{\tau^2}{c^2})$$

$$y\tau^2 = \frac{b^2c^2 - b^2\tau^2}{c^2}$$

$$y\tau^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - \tau^2)$$

$$y\tau = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + \tau^2}$$

Karena elips di bidang z=τ harus sebangun dengan di bidang XOY yang setengah sumbu-sumbunya adalah a dan b maka perbandingan setengah sumbu-sumbu elips di bidang z=τ juga harus sama yaitu a:b. Oleh sebab itu setengah sumbu-sumbu yang lain di bidang z=τ adalah

$$x\tau = \frac{a}{c} - \sqrt{c^2 + \tau^2}$$

Dapat disimpulkan elips yang berada di bidang z=τ adalah

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2-\tau^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(c^2-\tau^2}{c^2}} = 1$$

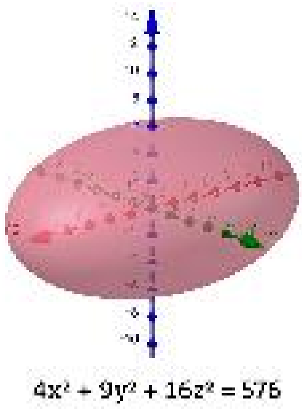
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - z^2}{c^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

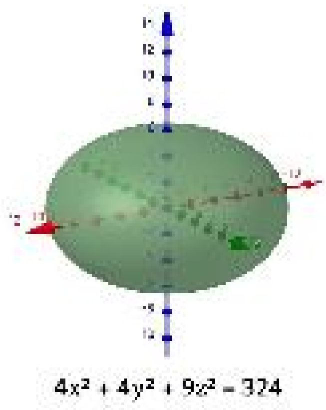
11.3 Jenis Elipsoida

Elipsoida terdiri dari 4 jenis, yaitu:

1. Elipsoida Tri-Aksial (a > b > c)
2. Elipsoida Oblat (a = b > c)
3. Elipsoida Prolat (a = b < c)
4. Elipsoida Bola (a =b = c)



Gambar 11.3: Elipsoida Tri-Aksial.



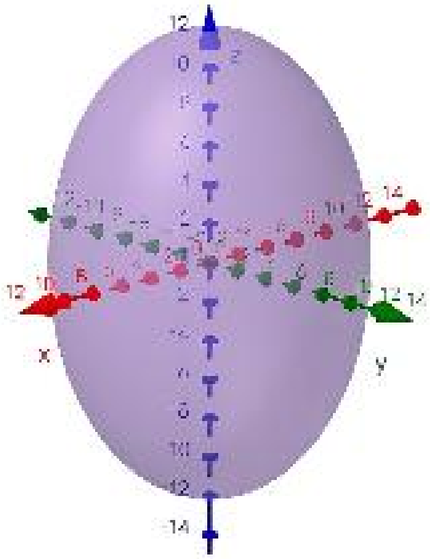
Gambar 11.4: Elipsoida Oblat.

11.4 Persamaan Elipsoida

Bentuk persamaan elips yang terletak di bidang XOY yaitu

$$z = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Gambar 11.5: Elipsoida Prolat.

Bentuk persamaan elips yang terletak di bidang XOZ yaitu

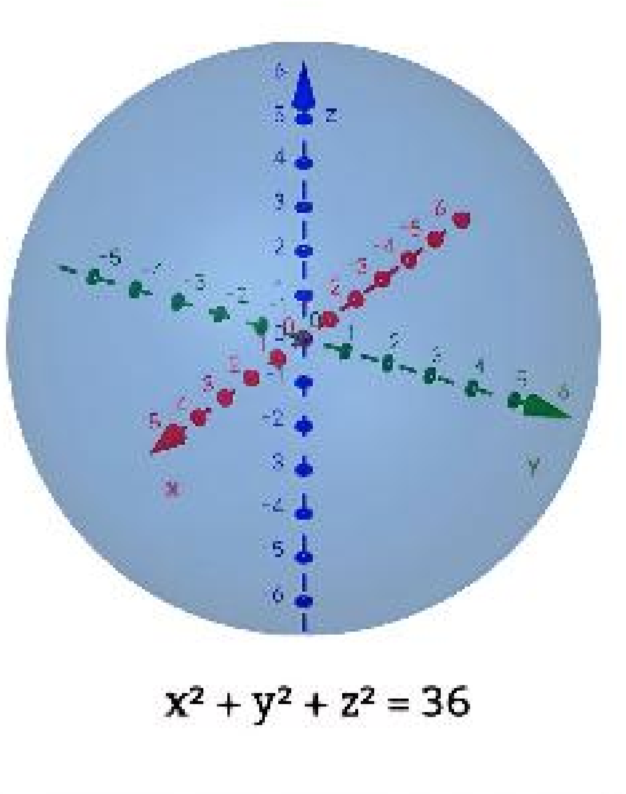
$$y = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Bentuk persamaan elips yang terletak di bidang YOZ yaitu

$$x = 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Gambar 11.6: Elipsoida Bola.

11.4.1 Persamaan Elipsoida Pada Bidang XOY di Putar Terhadap Sumbu X

Persamaan elips pada bidang XOY berbentuk

$$z = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Misalkan $T(x_0, y_0, z_0)$ sebarang titik pada elips. Untuk bidang XOY, maka harus dipenuhi:

$$z_0 = 0 ....(1)$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \text{......................................}(2)$$

Karena persamaan bidang yang melalui titik sebarang (Titik T) dan juga tegak lurus dengan sumbu x maka $x = x_0$

Kemudian, terdapat persamaan bola yang melalui titik T juga berpusat di O memiliki persamaan :

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Jadi, persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$x = x_0 \text{...}(3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \text{...................}(4)$$

Eliminasi persamaan (1),(2),(3), dan (4).

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + 0$$

dari persamaan (1)

$$x_0^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + 0$$

dari persamaan (3)

$$y^2 + z^2 = y_0^2 \text{................................}(5)$$

Substitusi persamaan (3) dan (5) ke persamaan (2) untuk memperoleh persamaan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

Persamaan ini merupakan persamaan elipsoida putaran dengan sumbu putar sumbu x

Contoh Soal 1

Diberikan persamaan elips pada bidang XOY

$$z = 0$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Elips tersebut diputar mengelilingi sumbu x. Tentukan persamaan elipsoida putaran yang terbentuk!

Penyelesaian :

Misalkan $T(x_0, y_0, z_0)$ sebarang titik pada elips. Maka harus dipenuhi:

$$z_0 = 0$$

$$\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} = 1$$
$$\frac{y_0^2}{9} = 1 - \frac{x_0^2}{16}$$
$$y_0^2 = 9(1 - \frac{x_0^2}{16})$$

Persamaan bidang yang melalui Titik T dan tegak lurus dengan sumbu $x = x_0$

Kemudian, terdapat persamaan bola yang melalui titik T juga berpusat di O memiliki persamaan :

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Jadi, persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$x = x_0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

$$x_0^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + 9(1 - \frac{x_0^2}{16}) + 0$$

$$y^2 + z^2 = 9(1 - \frac{x^2}{16})$$
$$\frac{y^2 + z^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16}$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2 + z^2}{9} = 1$$

11.4.2 Persamaan Elipsoida Pada Bidang XOY di Putar Terhadap Sumbu Y

Persamaan elips pada bidang XOY berbentuk

$$z = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Misalkan $T(x_0, y_0, z_0)$ sebarang titik pada elips. Untuk bidang XOY, maka harus dipenuhi:

$$z_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Karena persamaan bidang yang melalui titik sebarang (Titik T) dan juga tegak lurus dengan sumbu y maka $y = y_0$

Kemudian, terdapat persamaan bola yang melalui titik T juga berpusat di O memiliki persamaan :

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Jadi, persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$y = y_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Eliminasi persamaan (1),(2),(3), dan (4).

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + 0$$

dari persamaan (1)

$$x^2 + y_0^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + 0$$

dari persamaan (3)

$$x^2 + z^2 = x_0^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Substitusi persamaan (3) dan (5) ke persamaan (2) untuk memperoleh persamaan

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Persamaan ini merupakan persamaan elipsoida putaran dengan sumbu putar sumbu y

Contoh Soal 2 Diberikan persamaan elips pada bidang XOY

$$z = 0$$

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$$

Elips tersebut diputar mengelilingi sumbu x. Tentukan persamaan elipsoida putaran yang terbentuk!
Penyelesaian :
Misalkan $T(x_0, y_0, z_0)$ sebarang titik pada elips. Maka harus dipenuhi:

$$z_0 = 0$$

$$\frac{x_0^2}{12} + \frac{y_0^2}{8} = 1$$

$$\frac{x_0^2}{12} = 1 - \frac{y_0^2}{8}$$

$$x_0^2 = 12(1 - \frac{y_0^2}{8})$$

Persamaan bidang yang melalui Titik T dan tegak lurus dengan sumbu $x = x_0$

Kemudian, terdapat persamaan bola yang melalui titik T juga berpusat di O memiliki persamaan :

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Jadi, persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$y = y_0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

$$x^2 + y_0^2 + z^2 = 12(1 - \frac{y_0^2}{8}) + y_0^2 + 0$$

$$x^2 + z^2 = 12(1 - \frac{y^2}{8})$$

$$\frac{x^2 + z^2}{12} = 1 - \frac{y^2}{8}$$

$$\frac{x^2 + z^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$$

11.4.3 Persamaan Elipsoida pada Pidang XOZ di Putar Terhadap sumbu X

Persamaan elips untuk bidang XOZ berbentuk

$$y_0 = 0$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

Persamaan bidang yang melalui titik T dan tegak lurus dengan sumbu X yaitu $x = x_0$ Kemudian, persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Oleh karenanya, persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$x = x_0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Selanjutnya, x_0^2, y_0^2, z_0^2, akan diperoleh persamaan yaitu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

Persamaan yang didapatkan ini merupakan persamaan elipsoida pada bidang XOZ yang diputar dengan sumbu putar yaitu sumbu x

Contoh Soal 3
Suatu elips dengan persamaan

$$y = 0$$

$$x^2 + 2z^2 - 8 = 0$$

Diputar mengelilingi sumbu x. Tentukan persamaan elipsoida putaran yang terbentuk!
Penyelesaian :
Misalkan $T(x_0, y_0, z_0)$ sebarang titik pada elips. Maka yang harus dipenuhi adalah

$$y_0 = 0$$

$$x_0^2 + 2z_0^2 - 8 = 0$$

$$2z_0^2 = 8 - x_0^2$$

$$z_0^2 = \frac{8 - x_0^2}{2}$$

Persamaan bidang yang melalui titik T dan tegak lurus dengan sumbu $x = x_0$ Persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Jadi, persamaan lingkaran yang dilalui T adalah:

$$x = x_0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

$$x_0^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + 0 + \frac{8 - x_0^2}{2}$$
$$y^2 + z^2 = \frac{8 - x_0^2}{2}$$
$$2y^2 + 2z^2 = 8 - x^2$$
$$x^2 + 2(y^2 + z^2) = 8$$
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2 + z^2}{4} = 1$$

11.4.5 Persamaan Elipsoida pada bidang XOZ di Putar Terhadap Sumbu Z

Persamaan elips untuk bidang XOZ berbentuk

$$y_0 = 0$$
$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

Persamaan bidang yang melalui titik T dan tegak lurus dengan sumbu X yaitu $z = z_0$ Kemudian, persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Oleh karenanya, persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$z = z_0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Selanjutnya, x_0^2, y_0^2, z_0^2, akan diperoleh persamaan yaitu

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Persamaan yang didapatkan ini merupakan persamaan elipsoida pada bidang XOZ yang diputar dengan sumbu putar yaitu sumbu z

11.4.6 Persamaan Elipsoida pada Pidang YOZ di Putar Terhadap sumbu Y

Persamaan elips untuk bidang YOZ berbentuk

$$x_0 = 0$$

$$\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

Persamaan bidang yang melalui titik T dan tegak lurus dengan sumbu Y yaitu $y = y_0$ Kemudian, persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Oleh karenanya, persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$y = y_0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Selanjutnya, dengan mengeliminasi x_0, y_0, z_0, akan diperoleh persamaan yaitu

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$$

Persamaan yang didapatkan ini merupakan persamaan elipsoida pada bidang YOZ yang diputar dengan sumbu putar yaitu sumbu Y

11.4.7 Persamaan Elipsoida pada Pidang YOZ di Putar Terhadap sumbu Z

Persamaan elips untuk bidang YOZ berbentuk

$$x_0 = 0$$

$$\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

Persamaan bidang yang melalui titik T dan tegak lurus dengan sumbu Y yaitu $y = y_0$ Kemudian, persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Oleh karenanya, persamaan lingkaran yang dilalui T adalah

$$z = z_0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Selanjutnya, dengan mengeliminasi x_0, y_0, z_0, akan diperoleh persamaan yaitu

$$\frac{x^2 + z^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Persamaan yang didapatkan ini merupakan persamaan elipsoida pada bidang YOZ yang diputar dengan sumbu putar yaitu sumbu z

Contoh Soal 4
Suatu elips dengan persamaan

$$x_0 = 0$$

$$y^2 + 2z^2 - 4 = 0$$

Diputar mengelilingi sumbu y. Tentukan persamaan elipsoida putaran yang terbentuk!
Penyelesaian :
Misalkan $T(x_0, y_0, z_0)$ sebarang titik pada elips. Maka yang harus dipenuhi adalah

$$x_0 = 0$$

$$y_0^2 + 2z_0^2 - 4 = 0.........(1)$$

Persamaan bidang yang melalui titik T dan tegak lurus dengan sumbu $y = y_0$ Persamaan bola yang melalui titik T dan titik pusatnya di O adalah:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Jadi, persamaan lingkaran yang dilalui T adalah:

$$y = y_0.........(2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.........(3)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$z_0^2 = \frac{4 - y^2}{2}$$

Subtitusikan x_0,y_0,dan z_0 kedalam persamaan (3) sehingga diperoleh :

$$x_0 = 0$$

$$y = y_0$$

$$x^2 + y_0^2 + z^2 = 0 + y_0^2 + \frac{4 - y^2}{2}$$

$$x^2 + z^2 = \frac{4 - y^2}{2}$$

$$2x^2 + 2z^2 = 4 - y^2$$

$$y^2 + 2(x^2 + z^2) = 4$$

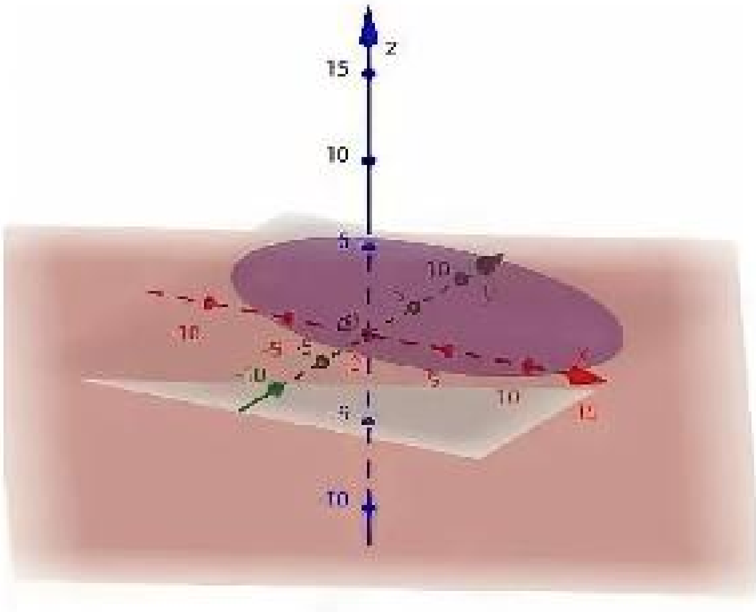
$$\frac{y^2}{4} + x^2 + z^2 4 = 1$$

Sehingga, persamaan yang diperoleh adalah :

$$\frac{y^2}{4} + x^2 + z^2 4 = 1$$

11.5 Persamaan Bidang Singgung Elipsoida

Misalkan $T(X_1, Y_1, Z_1)$ merupakan titik singgungnya. persamaan garis yang melalui T dengan bilangan bilangan arah p,q,r dengan pusat (0,0,0) adalah



Gambar 11.7: Elipsoida dengan Titik Pusat $(0, 0, 0)$.

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}$$

Dari elipsoida dan koordinat koordinat titik potong garis di atas, diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\frac{x - x_1}{p} = \lambda\frac{y - y_1}{q} = \lambda\frac{z - z_1}{r} = \lambda$$

$$p\lambda = x - x_1, q\lambda = y - y_1, r\lambda = z - z_1$$

$$x = p\lambda + x_1, y = q\lambda + y_1, z = r\lambda + z_1$$

$$\frac{(p\lambda + x_1)^2}{a^2} + \frac{(q\lambda + y_1)^2}{b^2} + \frac{(r\lambda + z_1)^2}{c^2} = 1$$

Lalu jabarkan persamaan diatas menjadi :

$$\frac{(x_1^2 + 2p\lambda x_1 + p^2\lambda^2)}{a^2} + \frac{(y_1^2 + 2q\lambda y_1 + q^2\lambda^2)}{b^2} + \frac{(z_1^2 + 2r\lambda z_1 + r^2\lambda^2)}{c^2} = 1$$

$$(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2})\lambda^2+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{b^2}+(\frac{2x_1p}{a^2}+\frac{2y_1q}{b^2}+\frac{2z_1r}{c^2})\lambda=1$$
$$(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2})\lambda^2+1+(\frac{2x_1p}{a^2}+\frac{2y_1q}{b^2}+\frac{2z_1r}{c^2})\lambda=1$$
$$(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2})\lambda^2+(\frac{2x_1p}{a^2}+\frac{2y_1q}{b^2}+\frac{2z_1r}{c^2})\lambda=0$$

Salah satu akar dari persamaan kuadrat di atas adalah $\lambda_1 = 0$ agar garis menyinggung elipsoida, maka harus $\lambda_1 = \Lambda_2 = 0$
Hal ini terjadi untuk $(\frac{2x_1p}{a^2}+\frac{2y_1q}{b^2}+\frac{2z_1r}{c^2})=0$ atau $2(\frac{x_1p}{a^2}+\frac{y_1q}{b^2}+\frac{z_1r}{c^2})=0$
Sehingga diperoleh :

$$\frac{x_1(x-x_1)}{a^2}+\frac{y_1(y-y_1)}{b^2}+\frac{z_1(z-z_1)}{c^2}=0$$
$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=0$$
$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}$$
$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}=1$$

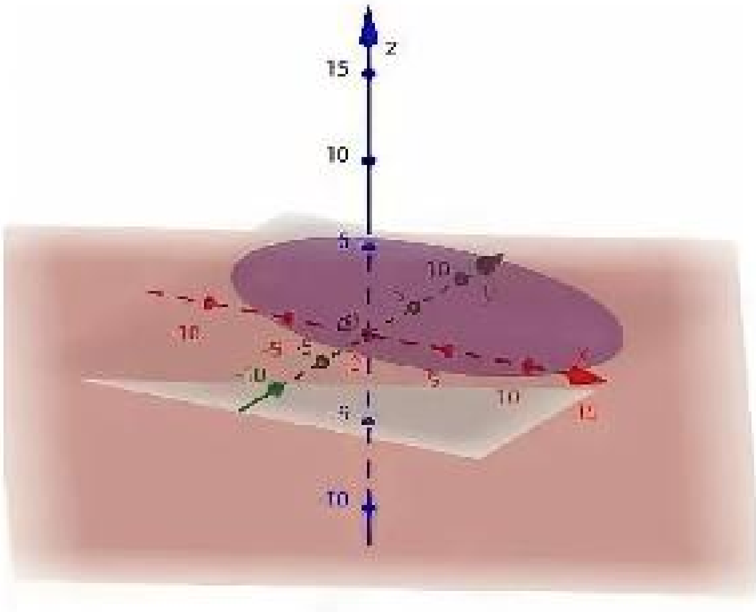
Untuk Persamaan garis singgung pada elipsoida dengan titik pusat P (m,n,o) dapat dicari dengan cara transformasi,yaitu menggeser sumbu x sejauh m, sumbu y sejauh n dan sumbu z sejauh o.

Dengan menggunakan cara yang sama, maka akan didapatkan :

$$\frac{(x-m)-x_1-m)}{p}=\frac{y-n)-(y_1-n)}{q}=\frac{(z-0)-(z_1-0)}{r}=\lambda$$

Dari elipsoida dan koordinat koordinat titik potong garis di atas, diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\frac{(x-m)-x_1-m)}{p}=\lambda\frac{y-n)-(y_1-n)}{q}=\lambda\frac{(z-0)-(z_1-0)}{r}=\lambda$$



Gambar 11.8: Elipsoida dengan Titik Pusat $P(m, n, o)$.

$$(x-m)-(x_1-m)=\lambda p(y-n)-(y_1-n)=\lambda q(z-0)-(z_1-0)=\lambda r$$

$$(x-m)=\lambda p+(x_1-m)(y-n)=\lambda q+(y_1-n)(z-0)=\lambda r+(z_1-0)$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}+\frac{(z-0)^2}{c^2}=1$$

lalu dijabarkan menjadi :

$$\frac{(p\lambda+(x_1-m))^2}{a^2}\frac{(q\lambda+(y-1-n))^2}{b^2}+\frac{(r\lambda+(z_1-0))^2}{c^2}=1$$

$$\frac{(x_1-m)^2+2p\lambda(x_1-m)+p^2\lambda^2}{a^2}+\frac{(y_1-n)^2+2q\lambda(y_1-n)+q^2\lambda^2}{b^2}+\frac{(z_1-0)^2+2r\lambda(z_1}{c^2}$$

$$(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2})\lambda^2+\frac{(x_1-m)^2}{a^2}+\frac{(y_1-n)^2}{b^2}+\frac{(z_1-0)^2}{c^2}+(\frac{2p(x_1-m)}{a^2}+\frac{2q(y_1-n)}{b^2}+\frac{2r(z_1-}{c^2}$$

$$(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2})\lambda^2+1+(\frac{2p(x_1-m)}{a^2}+\frac{2q(y_1-n)}{b^2}+\frac{2r(z_1-0)}{c^2})\lambda=1$$

$$(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2})\lambda^2+(\frac{2p(x_1-m)}{a^2}+\frac{2q(y_1-n)}{b^2}+\frac{2r(z_1-0)}{c^2})\lambda=0$$

$$\frac{(x-m)-(x_1m)-(x-m))}{a^2}+\frac{(y-n)-(y_1-n)-(y-n))}{b^2}\frac{(z-0)-(z_1-0)-(z-}{c^2}$$

$$\frac{(x-m)-(x_1-m)}{a^2}-\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)(y_1-n)}{b^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}+\frac{(z-0)-(z_1-0)}{c^2}-\frac{(z-}{c^2}$$

$$\frac{(x-m)-(x_1-m)}{a^2}+\frac{(y-n)(y_1-n)}{b^2}+\frac{(z-0)-(z_1-0)}{c^2}=\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}+\frac{(z-}{c}$$

$$\frac{(x-m)-(x_1-m)}{a^2}+\frac{(y-n)(y_1-n)}{b^2}+\frac{(z-0)-(z_1-0)}{c^2}=1$$

Misalkan T (x_1, y_1, z_1) merupakan titik luar elipsoida. Lalu dari titik T akan dibuat bidang bidang yang menyinggung elipsoida Misalkan P (x_0, y_0, z_0) adalah suatu titik singgung dari bidang singgung yang menyinggung titik T. persamaan bidang singgung di titik P adalah : (Pasandaran & Ma'rufi, 2018)

$$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}=1$$

Karena bidang singgung ini menyinggung titik T, maka memenuhi

$$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}=1$$

Hal ini berarti bahwa setiap titik singgung dari bidang singgung pada elipsoida yang melalui titik T terletak pada bidang dengan persamaan

$$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}=1$$

Persamaan ini merupakan persamaan bidang kutub dari titik T terhadap elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Persamaan batas bayangan elipsoida oleh sinar sinar memancar dari T (z_1, y_1, z_1) adalah

$$\begin{cases}\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$$

Contoh soal 5

Tentukan persamaan batas bayangan dari elipsoida $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ yang disinari oleh titik A (2,-3,1) Penyelesaian : Persamaan bidang kutub dari kutub dari titik A terhadap elipsoida adalah $\frac{2x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}+\frac{z}{c^2}=1$ atau $4x-4y+3z=12$ jadi persamaan batas bayangannya adalah

$$\begin{cases} 4x-4y+3z=12 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

11.6 Latihan Soal

1. Suatu elips dengan persamaan

$$z=0$$

$$9x^2+4y^2=36$$

Diputar mengelilingi sumbu x. Tentukan persamaan elipsoida putaran yang terbentuk!

2. Suatu elips dengan persamaan

$$z=0$$

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$$

Diputar mengelilingi sumbu y. Tentukan persamaan elipsoida putaran yang terbentuk!

3. Suatu elips dengan persamaan

$$z=0$$

$$x^2+6y^2-30=0$$

Diputar mengelilingi sumbu x. Tentukan persamaan elipsoida putaran yang terbentuk!

4. Suatu elips dengan persamaan

$$y = 0$$

$$x^2 + 4z^2 - 16 = 0$$

Diputar mengelilingi sumbu x. Tentukan persamaan elipsoida putaran yang terbentuk!

5. Carilah nilai m sehingga bilangan $x - 2y - 2z + m = 0$ menyinggung elipsoida dengan persamaan $\frac{y^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$

6. Tentukan persamaan batas bayangan dari elipsoida $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{16} = 1$ yang disinari titik $P(4, -6, 3)$

7. Tentukan persamaan batas bayangan dari elipsoida $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{6}$ yang disinari oleh titik $A(3, -5, 1)$

8. Tentukan titik puncak yang ada pada elipsoida $4x^2 + 2y^2 + 7z^2 = 28$ yang terletak pada sumbu koordinat

9. Tentukan semua titik-titik puncak elipsoida $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$ yang terletak di sumbu-sumbu koordinat.

10. Tentukan persamaan bidang singgung elipsoida $4x^2 + 16y^2 + 8z^2 = 1$ yang sejajar dengan bidang $x - 2y + 2z + 17 = 0$

11. Suatu elips dengan persamaan

$$x_0 = 0$$

$$y^2 + 4z^2 - 6 = 0$$

Di putar mengelilingi sumbu y. Tentukan persamaan elipsoida yang terbentuk!

12. Suatu elips dengan persamaan

$$x_0 = 0$$

$$y^2 + 12z^2 - 36 = 0$$

Di putar mengelilingi sumbu y. Tentukan persamaan elipsoida yang terbentuk!

13. Suatu elips dengan persamaan

$$x_0 = 0$$

$$y^2 + 8z^2 - 6 = 0$$

Di putar mengelilingi sumbu y. Tentukan persamaan elipsoida yang terbentuk!

14. Jika irisan dari kerucut selubung elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ yang berpuncak di P, dengan bidang z = 0 merupakan hiperbola ortogonal. Buktikan bahwa TK dari P adalah $\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1x$

15. Suatu titik P bergerak sedemikian sehingga kerucut selubung elipsoida : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dengan P sebagai puncaknya diiris oleh bidang z = 0 menurut sebuah lingkaran. Buktikan bahwa TK dari P adalah irisan kerucut x = 0, $\frac{y^2}{b^2-a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ atau y = 0, $\frac{x^2}{a^2-b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

11.7 Daftar Pustaka

1. Fonna, M., dan Mursalin. 2018. *Pengantar Geometri Analitik*. Aceh Utara : UNIMAL Press.
2. Handayani, S., Mashadi., dan S. Gemawati. 2015. Persamaan Garis Singgung pada Hiperbola. *Jurnal Karismatika*. 1(2) : 33-37.
3. Lumbantoruan, J. H. 2021. *Geometri Analitik*. Perbalingga : CV Eureka Media Aksara.
4. Pasandaran, R.F. dan Ma'rufi. 2018. Geometri Analitik Bidang dan Ruang. Sulawesi Selatan. Global Research and Consulting Institute (Global-RCI).
5. Yunita, A. dan Hamdunah. 2017. Geometri Analitik. Padang: Rumahkayu Pustaka Utama.

BAB 12

Hiperboloida

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-02: Mahasiswa mampu mengaplikasikan konsep Geometri mengenai persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar secara mandiri, bermutu, dan terstruktur untuk menyelesaikan permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari.

12.1 Pendahuluan

Hiperboloida adalah sebuah permukaan geometris yang memiliki dua jenis, yaitu hiperboloida satu lembar dan hiperboloida dua lembar. Hiperboloida memiliki bentuk yang menarik dan memiliki aplikasi yang luas dalam berbagai bidang, seperti matematika terapan, fisika, dan teknik. Pemahaman tentang konsep hiperboloida sangat penting dalam geometri dan matematika terapan, terutama dalam perhitungan fisika dan teknik. Konsep ini juga digunakan dalam berbagai aplikasi praktis, seperti dalam desain mesin, perancangan pesawat, dan konstruksi bangunan. Oleh karena itu, mempelajari hiperboloida dapat membantu kita memahami berbagai konsep matematika yang kompleks dan mengembangkan keterampilan analisis dan pemecahan masalah yang kuat.

12.2 Definisi Hiperboloida

A hyperboloid is the set of point in R^3 such that for each point the difference of it's distances from two fixed point (the foci) is constant.

Dari definisi di atas, dikatakan bahwa hiperboloida merupakan himpunan titik titik di R^3 (dimensi 3) yang selisih jaraknya terhadap dua titik tetap yang disebut sebagai titik fokus adalah sama (Pasandaran, dan Ma'rufi, 2018; Panggabean, 2020).

Definition 12.2.1 (Hiperboloida)**.** Hiperboloida merupakan himpunan titik titik di R^3 (dimensi 3) yang selisih jaraknya terhadap dua titik tetap yang disebut sebagai titik fokus adalah sama (Yunita dan Hamdunah, 2017).

12.3 Jenis-Jenis Hiperboloida

12.3.1 Hiperboloida Satu Daun

Hiperboloida satu daun adalah hasil putaran hiperbola pada bidang yang diputar mengelilingi sumbu z maka akan diperoleh sebuah bidang putar yaitu hiperboloida satu daun *(Hyperboloid One-sheet)* (Fonna dan Mursalin, 2018; Handayaniet al., 2015; Lumbantoruan, 2021).

Bentuk umum persamaan hiperboloida satu daun:

$$\boxed{\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} - \tfrac{z^2}{c^2} = 1}$$

Pada persamaan umum di atas mewakili persamaan dari permukaan yang disebut dengan hiperboloida satu daun. Misal $z = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Maka jejak xy dalah elips.

Jika kita mengganti z dalam persamaan yang berikan dengan nilai tetap z_0 maka kita akan memperoleh persamaan :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{Z_0^2}{c^2}$$

Maka persamaan ini menujukkan bahwa bagian-bagian yang sejajar dengan bidang xy adalah elips dan bahwa bagian-bagiannya bertambah besar karena bidang yang berpotongan $z = z_0$ menjauh dari titik asal. Jika $a = b$ alah bagian lingkaran dan permukaan tersebut adalah sebuah permukaan putaran.

Jejak-jejak di bidang xz dan yz masing-masing adalah hiperbola yang memiliki persamaan:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

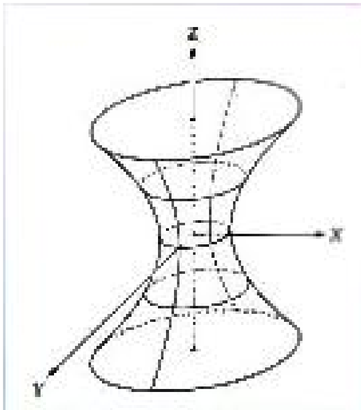
$$dan$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

12.3.2 Karakteristik Umum Hiperboloida Satu Daun

Karakteristik umum yang ada pada hiperboloida satu daun *(hyperboloid one-sheet)* (Pasandaran dan Ma'rufi, 2018) adalah:

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- Jejak berbentuk elips pada bidang xy.
- Jejak berbentuk hiperbola pada bidang xz.
- Jejak berbentuk hiperbola pada bidang yz.
- Sumbu hiperboloida sesuai dengan variabel yang koefisiennya negatif.
- Berbentuk sebuah terowongan dengan corong yang membesar.
- Hanya memiliki satu variabel negatife pada persamaanya.



Gambar 12.1: Hiperboloida Satu Daun.

Contoh Soal

Diketahui sebuah persamaan $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$. Tentukan:
A. Persamaan hiperboloida satu daunnya
B. Persamaan bidang yang membentuknya
C. Cara menggambar hiperboloida satu daunnya

PENYELESAIAN :
A. Persamaan Hiperboloida satu daun

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 z^2 &= 36 \\ \frac{4}{36x^2} + \frac{9}{36y^2}\frac{1}{36z^2} &= \frac{36}{36} \\ \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{4y^2}\frac{1}{36z^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\frac{z^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

B. Persamaan bidang yang membentuk
*Misalkan z=0

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{0}{36} &= 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Berbentuk elips pada bidang xy
*Misalkan y=0

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9}+\frac{0}{4}-\frac{z^2}{36} &= 1 \\ \frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

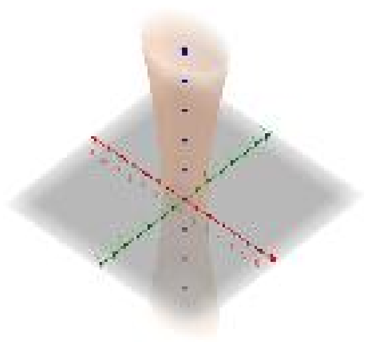
Berbentuk hiperbola pada bidang xz
*Misalkan x=0

$$\begin{aligned} \frac{0}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36} &= 1 \\ \frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

C. Cara menggambar hiperboloida satu daun
Misalkan y=z=0, maka

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36} &= 1 \rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{0}{4}-\frac{0}{36} \\ &= 1 \\ \frac{x^2}{9} &= 1 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \sqrt{9} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Jadi, dari titik potong di atas maka didapatkan hiperboloida satu daun yang berbentuk seperti berikut:



Gambar 12.2: Hiperboloida Satu Daun.

12.3.3 Hiperboloida Dua Daun

Definition 12.3.1 (Hiperboloida Dua Daun)**.** Hiperboloida dua daun adalah bagian luar hiperbola yang membentuk parabola pada titik fokus hiperbola, parabola tersebut diputar pada sumbu x sehingga terbentuklah hiperboloida dua daun *(Hyperboloid two-sheet)* (Susilo dan Hariyani, 2019; Cahyono, 2019).

12.3.4 Persamaan Hiperboloida Dua Daun

$$\boxed{\tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} = 1}$$

Yang mana persamaan diatas mewakili permukaan yang disebut dengan hiperboloida dua daun. Dengan mengatur setiap variabel dengan sama dengan nol, maka kita dapat persamaan:

$$\begin{aligned} \tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{z^2}{c^2} &= 1 \\ -\tfrac{y^2}{b^2} - \tfrac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned}$$

Dua persamaan pertama menunjukkan jejak pada bidang xy dan xz adalah hiperbola, sedangkan yang ketiga memberitahukan kalau tidak ada jejak pada bidang yz. Bagian-bagian yang terbentuk dari bidang $x = 0$ diberikan oleh persamaan :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - 1$$

Persamaan diatas merupakan sebuah titik atau sebuah elips dengan nilai x_0 sama dengan atau lebih dari a. Bagian-bagian yang sejajar pada bidang xz dan xy adalah hiperbola.

Jika $b = c$ maka hiperboloida dua daun tersebut adalah sebuah permukaan putaran (Sutama et al., 2020). Persamaan hiperboloida dua daun juga diwakili oleh persamaan berikut:

$$-\tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} = 1$$
$$dan$$
$$-\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} - \tfrac{z^2}{c^2} = 1$$

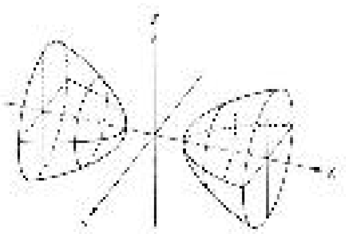
12.3.5 Karakteristik Umum Hiperboloida Satu Daun

Karakteristik hiperboloida dua daun (hyperboloid two-sheet) (Bahrata dan Widyastuti, 2018) adalah:

- $\tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} - \tfrac{z^2}{c^2} = 1$
- Terbentuk dari bagian luar hiperbola yang membentuk parabola dari titik fokus hiperbola.
- Jejak berbentuk hiperbola pada bidang xz.
- Jejak berbentuk hiperbola pada bidang xy.
- Tidak meninggalkan jejak pada bidang yz.
- Sumbu hiperboloida sesuai dengan variabel yang koefisiennya positif.
- Tidak ada jejak pada bidang koordinat yang tegak lurus terhadap sumbu.
- Berbentuk 2 buah corong.
- Memiliki 2 variabel negatif pada persamaanya.

Contoh Soal

Diketahui sebuah persamaan $16z^2 - 4y^2 - 9x^2 = 144$. Tentukan:
A. Persamaan hiperboloida dua daunnya
B. Persamaan bidang yang membentuknya



Gambar 12.3: Hiperboloida Satu Daun.

C. Cara menggambar hiperboloida dua daunnya

PENYELESAIAN:

A. Persamaan hiperboloida dua daunnya

$$\begin{aligned} 16z^2 - 4y^2 - 9x^2 &= 144 \\ \frac{-9}{144x^2} - \frac{4}{144y^2} + \frac{16}{144z^2} &= \frac{144}{144} \\ \frac{-1}{16}x^2 - \frac{1}{36y^2} + \frac{1}{9z^2} &= 1 \\ \frac{-x^2}{16} - \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

B. Persamaan bidang yang membentuknya

$$-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Misalkan $z = 0$

$$-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$$

Misalkan $y = 0$

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Misalkan $x = 0$

$$-\frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$$

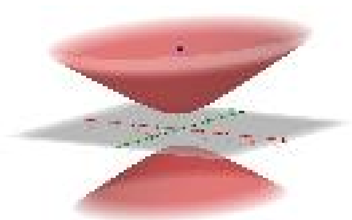
C. Cara menggambar hiperboloida dua daunnya
Misalkan y=z=0, maka

$$\begin{aligned}
\tfrac{z^2}{9} - \tfrac{y^2}{36} - \tfrac{x^2}{16} = 1 \rightarrow \tfrac{0}{9} - \tfrac{0}{36} - \tfrac{x^2}{16} &= 1\\
-\tfrac{x^2}{16} &= 1\\
-x^2 &= 16\\
-x &= \sqrt{16}\\
x &= 4
\end{aligned}$$

(Titik Potong)
Misalkan x=z=0, maka

$$\begin{aligned}
\tfrac{z^2}{9} - \tfrac{y^2}{36} - \tfrac{x^2}{16} = 1 \rightarrow \tfrac{0}{9} - \tfrac{y^2}{36} - \tfrac{0}{16} &= 1\\
-\tfrac{y^2}{36} &= 1\\
-y^2 &= 36\\
-y &= \sqrt{36}\\
y &= -6
\end{aligned}$$

(Titik Potong)



Gambar 12.4: Hiperboloida Dua Daun.

12.4 Latihan Soal

Selesaikan soal-soal dibawah ini

Diketahui suatu persamaan $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 9 = 0$. Tentukan :

- Bentuk dan persamaan hiperboloida

- Persamaan bidang yang membentuk

  Jika suatu hiperboloida dengan persamaan $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{7} = 1$, dimana $z = 0$ diputar mengelilingi sumbu x, tentukan persamaan luasan putaran yang terjadi!

  Jika suatu hiperbola dengan persamaan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{7} = 1$, dimana $z = 0$ diputar mengelilingi sumbu x, sehingga persamaan luasan putaran yang terjadi adalah $\frac{x^2+z^2}{7} - \frac{y^2}{7} = 1$, tentukan nilai dari a!

  Gambarkan persamaan berikut!

  $$4x^2 - y^2 - 16z^2 = 16$$

  Jika suatu hiperbola dengan persamaan

  $$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{12} - \frac{z^2}{7} = 1 \end{cases}$$

  diputar mengelilingi sumbu-x. tentukan persamaan luasan putaran yang terjadi!!

  Tentukan persamaan permukaan putar dari kurva dan sumbu putarnya sebagai berikut!

  $$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

  sumbu putarnya sumbu-y

  Diberikan hiperboloida berdaun satu :

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

  Tentukan persamaan bidang singgung disebuah titik sembarang dari garis lukis $y = b, z = \frac{c}{a}x$ dan turunkan persamaan tempat kedudukan normal-nromal hiperboloida titik dari garis lukis tersebut!

  Diberikan persamaan hiperbola pada bidang XOZ

  $$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{25} = 1 \end{cases}$$

Tentukan persamaan luasan yang terjadi jika hiperbola tersebut diputar mengelilingi sumbu-z !

Diketahui suatu persamaan hiperboloida $x^2 - 2y^2 - 5z^2 = -5$. Tentukan :

- Persamaan hiperboloida dua daunnya
- Persamaan bidang yang membentuknya

Diketahui suatu persamaan hiperboloida $9z^2 - 4y^2 - 16x^2 = 144$. Tentukan :

- Persamaan hiperboloida dua daunnya
- Persamaan bidang yang membentuknya
- Cara menggambar hiperboloida dua daunnya

Jika suatu hiperboloida dengan persamaan

$$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}$$

diputar mengelilingi sumbu-y, tentukan persamaan luasan putaran yang terjadi!

Tentukan persamaan bidang singgung untuk hiperboloida

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$$

pada titik (1,-1,4).

Suatu hiperboloida putaran berdaun satu dengan persamaan $\frac{x^2+y^2}{25} - z^2 = 1$ dipotong oleh persamaan $y = 3$, maka persamaan perpotongannya adalah

Tentukan persamaan permukaan datar dari kurva $x + 2y = 4, z = 0$ diputar terhadap sumbu-y

Jika suatu hiperbola dengan persamaan

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1 \end{cases}$$

diputar mengelilingi sumbu-x. Tentukan persamaan luasan putaran yang terjadi!

12.5 Daftar Pustaka

1. Pasandaran, R.F. dan Ma'rufi. 2018. Geometri Analitik Bidang dan Ruang. Sulawesi Selatan. Global Research and Consulting Institute (Global- RCI).
2, Panggabean, E. M. 2020. Geometri Analitik Ruang. Penerbit Pustaka Pemuda
3. Yunita, A. dan Hamdunah. 2017. Geometri Analitik. Padang: Rumahkayu Pustaka Utama.
4. Fonna, M., dan Mursalin. 2018. *Pengantar Geometri Analitik*. Aceh Utara : UNIMAL Press.
5. Handayani, S., Mashadi., dan S. Gemawati. 2015. Persamaan Garis Singgung pada Hiperbola. *Jurnal Karismatika*. 1(2) : 33-37.
6. Lumbantoruan, J. H. 2021. *Geometri Analitik*. Perbalingga : CV Eureka Media Aksara.
7. Pasandaran, R. F., dan Ma'rufi. 2018. *Geometri Analitik Bidang dan Ruang*. Makassar : Global Research and Consulting Institute.
8. Susilo, D. A., dan S. Hariyani. 2019. *Geometri Analitik (Datar dan Ruang)*. Malang : Kanjuruhan Press.
9. Cahyono, H. 2019. *Geometri Analitik Bidang*. Malang : UMM Press.
10. Bahrata, H., dan Widyastuti. 2018. *Geometri Analitik Ruang*. Jakarta: Graha Ilmu.
11. Sutama. S, Narimo,. dan M. Novitasari. 2020. *GEOMETRI ANALITIKA RUANG: Ringkasan Materi dan Pelatihan Pemecahan Masalah*. Surakarta: Muhammadiyah University Press.

BAB 13

Paraboloida

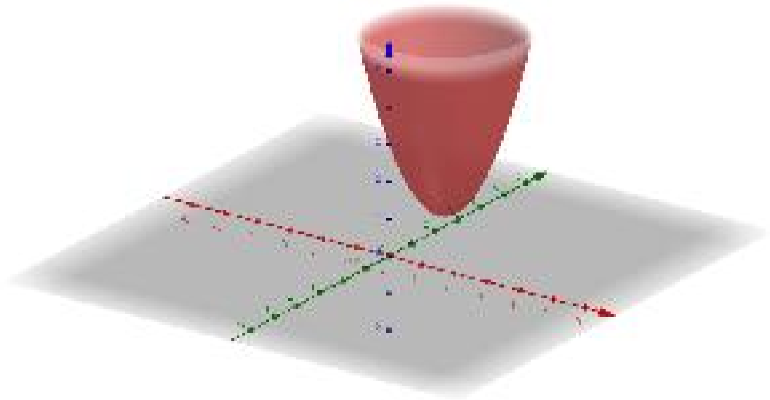
Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK)
CPMK-02: Mahasiswa mampu mengaplikasikan konsep Geometri mengenai persamaan garis, bidang, objek kuadratik bidang, objek kuadratik ruang, dan permukaan putar secara mandiri, bermutu, dan terstruktur untuk menyelesaikan permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari.

13.1 Pendahuluan

Paraboloida merupakan suatu permukaan yang mempuyai irisan dengan bidang yang sejajar koordinat tertentu berupa parabola. Menurut Rahmat dkk. (2016), Paraboloida adalah suatu permukaan pada ruang dimensi-3 yang merupakan analogi dari parabola. Apabila irisan dengan koordinat lain berupa bentuk elips, maka disebut paraboloida eliptik. Apabila irisan dengan bidang koordinat lain berupa bentuk hiperbola, maka disebut sebagai paraboloida hiperbolik. Persamaan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, (a, b \neq 0)$ merupakan persamaan paraboloida dimana titik puncaknya berada di titik asal $(0, 0, 0)$.

13.2 Paraboloida Eliptik

Paraboloida eliptik merupakan suatu permukaan yang diletakkan sedemikian rupa sehingga irisannya sejajar dengan bidang koordinat berbentuk elips dan irisannya yang sejajar bidang koordinat lainnya berbentuk parabola (Adanan, 2021).



Gambar 13.1: Paraboloida Eliptik

13.2.1 Persamaan Paraboloida Elliptik yang bergerak di bidang YOZ

Misalkan persamaan elips yang digerakkan tertetak pada bidang XOY yakni sebagai berikut,

$$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \end{cases}$$

Garis arah elips yang bergerak merupakan persamaan parabola di bidang YOZ yakni,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2qz \end{cases}$$

Kemudian kita misalkan ketika elips digerakkan sehingga berada pada bidang $z = \lambda$ dengan setengah sumbu-sumbunya adalah x_0 dan y_0 yang merupakan sejajar dengan sumbu x dan y. Aturan menggerakkan elip di bidang XOY yaitu :

1. Sumbu y harus sejajar dengan bidangnya
2. Sumbu z merupakan titik tetap pusatnya
3. Dua puncaknya harus terletak pada bidang YOZ
4. Elips yang digerakkan harus sebangun dengan elips yang ditetapkan

Dalam aturan menggerakkan elip di bidang XOY tersebut dapat kita peroleh,

1. Dari aturan (1), (2), (3) titik $(0, y_0, \lambda)$ memenuhi persamaan $y_0^2 = 2q\lambda$.
2. Dari aturan (1), (2), (4) yang harus dipenuhi yakni,

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{a}{b}$$

atau

$$\frac{x_0^2}{y_0^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

3. Diperoleh nilai x_0^2 adalah

$$x_0^2 = \frac{a^2}{b^2} y_0^2$$

4. Substitusikan nilai y_0^2 pada persamaan x_0^2

$$x_0^2 = \frac{a^2}{b^2} 2q\lambda$$

5. Sehingga persamaan elips yang terletak pada bidang $z = \lambda$ yaitu

$$\begin{cases} z = \lambda \\ \frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1 \end{cases}$$

atau

$$\begin{cases} z = \lambda \\ \frac{x^2}{\frac{a^2}{b^2}2q\lambda} + \frac{y^2}{2q\lambda} = 1 \end{cases}$$

6. Kemudian kita eliminasi nilai λ dengan langkah-langkah sebagai berikut,
$\frac{x^2}{\frac{a^2}{b^2}2q\lambda} + \frac{y^2}{2q\lambda} = 1$......................(1)
Persamaan (1) dikali $2q\lambda$
$\frac{x^2}{\frac{a^2}{b^2}} + \frac{y^2}{1} = 2q\lambda$......................(2)
Persamaan (2) dikali $\frac{1}{b^2}$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2q}{b^2}\lambda$......................(3)
Dari persamaan (3) karena nilai $\lambda = z$ sehingga diperoleh persamaan parabola eliptik yakni,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2q}{b^2}z$$

13.2.2 Persamaan Paraboloida Elliptik yang bergerak di bidang XOZ

Garis arah elips yang bergerak merupakan persamaan parabola di bidang XOZ yakni,

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 2qz \end{cases}$$

Kemudian kita misalkan ketika elips digerakkan sehingga berada pada bidang $z = \lambda$ dengan setengah sumbu-sumbunya adalah x_0 dan y_0 yang merupakan sejajar dengan sumbu x dan y. Aturan menggerakkan elip di bidang XOY yaitu :

1. Sumbu y harus sejajar dengan bidangnya

2. Sumbu z merupakan titik tetap pusatnya
3. Dua puncaknya harus terletak pada bidang XOZ
4. Elips yang digerakkan harus sebangun dengan elips yang ditetapkan

Dalam aturan menggerakkan elip di bidang XOY tersebut dapat kita peroleh,

1. Dari aturan (1), (2), (3) titik $(x_0, 0, \lambda)$ memenuhi persamaan $x_0^2 = 2q\lambda$
2. Dari aturan (1), (2), (4) yang harus dipenuhi yakni,

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{a}{b}$$

atau

$$\frac{x_0^2}{y_0^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

3. Diperoleh nilai y_0^2 adalah

$$y_0^2 = \frac{a^2}{b^2} x_0^2$$

4. Substitusikan nilai x_0^2 pada persamaan y_0^2

$$y_0^2 = \frac{a^2}{b^2} 2q\lambda$$

5. Sehingga persamaan elips yang terletak pada bidang $z = \lambda$ yaitu

$$\begin{cases} z = \lambda \\ \frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1 \end{cases}$$

atau

$$\begin{cases} z = \lambda \\ \frac{x^2}{2q\lambda} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{b^2} 2q\lambda} = 1 \end{cases}$$

6. Kemudian kita eliminasi nilai λ dengan langkah-langkah sebagai berikut, $\frac{x^2}{2q\lambda} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{b^2} 2q\lambda} = 1$.................................(1)

Persamaan (1) dikali $2q\lambda$
$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{b^2}} = 2q\lambda$...................................(2)
Persamaan (2) dikali $\frac{1}{b^2}$
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{2q}{a^2}\lambda$....................................(3)
Dari persamaan (3) karena nilai $\lambda = z$ sehingga diperoleh persamaan parabola eliptik yakni,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{2q}{b^2}z$$

13.2.3 Persamaan Bidang Singgung dan Bidang Kutub pada Paraboloida Eliptik

Persamaan bidang singgung di sebuah titik (x_1, y_1, z_1) pada paraboloida eliptik dapat kita peroleh dengan cara membagi rata persamaannya sebagai berikut ini,

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{q^2}{b^2}(z + z_1)$$

Jika titik(x_1, y_1, z_1) tidak terletak pada parabolida tersebut maka persamaan tersebut dinyatakan sebagai persamaan bidang kutub dari titik tersebut pada paraboloida elliptik itu sendiri (Rahmat dkk., 2016).

13.2.4 Contoh Soal dan Penyelesaian

Diberikan elips dengan persamaan z $= 0, \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1$ dan parabola dengan persamaan $x = 0, y^2 - 16z$. tentukan luas yang terjadi bila elips tersebut digerakkan dengan aturan:

1. Bidangnya selalu sejajar dengan bidang XOY
2. Titik pusatnya tetap pada sumbu z
3. Dua dari puncaknya selalu terletak pada parabola yang terletak pada bidang YOZ
4. Elips tetap sebangun dengan elips yang digerakkan

Penyelesaian :

Misalkan elips pada bidang XOY yang diberikan yaitu:

$$z = 0$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Digerakkan sehingga terletak pada bidang $z = \lambda$ dan setengah sumbu-sumbunya adalah x_0 dan y_0 berturut-turut sumbu sejajar sumbu x dan sumbu y. karena memenuhi aturan 1,2 dan 3, maka titik $(0, y_0, \lambda)$ terletak pada elips sehingga memenuhi

$$x = 0$$

$$y_0^2 = 16$$

karena memenuhi aturan 1,2 dan 4 maka dipenuhi

$$\frac{x_0}{y_0} - \frac{a}{b}$$

(Ningsih & Samosir, 2020).

Dimana a = 5 dan b = 4

$$\frac{x_0}{y_o} = \frac{5}{4} atau \frac{x_0^2}{y_0^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

maka,

$$\frac{x_0^2}{y_0^2} = \frac{25}{16}$$

$$x_0^2 = \frac{25}{16} = y_0^2$$

$$x_0^2 = \frac{25}{16} \times 16 = 25$$

Jadi persamaan elips yang terletak pada bidang $z = \lambda$ tersebut adalah

$$z = \lambda$$

$$= \frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1$$

$$= \frac{x^2}{\frac{25}{16} + 16\lambda} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1$$

$$= \frac{x^2}{\frac{25}{16} + 16\lambda} + \frac{y^2}{16\lambda} = 1$$

$$= \frac{(x^2 \times 16\lambda) - (25 \times y^2)}{25 \times 16\lambda} = 1$$

$$= [(x^2 \times 16) + (25 \times y^2) = 25 \times 16\lambda] \times \frac{1}{25 \times 16}$$

$$\lambda = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16}$$

$$z = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16}$$

Sehingga persamaan paraboloida eliptic dengan sumbu z sebagai sumbunya adalah

$$z = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16}$$

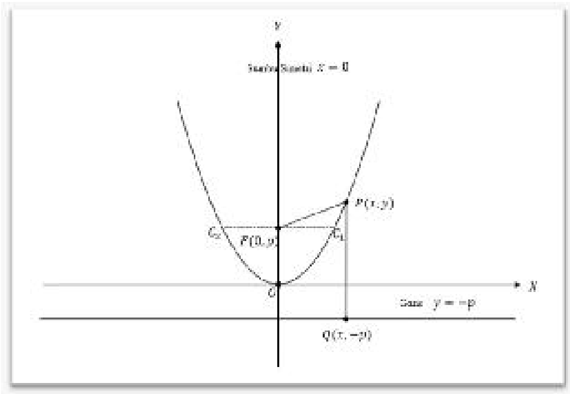
13.3 Paraboloida Hiperbolik

Paraboloida hiperbolik adalah suatu permukaan yang dapat diletakkan sedemikian rupa sehingga irisannya dengan bidang yang sejajar dengan salah satu bidang koordinat berbentuk hiperbola dan irisan dengan bidang koordinat berbentuk parabola (Sutama dkk., 2020).

13.3.1 Persamaan Paraboloida Hiperbolik

Keterangan:

1. Irisan bidang yang sejajar bidang koordinat XOY berbentuk hiperbola
2. Irisan dengan bidang koordinat XOZ dan YOZ berbentuk parabola.



Gambar 13.2: Paraboloida Hiperbolik.

Misalkan hiperbola yang digerakkan terletak pada bidang XOY dengan persamaan

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

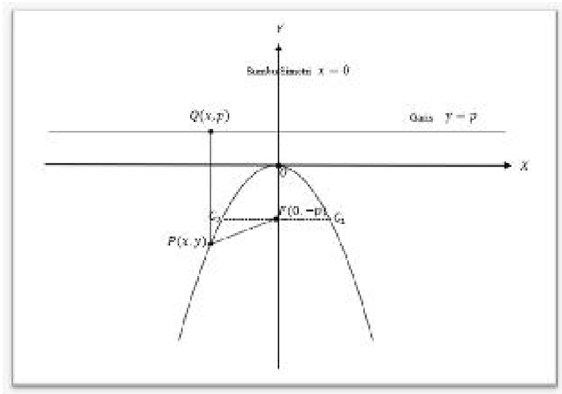
Dan garis arahnya berupa parabola pada bidang YOZ dengan persamaan

$$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$$

Selanjutnya, aturan dalam menggerakkan hiperbola adalah sebagai berikut:

a. Bidangnya sejajar dengan bidang XOY
b. Titik pusatnya selalu terletak pada sumbu x
c. Hiperbolanya selalu sebangun dengan hiperbola semula.
d. Titik-titik puncaknya selalu terletak pada garis arah.

Misalkan hiperbola digerakkan sehingga terletak pada bidang z=λ dan setengah sumbu-sumbunya sejajar dengan sumbu y dan z berturut-turut adalah y_0 dan z_0



Gambar 13.3: Paraboloida Hiperbolik di Bidang YOZ.

Berdasarkan aturan pada sebelumnya, titik puncaknya adalah $(0, y_0, \lambda)$ terletak pada garis arah. Sehingga $y^2 = 2\lambda p$. Karena aturan a,b dan d maka dipenuhi:

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{a}{b}$$

atau

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} \times y^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} \times 2\lambda p$$

Jadi persamaan hiperbola yang terletak pada bidang z=λ tersebut adalah:

$$z = \lambda$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$-\frac{x^2}{\frac{a^2}{b^2}xy^2}+\frac{y^2}{2p\lambda}=1$$

$$-\frac{x^2}{\frac{a^2}{b^2}\times 2p\lambda}+\frac{y^2}{2p\lambda}=1$$

$$-\frac{x^2b^2}{a^22p\lambda}+\frac{y^2}{2p\lambda}=1$$

$$\frac{-x^2b^2+a^2y^2}{a^22p\lambda}=1$$

$$-x^2b^2+a^2y^2=a^22p\lambda$$

$$[-x^2b^2+a^2y^2=a^22p\lambda]\times\frac{1}{a^2b^2}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2p\lambda}{b^2}$$

$$-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{2p\lambda}{b^2}$$

Karena $z=\lambda$ maka diperoleh persamaan paraboloida hiperbolik yang digerakkan terletak pada bidang XOY dan garis arahnya berupa parabola pada bidang YOZ dengan Z sebagai sumbunya yaitu

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{2p}{b^2}z$$

13.3.2 Persamaan Garis Singgung dan Bidang Kutub pada Parabola Hiperbolik

Persamaan garis singgung di T (x_1, y_1, z_1) pada hiperbola parabola adalah

$$-\frac{-x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{p}{b^2}(z + z_1)$$

Persamaan bidang kutub dari T (x_1, y_1, z_1) terhadap paraboloid hiperbolis adalah

$$-\frac{-x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{p}{b^2}(z + z_1)$$

Jika titik T terletak pada paraboloida elliptis maka bidang kutub dari T menjadi bidang singgung. Seperti pada hiperboloid lempeng tunggal, paraboloida hiperboloid memiliki 2 susunan garis yang diperoleh dari $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{2p}{b^2}z$ atau $(-\frac{x}{a}+\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}) = \frac{2p}{b^2}z$ (Zill & Warren, 2011). Persamaan susunan garisnya adalah sebagai berikut

$$I \begin{cases} \alpha(2x - z) = \beta y \\ \beta(2x + z) = \alpha \end{cases}$$

$$II \begin{cases} \gamma(2x - z) = \mu \\ \mu(2x + z) = \gamma y \end{cases}$$

13.3.3 Contoh Soal dan Penyelesaian

Tunjukkan bahwa titik A (1,3,-1) terletak pada paraboloida hiperbolik $4x^2 - z^2 = y$ tentukan pula persamaan garis-garis pelukis yang melalui titik A

Penyelesaian :

Karena koordinat-koordinat A memenuhi persamaan $4x^2 - z^2 = y$, maka titik A terletak pada paraboloida $4x^2 - z^2 = y$

Persamaan $4x^2 - z^2 = y$, dapat dinyatakan dalam bentuk $(2x - z)(2x + z) = y$, maka persamaan susunan garisnya adalah sebagai berikut,

$$I \begin{cases} \alpha(2x - z) = \beta y \\ \beta(2x + z) = \alpha \end{cases}$$

$$II \begin{cases} \gamma(2x - z) = \mu \\ \mu(2x + z) = \gamma y \end{cases}$$

Karena garis-garis pelukis melalui titik A maka yang harus dipenuhi adalah sebagai berikut:

$$I \begin{cases} \alpha(2x - 1) = 3y \\ \beta(2x + 1) = \alpha \end{cases}$$

$$II \begin{cases} \gamma(2x + 1) = \mu \\ \mu(2x - 1) = 3y \end{cases}$$

Berarti $\alpha = \beta$ dan $\mu = 3\lambda$ Jadi persamaan garis-garis pelukis yang melalui titik A adalah

$$I \begin{cases} \alpha(2x - z) = \alpha y \\ \alpha(2x + z) = \alpha \end{cases}$$

$$II \begin{cases} \gamma(x - z) = 3\mu \\ 3\lambda(2x + z) = \lambda y \end{cases}$$

Atau,

$$I \begin{cases} \text{2x-z} = \text{y} \\ \alpha(2x + z) = 1 \end{cases}$$

$$II \begin{cases} \text{2x-z} = 3 \\ \text{6x+3z} = \text{y} \end{cases}$$

13.4 Latihan Soal

1. Tunjukkan bahwa bidang y-6=0 memotong paraboloida hiperbolik $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=6z$ dalam bentuk parabola dan tentukan puncak parameter parabolanya
2. Tentukan persamaan garis pelukis paraboloida hiperbolik $x^2-y^2=2z$ yang menyinggung bola $x^2+y^2+z^2=1$
3. Diketahui persamaan paraboloida hiperbolik $3x^2-3y^2=4z$ yang menyinggung bola $x^2+y^2+z^2=3$. maka tentukanlah persamaan garis pelukisnya
4. Paraboloida hiperbolik diberikan persamaan hiperbola dengan persamaan $z=0, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ dan parabola dengan persamaan $x=0, y^2=5z$. tentukan persamaan paraboloida hiperbolik tersebut
5. Tentukan puncak parameter parabolanya dan Tunjukkan bahwa bidang y-12=0 memotong paraboloida hiperbolik $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{8}=12z$ dalam bentuk parabola dan
6. Diketahui sebuah persamaan hiperbolik sebesar $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\frac{3}{5}$, dengan titik singgung pada titik T(2,3,4). Tentukan persamaan garis singgung paraboloida tersebut apabila titik pusatnya digeser menjadi (1,2,3)
7. Diberikan hiperbola dengan persamaan $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1, z=0$, dan paraboloida dengan persamaan $y^2=8z$, $x=0$. Tentukan luasan yang terjadi bila hiperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, $z=0$.
8. Diberikan elips dengan persamaan $z=0$, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, dan parabola dengan persamaan $x=0, y^2=16z$. Tentukan luas yang terjadi bila elips tersebut digerakkan dengan aturan: 1). Bidangnya selalu sejajar dengan bidang XOY 2). Titik pusatnya tetap pada sumbu z 3). Dua dari puncak selalu terletak pada parabola yang terletak pada bidang YOZ 4). Elips tetap sebangun dengan elips yang digerakkan
9. Diberikan elips dengan persamaan $z=0, \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ dan parabola dengan persamaan $x=0, y^2=4z$. Tentukan persamaan paraboloida eliptik tersebut.

10. Pada paraboloida hiperbolik $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ kita ambil sebuah garis lurus dari salah satu dari sistem-sistemnya dan garis dari sistem yang lain yang berdiri tegak lurus pada sistem yang pertama. tentukan tempat kedudukan garis lurus ini.
11. Tentukanlah persamaan-persamaan sebuah garis lurus dari paraboloida $x^2 - 4y^2 = 2az$. tentukan persamaan-persamaan garis tegak lurus dari awal sumbu O yang dibuat pada garis lukis ini. tentukanlah persamaan bidang kerucut, yang dilalui oleh garis tegak lurus , jika garisnya melalui paraboloida itu.
12. Diberikan hiperbola dengan persamaan z=0, $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{12} = 1$ dan pada persamaan x=0,$y^2 = 2z$. tentukan persamaan paraboloida hiperbolik tersebut
13. Tentukan persamaan garis pelukis paraboloida hiperbolik $x^2 - y^2 = 4z$ yang menyinggung bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
14. Tentukanlah tempat kedudukan titik-titik dari paraboloida hiperbolik : $x^2 - y^2 = az$, melalui mana ada dua garis lurus dari bidang itu, yang mana satu sama lain berpotongan dengan sudut 60^0
15. Suatu hiperbola dengan persamaan z=0, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{24} = 1$ serta pada persamaan x=0,$y^2 = 10z$. Maka tentukanlah persamaan paraboloida hiperbolik tersebut

13.5 Daftar Pustaka

1. Adanan, S. 2021. *Geometri Analitik Bidang Datar.* Medan: Umsupress.
2. Cahyono, H. 2019. *Geometri Analitik Bidang.* Malang: Universitas Muhammadiyah Malang.
3. Frank. A. J. R., dan E. Mendelson. 2004. *Kalkulus Edisi Keempat.* Jakarta: Erlangga
4. Ningsih, Y. G., dan K. Samosir. 2020. *Matematika Diskrit.* Surabaya: CV. Jakad Media Publishing.

5. Purcell, E.J., D. Varberg., dan S.E. Rigdon, 2003. *Kalkulus JILID 1*. Jakarta : Erlangga.
6. Purnomo, D. 2016. *Trigonometri (Ilmu Ukur Sudut)*. Malang: Gunung Samudera.
7. Rahmat, M. S., Suhito, H. Sutarto, 2016. Hyper-Paraboloida Dalam Ruang Euclid Berdimensi-N. *UNNES Journal of Mathematics*. 5(2):161-169.
8. Supuwiningsih N. N., dan M. Rusli. 2020. *Sistem Informasi Geografis : Konsep Dasar dan Implementasi*. Yogyakarta: ANDI.
9. Sutama, P et al. 2020. *Geometri Analitika Ruang: Ringkasan Materi dan Pemecahan Masalah*. Surakarta: Muhammadiyah University Press.
10. Zill, D. G., dan W. Warren. 2011. *C*alculus Transcendentals. Jones and Bartlett Publisher.