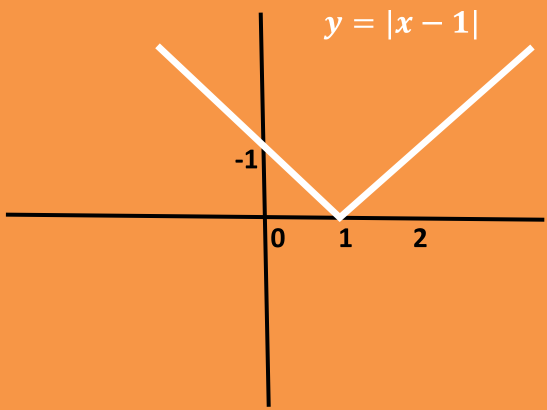
KALKULUS

FUNGSI SATU PEUBAH



Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si, M.Si

Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya sehingga penulisan buku ajar **Kalkulus Fungsi Satu Peubah** ini dapat diselesaikan dengan baik. Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada dosen-dosen tim pengajar matakuliah Kalkulus di Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah memberikan kontribusi dalam penulisan buku ajar ini.

Kalkulus merupakan matakuliah wajib semester pertama tidak hanya di program studi Matematika tetapi juga bagi semua mahasiswa pada program studi di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember sejak diberlakukan Kurikulum 2017, terdiri dari 4 sks (3 sks kuliah dan 1 sks praktikum).

Buku Ajar Kalkulus Fungsi Satu Peubah ini ditulis untuk digunakan pada perkuliahan Kalkulus di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, meskipun tidak menutup kemungkinan untuk dipakai pada perkuliahan yang lain bahkan di luar fakultas. Penyusunan Buku Ajar ini bertujuan untuk mengefektifkan proses pembelajaran. Pada proses pembelajaran di kelas, biasanya dosen menjelaskan perkuliahan sambil mencatat di papan tulis. Mahasiswa umumnya menyalin catatan tersebut sambil menyimak penjelasan dosen. Proses pembelajaran lebih banyak mendengarkan ceramah dari dosen.

Fungsi dari Buku Ajar ini, untuk dosen dipakai menjelaskan materi kuliah, sedangkan untuk mahasiswa sebagai pengganti catatan kuliah. Oleh karena itu waktu pembelajaran di kelas dapat digunakan secara lebih efektif untuk caramah dan diskusi. Pada Buku Ajar ini, diberikan banyak contoh soal yang telah diberikan penyelesaiannya. Diharapkan soal-soal yang ada di tiap akhir bab dapat diselesaikan oleh mahasiswa, begitu juga bahan diskusi yang ada di tiap bab.

Penyusunan Buku Ajar ini didasarkan pada beberapa buku teks yang digunakan seperti tertulis dalam Bibliografi (Daftar Pustaka). Semoga Buku Ajar ini dapat berguna untuk meningkatkan kualitas pembelajaran Kalkulus, terlebih khusus di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Jember, Desember 2018

Penulis

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Tabel

Daftar Lambang dan Simbol

(a, b)	:	himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $a < x < b$
$[a, b]$	:	himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $a \leq x \leq b$
$[a, b)$	:	himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $a \leq x < b$
$(a, b]$	:	himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $a < x \leq b$
(a, ∞)	:	himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $x > a$
$(-\infty, a)$	:	himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $x < a$
$[a, \infty)$	:	himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $x \geq a$
$(-\infty, a]$	:	himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $x \leq a$
$\|x\|$	:	nilai mutlak x
D_f	:	domain atau daerah asal fungsi f
$D_x f(x)$	:	turunan fungsi f terhadap x
$\frac{d}{dx} f$	:	turunan fungsi f terhadap x
f^{-1}	:	invers fungsi f
$f'(x)$	:	turunan fungsi f terhadap x
$f'_-(c)$	:	turunan kiri fungsi f di titik c
$f'_+(c)$	:	turunan kanan fungsi f di titik c
$f^{(n)}(x)$	:	turunan ke-n fungsi f terhadap x
$\lim_{x \to c^+} f(x)$	:	$\lim_{x \to c} f(x)$ dengan $x > c$
$\lim_{x \to c^-} f(x)$	:	$\lim_{x \to c} f(x)$ dengan $x < c$
$\ln x$	:	$\log_e x$ (logaritma dengan basis e)
R_f	:	range atau daerah hasil fungsi f
$f \circ g$	:	f komposisi g
$[[x]]$	:	bilangan bulat terbesar yang kurang atau sama dengan x
$\mathbb{N}$	:	himpunan semua bilangan asli
$\mathbb{Q}$	:	himpunan semua bilangan rasional
$\mathbb{R}$	:	himpunan semua bilangan real
$\mathbb{Z}$	:	himpunan semua bilangan bulat

$\int f(x)\ dx$	:	anti turunan atau integral tak tentu f
$\int_a^b f(x)\ dx$	:	integral tentu f pada selang $[a, b]$
$x \approx a$	:	a adalah nilai hampiran x

Bab 1

Sistem Bilangan Real

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami sistem bilangan real;
2. mampu berpikir kritis dan logis;
3. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menjelaskan hubungan antara bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional dan bilangan real;
2. menjelaskan pengertian bilangan rasional, dapat membedakan bilangan rasional dan bilangan irasional, dan dapat menyebutkan beberapa contoh bilangan rasional dan bilangan irasional;
3. mengoperasikan bilangan real;
4. menyelesaikan pertaksamaan, baik yang melibatkan nilai mutlak maupun tidak.

1.1 Bilangan Real

Untuk mempelajari kalkulus, yang paling dasar adalah perlu memahami bahasan tentang sistem bilangan real, karena kalkulus didasarkan pada sistem bilangan real dan sifat-sifatnya. Sistem bilangan yang paling sederhana adalah **bilangan asli**, yaitu $1, 2, 3, \cdots$. Dengan menggunakan bilangan asli, dapat dihitung banyaknya ternak yang dimiliki masyarakat, orang-orang yang berada dalam suatu ruang, dan lain-lainnya. Himpunan semua bilangan asli biasa dinotasikan dengan $\mathbb{N}$. Jadi

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

Jika di dalam himpunan semua bilangan asli digabungkan dengan semua negatifnya dan nol, maka diperoleh **bilangan-bilangan bulat**, yaitu

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$$

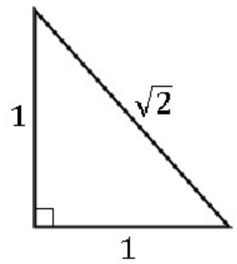
Selanjutnya, himpunan semua bilangan bulat dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$. Jadi

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

Kemudian, untuk mengukur besaran-besaran seperti panjang, berat dan arus listrik maka bilangan bulat tidak memadai. Dalam hal ini bilangan bulat tidak dapat memberikan ketelitian yang cukup. Untuk keperluan ini, maka dapat digunakan bilangan-bilangan rasional, seperti $\frac{2}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{5}{3}$ dan lain-lain. **Bilangan rasional** didefinisikan sebagai bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m bilangan bulat dan n bilangan asli atau m dan n bilangan-bilangan bulat dengan $n \neq 0$. Dengan demikian bilangan-bilangan bulat termasuk bilangan rasional juga. Himpunan semua bilangan rasional dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$. Jadi

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Bilangan rasional yang dapat menjadi ukuran dengan ketelitian yang cukup ternyata masih tidak dapat menjadi ukuran semua besaran, misalnya panjang sisi miring segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisi saling tegak lurus 1 seperti diberikan pada Gambar 1.1.
Panjang sisi miring segitiga siku-siku tersebut adalah $\sqrt{2}$. Bilangan $\sqrt{2}$ ini bukan merupakan bilangan rasional karena tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m bilangan bulat dan n bilangan asli. Bilangan yang bukan merupakan bilangan rasional dinamakan **bilangan**



Gambar 1.1: Segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisi tegak lurus 1

irasional. Bilangan-bilangan irasional yang lain adalah $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}, e, \pi$ dan masih banyak yang lainnya.

Bilangan rasional dapat dinyatakan dengan desimal berulang, sedangkan bilangan irasional tidak dapat dinyatakan dengan desimal berulang. Sebagai contoh, bilangan rasional $2/7$ dan $1/8$, dan bilangan irasional π masing-masing dinyatakan dalam bentuk desimal sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{2}{7} &= 0,285714285714285714285714\cdots \\ \frac{1}{8} &= 0,125000\cdots \\ \pi &= 3,14159265358979323846264338327950288419716 93\cdots \end{aligned}$$

Jadi bilangan $2/7$ dalam bentuk desimal, angka 285714 di belakang koma diulang terus-menerus dan bilangan $1/8$ dalam bentuk desimal angka 0 diulang terus-menerus. Sedangkan bilangan π dalam bentuk desimal tidak diulang atau tidak diulang terus-menerus. Sebaliknya juga begitu, bilangan desimal berulang merupakan bilangan rasional. Untuk menunjukkan hal itu, diberikan contoh berikut.

Contoh 1.1. *Buktikan bahwa bilangan* $1,27272727\cdots$ *merupakan bilangan rasional.*

Penyelesaian:
Misalkan $x = 1,27272727\cdots$, maka $100x = 127,27272727\cdots$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} 100x - x &= 127,27272727\cdots - 1,27272727\cdots \\ 99x &= 126 \\ x &= \frac{126}{99} = \frac{14}{11} \end{aligned}$$

□

Sekumpulan bilangan rasional dan bilangan irasional dinamakan **himpunan bilangan real**. Himpunan semua bilangan real dinotasikan dengan $\mathbb{R}$. Hubungan keempat himpunan $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, dan $\mathbb{R}$ adalah

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Diantara dua bilangan real yang berbeda, terdapat dua bilangan real lain. Khususnya, jika $x < y$ dapat dipilih $z = \frac{x+y}{2}$ yang merupakan rata-rata dari dua bilangan x dan y, sehingga diperoleh hubungan ketiga bilangan x, y, dan z adalah

$$x < z < y$$

Lebih jauh lagi, di antara dua bilangan real sebarang terdapat bilangan rasional dan bilangan irasional. Dengan demikian bilangan rasional maupun bilangan irasional dikatakan **rapat** (*dense*) di dalam bilangan real.

Pada $\mathbb{R}$ telah dikenal operasi penjumlahan dan perkalian. Misalkan x dan y bilangan real, maka penjumlahan x dan y ditulis $x + y$ dan perkalian x dan y ditulis $x \cdot y$ atau terkadang secara singkat ditulis xy. Sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{R}$ adalah sebagai berikut.

1. Hukum **komutatif**: $x + y = y + x$ dan $xy = yx$.
2. Hukum **asosiatif**: $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)z$.
3. Hukum **distributif**: $x(y + z) = xy + xz$.
4. Elemen-elemen **identitas**:
   - Terhadap penjumlahan: 0, sebab $x + 0 = 0 + x = x$.
   - Terhadap perkalian: 1, sebab $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
5. **Invers** (balikan): Setiap bilangan real x mempunyai invers **aditif** $-x$ yang memenuhi $x + -x = 0$ dan setiap bilangan real x yang tidak nol mempunyai invers **multiplikatif**, yaitu $1/x$ yang memenuhi $x \cdot (1/x) = 1$. Pengurangan dan pembagian masing-masing didefinisikan dengan $x - y = x + (-y)$ dan $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.

Bilangan-bilangan real bukan nol dibedakan menjadi dua himpunan terpisah yaitu bilangan-bilangan real positif dan bilangan-bilangan real negatif. Gabungan bilangan nol dan bilangan real positif dinamakan bilangan **nonnegatif**, sedangkan gabungan bilangan nol dan bilangan real negatif dinamakan bilangan **nonpositif**. Jadi, pengertian bilangan nonpositif tidak sama dengan bilangan negatif, begitu juga pengertian bilangan nonnegatif tidak sama dengan bilangan positif. Berdasarkan pembagian bilangan positif dan negatif, diperkenalkan relasi **urutan** " $<$ " (dibaca "kurang dari" atau "lebih kecil dari") yang didefinisikan dengan: $x < y$ jika dan hanya jika $y - x$ positif. Penulisan $y > x$ mempunyai arti yang sama dengan $x < y$. Sifat-sifat urutan sebagai berikut:

1. **Trikotomi**: Jika x dan y bilangan-bilangan real maka pasti berlaku salah satu di antara yang berikut: $x < y$, $x = y$, atau $x > y$.

2. **Transitif**: Jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.

3. Penambahan: $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

4. Perkalian: Jika z positif maka $x < y \Leftrightarrow xz < yz$. Jika z negatif maka $x < y \Leftrightarrow xz > yz$

Relasi urutan " $\leq$ " (dibaca "kurang dari atau sama dengan") didefinisikan dengan: $x \leq y$ jika dan hanya jika $y - x$ positif atau nol. Sifat-sifat urutan ini adalah:

1. Transitif: Jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$.

2. Penambahan: $x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$

3. Perkalian: Jika z positif maka $x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$, jika z negatif maka $x \leq y \Rightarrow xz \geq yz$

1.2 Pertaksamaan

Pertaksamaan atau **pertidaksamaan** atau **ketaksamaan** merupakan kalimat terbuka dengan menggunakan relasi $<, >, \leq$ atau $\geq$. Penyelesaian atau solusi suatu pertaksamaan adalah semua bilangan real yang memenuhi pertaksamaan tersebut yang biasanya merupakan selang atau gabungan selang-selang. Mengenai selang dapat dijelaskan sebagai berikut.

Selang terbuka (a, b) adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar dari a dan kurang dari b. Jadi,

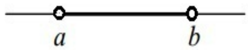
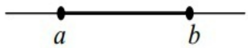
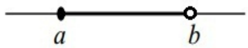
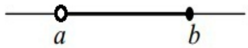
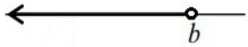
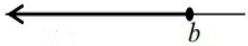
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

Sedangkan selang tertutup $[a, b]$ adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar atau sama dengan a dan kurang atau sama dengan b. Jadi,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$

Selengkapnya, selang-selang di dalam $\mathbb{R}$ diberikan dalam Tabel 1.1.

Tabel 1.1: Penulisan selang dan himpunan

Notasi selang	Penulisan Himpunan	Garis Bilangan
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Contoh-contoh bentuk pertidaksamaan diantaranya:

1. $5x - 1 < 3x - 2$
2. $-2 \leq 3x + 5 < 4$
3. $3x^2 - x - 2 > 0$
4. $\frac{x+1}{x-2} < 0$

Adapun contoh bentuk soal dan penyelesaiannya, diberikan dalam beberapa contoh berikut.

Contoh 1.2. *Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan*

$$2x - 7 < 4x - 2$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 2x - 7 < 4x - 2 &\Leftrightarrow -5 < 2x \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya (HP) adalah: $HP = (-\frac{5}{2}, \infty)$. $\square$

Contoh 1.3. *Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi pertaksamaan*

$$\frac{5}{x} < 2, \qquad x \neq 0.$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \frac{5}{x} < 2 &\Leftrightarrow \frac{5}{x} - 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5 - 2x}{x} < 0 \\ &\Leftrightarrow (5 - 2x) < 0 \text{ dan } x > 0 \text{ atau } (5 - 2x) > 0 \text{ dan } x < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{2} < x \text{ dan } x > 0 \qquad \text{atau} \qquad \frac{5}{2} > x \text{ dan } x < 0 \\ &\Leftrightarrow (\frac{5}{2}, \infty) \cap (0, \infty) \ \cup \ (-\infty, \frac{5}{2}) \cap (-\infty, 0) \\ &\Leftrightarrow (\frac{5}{2}, \infty) \cup (-\infty, 0) \end{aligned}$$

Jadi, $HP = (-\infty, 0) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$ $\square$

Kesalahan-kesalahan yang sering terjadi dalam menyelesaikan pertaksamaan:

1. pertama

$$-\frac{x}{3} < 2x + 1$$

   Kedua ruas dikalikan dengan (-3) diperoleh

$$\begin{aligned} x < -6x - 3 &\Leftrightarrow 7x < -3 \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

$HP = (-\infty, -\frac{3}{7})$.

Yang benar adalah

$$\begin{aligned} x > -6x - 3 &\Leftrightarrow 7x > -3 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

$HP = (-\frac{3}{7}, \infty)$.

2. kedua

$$\begin{aligned} (x-1)(x+2) \leq (x-1) &\Leftrightarrow (x+2) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \leq -1 \end{aligned}$$

$HP = (-\infty, -1]$.

Yang benar adalah

$$\begin{aligned} (x-1)(x+2) \leq (x-1) &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq x - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \leq 0 \end{aligned}$$

$HP = [-1, 1]$.

3. ketiga

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{x+1} > 1 &\Leftrightarrow 2 - x > x + 1 \\ &\Leftrightarrow 1 > 2x \\ &\Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$HP = (-\infty, \frac{1}{2})$.

Yang benar adalah

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{x+1} - 1 > 0 &\Leftrightarrow \frac{2-x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x+1} > 0 \\ &\Leftrightarrow (1-2x)(x+1) > 0, \text{ dan } x \neq -1. \end{aligned}$$

$HP = (-1, \frac{1}{2})$.

1.3 Nilai Mutlak

Nilai mutlak x, ditulis $|x|$, didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Sebagai contoh $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-7| = -(-7) = 7$, $|3 - \pi| = \pi - 3$, dan lain sebagainya. Dengan demikian $|x| \geq 0$ untuk setiap bilangan real x.

Contoh 1.4. *Tentukan semua nilai x yang memenuhi persamaan*

$$|3x + 2| = 5$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} |3x+2| = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad (3x+2) = 5 \qquad \text{atau} \qquad -(3x+2) = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad (3x) = 3 \qquad \text{atau} \qquad -3x = 7 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \qquad \text{atau} \qquad x = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

$HP = \{1, -\frac{7}{3}\}$, yakni himpunan yang beranggotakan bilangan 1 dan $-\frac{7}{3}$ saja. □

Sifat-sifat nilai mutlak

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (ketaksamaan segitiga)
5. $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

Sebagai akibat dari sifat ketaksamaan segitiga, untuk setiap bilangan asli n diperoleh

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_n|$$

Teorema 1.5. *Diberikan bilangan real $a > 0$.*

(i). $|x| \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x \leq a$

(ii). $|x| < a \;\Leftrightarrow\; -a < x < a$

(iii). $|x| \geq a \;\Leftrightarrow\; x \geq a$ *atau* $x \leq -a$

(iv). $|x| > a \;\Leftrightarrow\; x > a$ *atau* $x < -a$

Contoh 1.6. *Tentukan semua nilai x yang memenuhi pertaksamaan*

$$|x-4| < \frac{3}{2}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} |x-4| < \frac{3}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} < x-4 < \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} < x < \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$HP = (\frac{5}{2}, \frac{11}{2})$. □

Contoh 1.7. *Tentukan semua nilai x yang memenuhi pertaksamaan*

$$|3x-5| \geq 1$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} |3x-5| \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x-5 \geq 1 \quad \text{atau} \quad 3x-5 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x \geq 6 \quad \text{atau} \quad 3x \leq 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq 2 \quad \text{atau} \quad x \leq \frac{4}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad [2, \infty) \cup (-\infty, \frac{4}{3}] \end{aligned}$$

Jadi, $HP = (-\infty, \frac{4}{3}] \cup [2, \infty)$. □

Contoh 1.8. *Tentukan semua nilai x yang memenuhi pertaksamaan*

$$\left|\frac{3-2x}{x+2}\right| \leq 4$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3-2x}{x+2}\right| \le 4 &\Leftrightarrow -4 \le \frac{3-2x}{x+2} \le 4 \\
&\Leftrightarrow -4 \le \frac{3-2x}{x+2} \quad \text{dan} \quad \frac{3-2x}{x+2} \le 4 \\
&\Leftrightarrow 0 \le 4 + \frac{3-2x}{x+2} \quad \text{dan} \quad \frac{3-2x}{x+2} - 4 \le 0 \\
&\Leftrightarrow 0 \le \frac{4(x+2)}{x+2} + \frac{3-2x}{x+2} \text{ dan } \frac{3-2x}{x+2} - \frac{4(x+2)}{x+2} \le 0 \\
&\Leftrightarrow 0 \le \frac{2x+11}{x+2} \quad \text{dan} \quad \frac{5-6x}{x+2} \le 0
\end{aligned}$$

Jadi, $HP = (-\infty, -\frac{11}{2}] \cup (-2, \infty)$. □

Teorema 1.9. *Untuk setiap x dan y bilangan real, berlaku:*

(i). $\sqrt{x^2} = |x|$

(ii). $|x|^2 = x^2$

(iii). $|x| \le |y| \Leftrightarrow x^2 \le y^2$

Bukti. Akan dibuktikan butir (iii) saja, bukti butir (i) dan (ii) dapat digunakan sebagai latihan.
($\Rightarrow$) Dengan menggunakan sifat urutan perkalian dan butir (ii), diperoleh

$$\begin{aligned}
|x| \le |y| &\Rightarrow |x||x| \le |x||y| \le |y||y| \\
&\Rightarrow |x|^2 \le |y|^2 \\
&\Rightarrow x^2 \le y^2
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Dengan menggunakan sifat urutan dan butir (ii), diperoleh

$$\begin{aligned}
x^2 \le y^2 &\Rightarrow |x|^2 \le |y|^2 \\
&\Rightarrow |x|^2 - |y|^2 \le 0 \\
&\Rightarrow (|x| - |y|)(|x| + |y|) \le 0 \\
&\Rightarrow |x| - |y| \le 0 \\
&\Rightarrow |x| \le |y|
\end{aligned}$$

□

Contoh soal berikut merupakan penyelesaian alternatif dari Contoh 1.7 dengan menggunakan Teorema 1.9 (iii).

Contoh 1.10. *Tentukan semua nilai x yang memenuhi pertaksamaan*

$$|3x - 5| \geq 1$$

Penyelesaian:
Dengan menggunakan Teorema 1.9 (iii), diperoleh

$$\begin{aligned} |3x-5| \geq 1 &\Leftrightarrow (3x-5)^2 \geq 1^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 - 30x + 25 - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x^2 - 10x + 8) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(3x-4) \geq 0 \end{aligned}$$

$HP = (-\infty, \frac{4}{3}] \cup [2, \infty)$. □

Contoh 1.11. *Tentukan semua nilai x yang memenuhi pertaksamaan*

$$x|x - 1| < x + 1$$

Penyelesaian:
Dalam hal ini akan ditinjau per kasus.
Kasus 1. Untuk $x - 1 \geq 0$ atau $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} x|x-1| < x+1 &\Leftrightarrow x(x-1) < x+1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 < 0 \end{aligned}$$

$HP_1 = [1, 1+\sqrt{2})$

Kasus 2. Untuk $x - 1 < 0$ atau $x < 1$.

$$\begin{aligned} x|x-1| < x+1 &\Leftrightarrow x(1-x) < x+1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

Karena $x^2 + 1$ definit positif, maka setiap $x < 1$ merupakan penyelesaian. Jadi $HP_2 = (-\infty, 1)$.
Oleh karena itu, diperoleh himpunan penyelesaian akhir
$HP = HP_1 \cup \mathrm{HP}_2 = (-\infty, 1+\sqrt{2})$. □

1.4 Rangkuman

1. Himpunan semua bilangan asli adalah

$$\{1, 2, 3, \cdots\}$$

dan himpunan semua bilangan bulat adalah

$$\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

2. Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m bilangan bulat dan n bilangan asli. Bilangan irasional adalah bilangan real yang bukan bilangan rasional.

3. Jika himpunan semua bilangan asli dinyatakan dengan $\mathbb{N}$, himpunan semua bilangan bulat dinyatakan dengan $\mathbb{Z}$, himpunan semua bilangan rasional dinyatakan dengan $\mathbb{Q}$, dan himpunan semua bilangan real dinyatakan dengan $\mathbb{R}$, maka hubungan antara keempat himpunan tersebut adalah

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

4. Diantara dua bilangan real sebarang yang berbeda, terdapat bilangan real yang lain. Diantara dua bilangan real sebarang yang berbeda, terdapat bilangan rasional dan bilangan irasional.

5. Penyelesaian suatu pertaksamaan adalah menentukan atau mencari semua bilangan real yang memenuhi pertaksamaan tersebut yang biasanya merupakan selang atau gabungan selang-selang.

6. Untuk $a > 0$, berlaku

   (i). $|x| \leq a$ jika dan hanya jika $-a \leq x \leq a$

   (ii). $|x| \geq a$ jika dan hanya jika $x \geq a \quad \text{atau} \quad x \leq -a$

1.5 Bahan Diskusi

1. Diberikan x dan y bilangan-bilangan rasional, dan z bilangan irasional. Bagaimana dengan bilangan-bilangan $x+y, x+z, x\cdot y$ dan $x \cdot z$?

2. Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irasional (bukan bilangan rasional).

3. Tunjukkan bahwa diantara dua bilangan real berbeda terdapat bilangan rasional.

4. Salah satu sifat nilai mutlak adalah $|-x| = |x|$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Buktikan !

1.6 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Varberg, D., Purcell, E., and Rigdon, S., 2015, *Calculus*, 9th, Wiley Publishing

2. Stewart, J., 2016, *Calculus: Early Transcendentals*, 8th, Belmont: Thomson Higher Education

3. Apostol, T.M., 2010. *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, New York: John Wiley & Sons

1.7 Latihan Soal-soal

1. Buktikan bahwa bilangan $0,39123123123\cdots$ merupakan bilangan rasional.

2. Berikan contoh dua bilangan irasional x dan y tetapi $x+y$ bilangan rasional.

3. Tentukan himpunan semua penyelesaian dari pertaksamaan- pertaksamaan di bawah ini:

   (a) $x^2 < 2x + 8$

   (b) $4x - 7 < 3x + 5$

   (c) $-6 \leq 2x + 3 < -1$

   (d) $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$

   (e) $\frac{x+5}{2x-1} \geq 1$

   (f) $\frac{x+1}{2-x} < \frac{x}{3+x}$

   (g) $|3x + 4| < 8$

   (h) $|x - 2| < -1$

   (i) $|x/3 - 2| \leq 6$

   (j) $|2 + 5/x| > 1$

   (k) $|x - 2| < 3|x + 7|$

   (l) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99} \leq 0$

   (m) Buktikan bahwa, jika $|x| \leq 1$ maka

$$\left|x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\right| \leq 2.$$

4. Selesaikan persamaan $|2x - 1| - |x + 3| = 2$.

5. Selesaikan pertaksamaan-pertaksamaan berikut:

   (a) $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

   (b) $|x - 1| - |x - 2| \geq 5$.

Bab 2

Fungsi

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami pengertian fungsi dan menggambar grafik fungsi secara sederhana;
2. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
3. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

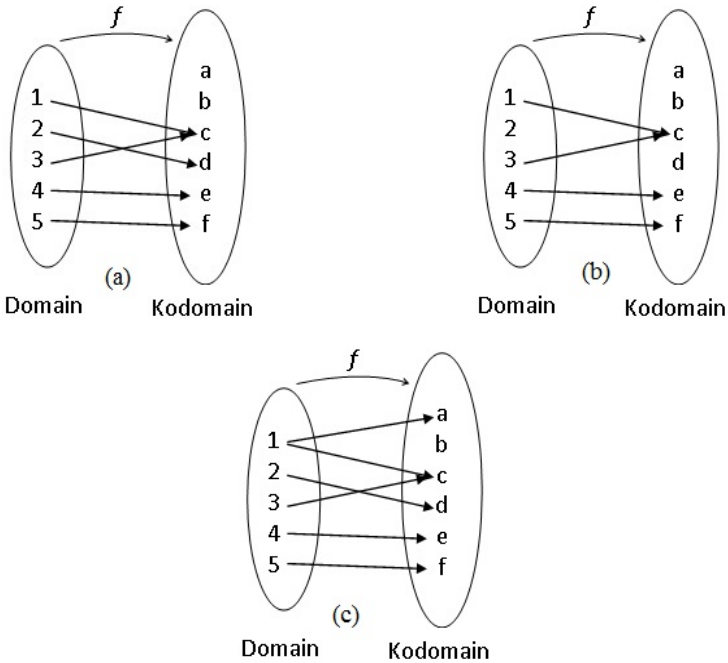
Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menjelaskan pengertian fungsi dan memberikan contoh fungsi dan yang bukan fungsi;
2. menentukan domain dan range suatu fungsi;
3. menentukan fungsi komposisi dari dua fungsi atau lebih serta menentukan domain dan rangenya;
4. mengoperasikan fungsi-fungsi yang melibatkan fungsi mutlak, fungsi signum, dan fungsi bilangan bulat terbesar, serta mampu menggambarkan grafiknya;
5. menentukan invers fungsi.

2.1 Fungsi dan Grafiknya

Definisi 2.1. *Sebuah fungsi f dari himpunan A ke himpunan B, ditulis $f : A \to B$, adalah suatu aturan yang memasangkan setiap x anggota A dengan tepat satu y anggota B.*

Berdasarkan Definisi 2.1 ini, berarti jika terdapat anggota A yang tidak mempunyai pasangan dengan anggota B atau terdapat anggota A yang mempunyai pasangan lebih dari satu anggota B maka itu bukan fungsi. Ilustrasi fungsi dan yang bukan fungsi dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1: Contoh (a) fungsi, (b) dan (c) bukan fungsi

Selanjutnya, A disebut **domain (daerah asal** atau **daerah definisi)** fungsi f dan B disebut **kodomain (daerah kawan)**. Sedangkan himpunan semua anggota B yang mempunyai pasangan disebut **range (jelajah** atau **daerah hasil)**.
Jadi, domain fungsi f, dinotasikan D_f, adalah

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ terdefinisi}\}$$

dan range fungsi f, dinotasikan R_f, adalah

$$R_f = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in D_f\}$$

Pada Gambar 2.1 (a), $R_f = \{c, d, e, f\}$.
Penulisan $f(x)$ yang disebutkan di atas mempunyai arti nilai fungsi f di x. Sebagai contoh, jika $f(x) = x^2 + 3$, maka $f(0) = 0^2 + 3 = 3, f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4, f(1+h) = (1+h)^2 + 3 = 4 + 2h + h^2$, dan lain sebagainya.

Jika suatu fungsi f tidak disebutkan domainnya secara eksplisit, maka yang menjadi domain adalah himpunan semua bilangan real x sehingga f terdefinisi di setiap x tersebut, yakni nilai $f(x)$ nya ada. Sebagai contoh, didefinisikan fungsi f sebagai berikut:

$$f(x) = \sqrt{x-1}.$$

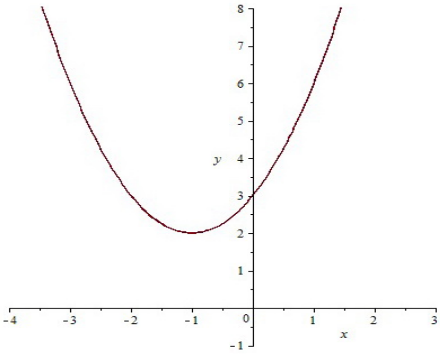
Karena $\sqrt{x-1}$ terdefinisi hanya jika $x - 1 \geq 0$, maka yang menjadi domain dari fungsi f adalah $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ atau $D_f = [1, \infty)$. Sedangkan, karena $\sqrt{x-1} \geq 0$ untuk setiap $x \in D_f$, maka range dari fungsi f adalah $R_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} = [0, \infty)$. Di sini, $2 \in D_f$ dan $f(2) = \sqrt{2-1} = 1$. Berbeda jika diberikan fungsi g yang didefinisikan

$$g(x) = \sqrt{x-1}, \qquad x \in [3, 7],$$

di sini fungsi g tidak terdefinisi di $x = 2$ karena $2 \notin [3, 7]$. Jadi tidak bisa dituliskan $g(2) = 1$, begitu pula tidak bisa dituliskan $g(10) = 3$. Dalam hal ini, range fungsi g adalah $R_g = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{6}\}$.

Persamaan $y = x^2 + 2x + 3$ mendefinisikan suatu fungsi, sebut saja fungsi itu dengan notasi f. Persamaan itu menunjukkan bahwa nilai y yang unik bila diberikan nilai x yang unik. **Grafik** dari f adalah himpunan semua titik $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dengan (x, y) pasangan terurut di f. Karenanya, grafik fungsi f adalah kurva yang merupakan himpunan semua titik di $\mathbb{R}^2$ yang memenuhi pasangan terurut (x, y) di f. Karena setiap x di domain fungsi dikaitkan dengan satu dan hanya satu nilai y, maka setiap garis yang melewati titik di domainnya yang sejajar sumbu y akan memotong kurva tepat di satu titik. Dengan demikian, grafik fungsi $f(x) = x^2 + 2x + 3$ seperti diberikan dalam Gambar 2.2.

Contoh 2.2. *Jika* $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ *dan* $h \neq 0$, *hitunglah* $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.



Gambar 2.2: Grafik fungsi $f(x) = x^2 + 2x + 3$

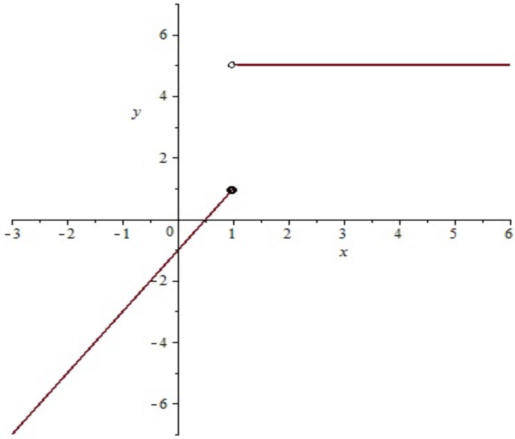
Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{[2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1] - [2a^2 - 5a + 1]}{h} \\
&= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\
&= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5. \qquad \square
\end{aligned}$$

Ada kalanya suatu fungsi dinyatakan dalam bentuk sepotong-sepotong, seperti berikut:

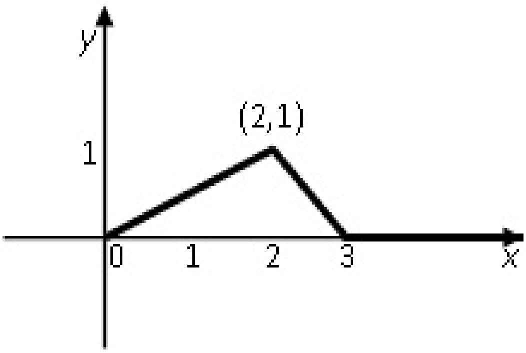
$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x \leq 1 \\ 5 & , x > 1 \end{cases}$$

Di sini diperoleh $g(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$, $g(2) = 5$, $g(10) = 5$, dan sebagainya. Adapun grafik fungsi g diberikan dalam Gambar 2.3.



Gambar 2.3: Grafik fungsi g

Contoh 2.3. *Tentukan rumus fungsi f yang grafiknya diberikan pada Gambar 2.4.*



Gambar 2.4: Grafik fungsi untuk soal Contoh 2.3

Penyelesaian:
Pada selang $[0, 2]$, grafik fungsi f mempunyai persamaan $y = x/2$. Pada selang $(2, 3]$, grafik fungsi f mempunyai persamaan $y = 3 - x$. Pada selang $(3, \infty)$, grafik fungsi f mempunyai persamaan $y = 0$. Oleh

karena itu, diperoleh rumus fungsi f adalah

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , 0 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & , 2 < x \leq 3 \\ 0 & , x > 3 \end{cases}$$

Rumus fungsi f dapat pula dinyatakan dengan (perhatikan domainnya)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , 0 \leq x < 2 \\ 3 - x & , 2 \leq x < 3 \\ 0 & , x \geq 3 \end{cases}$$

karena $f(2) = 1$ dan $f(3) = 0$. $\square$

Dua buah fungsi f dan g dikatakan **sama**, ditulis $f = g$, jika $D_f = D_g$ dan $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in D_f$. Sebagai contoh, fungsi f yang didefinisikan

$$f(x) = x + 1$$

dan fungsi g yang didefiniskan

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{cases}$$

merupakan dua fungsi yang sama.

Fungsi f dikatakan **fungsi ganjil** jika $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap x di domainnya dan fungsi f dikatakan **fungsi genap** jika $f(-x) = f(x)$ untuk setiap x di domainnya. Grafik fungsi ganjil simetris terhadap titik asal $(0, 0)$ dan grafik fungsi genap simetris terhadap sumbu y.

Contoh 2.4. *Apakah fungsi-fungsi berikut*

(i). $f(x) = 2x^3 - x$

(ii). $g(x) = x^4 - \frac{x^2}{3} - 3$

(iii). $h(x) = 3x^2 + 2x - 1$

merupakan fungsi ganjil, fungsi genap, atau bukan kedua-duanya?

Penyelesaian:

(i). $f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -(2x^3 - x) = -f(x)$

Jadi, f fungsi ganjil.

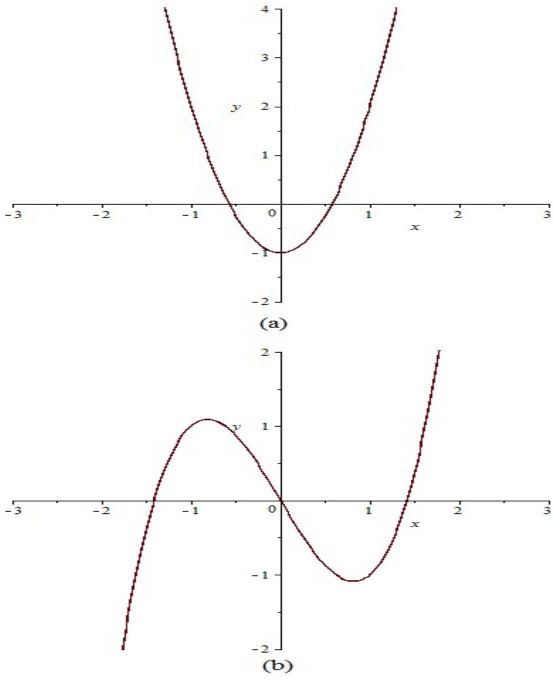
(ii). $g(-x) = (-x)^4 - \frac{(-x)^2}{3} - 3 = x^4 - \frac{x^2}{3} - 3 = g(x)$

Jadi, g fungsi genap.

(iii). $h(-x) = 3(-x)^2 + 2(-x) - 1 = 3x^2 - 2x - 1 \neq h(x)$ dan $h(-x) \neq -h(x)$

Jadi, h bukan fungsi genap dan juga bukan fungsi ganjil. $\square$

Seperti sudah disebutkan sebelumnya, salah satu sifat fungsi genap adalah grafik fungsinya simetris terhadap sumbu y, sedangkan fungsi ganjil grafiknya simetris terhadap titik asal. Sebagai contoh fungsi $f(x) = 3x^2 - 1$ merupakan fungsi genap dan $g(x) = x^3 - 2x$ merupakan fungsi ganjil yang kedua grafiknya diberikan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5: Grafik (a) fungsi genap dan (b) fungsi ganjil

Pergeseran tegak dan mendatar
Diberikan grafik fungsi f dan bilangan $a > 0$, maka untuk memperoleh grafik fungsi

1. $f(x-a)$, adalah dengan cara menggeser grafik $f(x)$ sejauh a satuan ke kanan
2. $f(x+a)$, adalah dengan cara menggeser grafik $f(x)$ sejauh a satuan ke kiri
3. $f(x)+a$, adalah dengan cara menggeser grafik $f(x)$ sejauh a satuan ke atas
4. $f(x)-a$, adalah dengan cara menggeser grafik $f(x)$ sejauh a satuan ke bawah

Peregangan dan pemampatan secara tegak dan mendatar
Diberikan grafik fungsi f dan bilangan $b > 1$, maka untuk memperoleh grafik fungsi

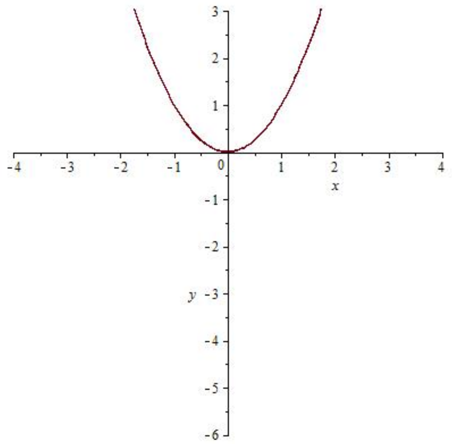
1. $bf(x)$, adalah dengan cara meregangkan grafik $f(x)$ secara tegak dengan faktor peregangan sebesar b
2. $\frac{1}{b}f(x)$, adalah dengan cara memampatkan grafik $f(x)$ secara tegak dengan faktor pemampatan sebesar b
3. $f(bx)$, adalah dengan cara meregangkan grafik $f(x)$ secara mendatar dengan faktor peregangan sebesar b
4. $f(\frac{b}{x})$, adalah dengan cara memampatkan grafik $f(x)$ secara mendatar dengan faktor pemampatan sebesar b

Contoh 2.5. *Gambarkan grafik* $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

Penyelesaian:
Fungsi $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ dapat dinyatakan dalam bentuk $f(x) = 2(x+1)^2 - 5$. Akibatnya, untuk menggambar $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut :

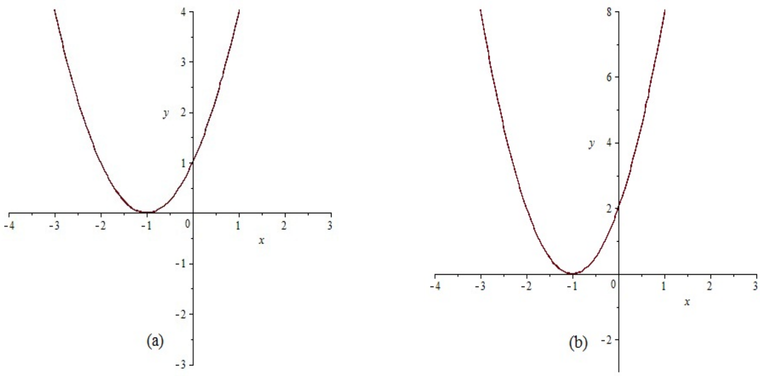
a. menggambar grafik $y = x^2$ (lihat Gambar 2.6).

b. menggambar grafik $y = (x+1)^2$ diperoleh dengan menggeser grafik hasil (a) satu satuan ke kiri (Gambar 2.7 (a)).



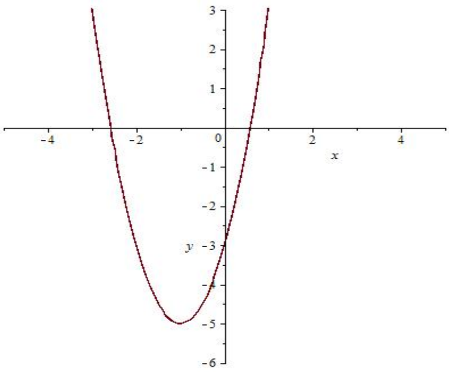
Gambar 2.6: Grafik $y = x^2$

c. menggambar $y = 2(x+1)^2$ diperoleh dengan meregangkan secara tegak grafik hasil (b) dua kali lipat (Gambar 2.7 (b)).



Gambar 2.7: Grafik (a) $y = (x+1)^2$, dan (b) $y = 2(x+1)^2$

d. menggambar grafik $f(x) = 2(x+1)^2 - 5$ diperoleh dengan menggeser grafik hasil dari (c) lima satuan ke bawah (Gambar 2.8).



Gambar 2.8: Grafik fungsi $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

2.2 Operasi pada Fungsi

Jika f dan g keduanya fungsi, maka penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian kedua fungsi masing-masing didefinisikan

a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, untuk setiap $x \in D_f \cap D_g$,

b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, untuk setiap $x \in D_f \cap D_g$,

c. $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, untuk setiap $x \in D_f \cap D_g$,

d. $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, untuk setiap $x \in D_f \cap D_g$ dan $g(x) \neq 0$

Diperhatikan, bahwa $D_{f+g} = D_f \cap D_g$, $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$, dan $D_{f/g} = D_f \cap D_g$ asalkan $g(x) \neq 0$.

Contoh 2.6. *Jika $f(x) = \sqrt{x+2}$ dan $g(x) = \sqrt{5-x}$, tentukan domain dari fungsi $f + g$ dan domain fungsi f/g.*

Penyelesaian:
Karena $D_f = [-2, \infty)$ dan $D_g = (-\infty, 5]$, maka

$$\begin{aligned} D_{f+g} &= D_f \cap D_g = [-2, \infty) \cap (-\infty, 5] = [-2, 5] \\ D_{f/g} &= [-2, 5) \end{aligned} \qquad \square$$

Untuk domain fungsi hasil penjumlahan (termasuk juga untuk perkalian dan pembagian) dua fungsi dalam bentuk fungsi sepotong-sepotong, perhatikan domainnya seperti dalam contoh berikut.

Contoh 2.7. *Diberikan fungsi f yang didefinisikan*

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \geq 1 \\ x^2 + x & , x < 1 \end{cases}$$

dan fungsi g yang didefinisikan

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & , x \geq 0 \\ 3 & , x < 0 \end{cases}$$

Tuliskan fungsi $f+g$ dalam bentuk sederhana.

Penyelesaian:
Karena fungsi $f+g$ terdefinisi jika $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \begin{cases} (2x+1)+(x-1) & , x \geq 1 \\ (x^2+x)+(x-1) & , 0 \leq x < 1 \\ (x^2+x)+3 & , x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3x & , x \geq 1 \\ x^2+2x-1 & , 0 \leq x < 1 \\ x^2+x+3 & , x < 0 \end{cases} \end{aligned} \qquad \square$$

2.3 Fungsi-fungsi Khusus

Pada bagian ini akan dibicarakan beberapa fungsi khusus, diantaranya fungsi mutlak, fungsi signum, dan fungsi bilangan bulat terbesar.

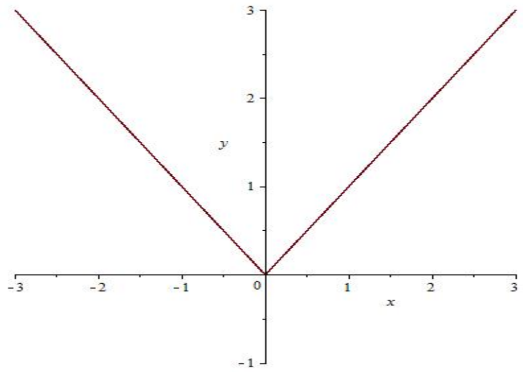
2.3.1 Fungsi Mutlak

Fungsi mutlak $f(x) = |x|$, didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Adapun grafik fungsi $f(x) = |x|$ diberikan dalam Gambar 2.9.

Dengan menggunakan definisi fungsi mutlak, fungsi h yang didefinisikan $h(x) = |x-2|$ dapat dituliskan tanpa memuat tanda mutlak "$|\cdot|$"

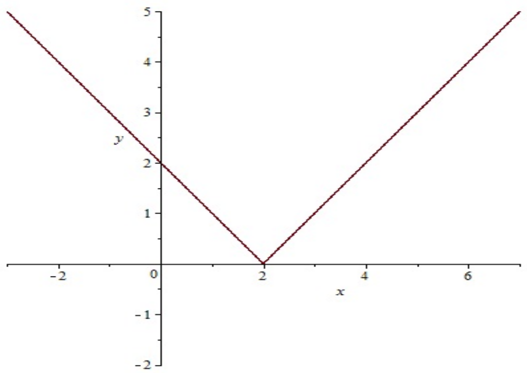


Gambar 2.9: Grafik fungsi $f(x) = |x|$

sebagai berikut

$$\begin{aligned} h(x) = |x-2| &= \begin{cases} x-2 & ,x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & ,x-2 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-2 & ,x \geq 2 \\ 2-x & ,x < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Adapun grafik fungsi h dapat diperoleh dari grafik fungsi $f(x) = |x|$ digeser ke kanan sejauh 2 satuan, seperti diberikan dalam Gambar 2.10.



Gambar 2.10: Grafik fungsi $h(x) = |x-2|$

Contoh 2.8. *Tuliskan fungsi $g(x) = |x+2| - |2x-1|$ tanpa memuat tanda mutlak "$|\cdot|$", kemudian sketsakan grafik fungsi g.*

Penyelesaian:
Berdasarkan definisi fungsi mutlak, diperoleh

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & , x \geq -1 \\ -(x+1) & , x < -1 \end{cases}$$

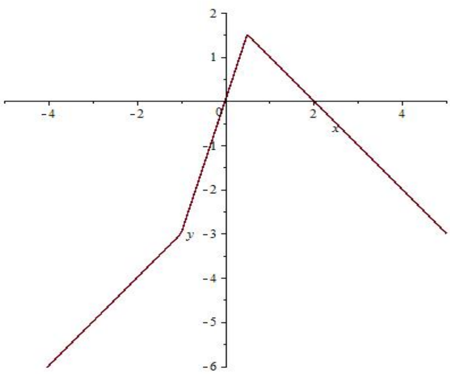
dan

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & , x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x & , x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} g(x) &= |x+1| - |2x-1| \\ &= \begin{cases} (x+1)-(2x-1) & , x \geq \frac{1}{2} \\ (x+1)-(1-2x) & , -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ -(x+1)-(1-2x) & , x < -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2-x & , x \geq \frac{1}{2} \\ 3x & , -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ x-2 & , x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Grafik fungsi g diberikan dalam Gambar 2.11.



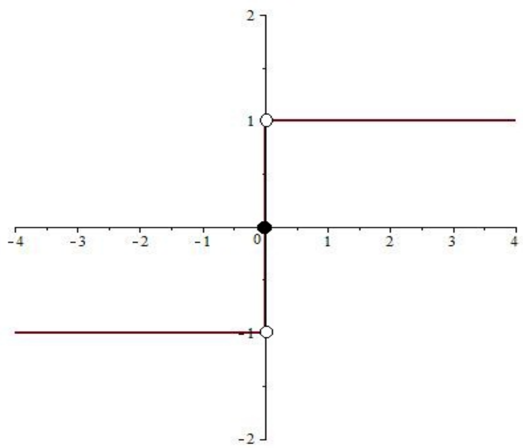
Gambar 2.11: Grafik fungsi $g(x) = |x+1| - |2x-1|$

2.3.2 Fungsi Signum

Fungsi signum x, ditulis $sign(x)$, didefinisikan sebagai

$$sign(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

Sebagai contoh $sign(0) = 0, sign(-0,000096) = -1, sign(2017) = 1$. Grafik fungsi $sign(x)$ diberikan dalam Gambar 2.12.



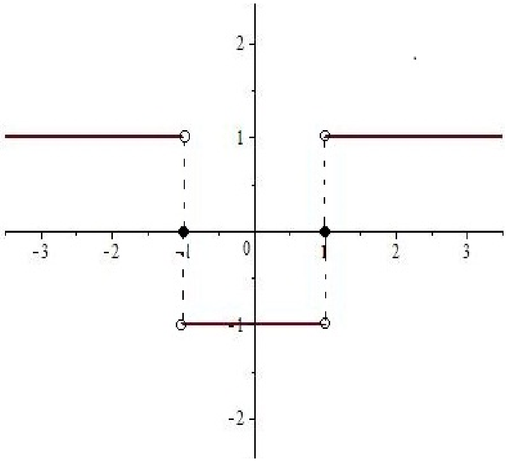
Gambar 2.12: Grafik fungsi $sign(x)$

Contoh 2.9. *Tuliskan fungsi $g(x) = sign(x^2-1)$ tanpa memuat notasi "sign" dan sketsakan grafiknya.*

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} sign(x^2-1) &= \begin{cases} -1 & , x^2-1 < 0 \\ 0 & , x^2-1 = 0 \\ 1 & , x^2-1 > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1 & , x^2 < 1 \\ 0 & , x^2 = 1 \\ 1 & , x^2 > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1 & , -1 < x < 1 \\ 0 & , x = 1 \text{ atau } x = -1 \\ 1 & , x > 1 \text{ atau } x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Adapun grafik fungsi $g(x) = sign(x^2 - 1)$ diberikan dalam Gambar 2.13.



Gambar 2.13: Grafik fungsi $g(x) = sign(x^2 - 1)$

Contoh 2.10. *Tuliskan fungsi* $k(x) = |sign(x+1)+x|$ *tanpa memuat notasi "sign" dan "$|\cdot|$", dan sketsakan grafiknya.*

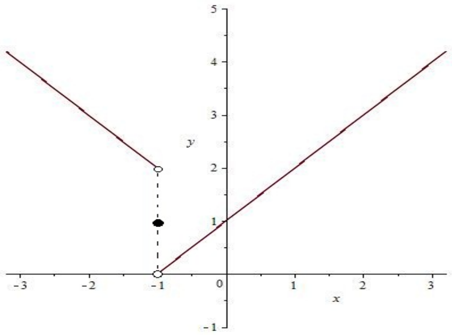
Penyelesaian:

$$sign(x+1) = \begin{cases} -1 & ,x < -1 \\ 0 & ,x = -1 \\ 1 & ,x > -1 \end{cases}$$

$$sign(x+1) + x = \begin{cases} x-1 & ,x < -1 \\ -1 & ,x = -1 \\ x+1 & ,x > -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k(x) &= |sign(x+1)+x| \\ &= \begin{cases} |x-1| & ,x < -1 \\ 1 & ,x = -1 \\ |x+1| & ,x > -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1-x & ,x < -1 \\ 1 & ,x = -1 \\ x+1 & ,x > -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Adapun grafik fungsi k diberikan dalam Gambar 2.14.



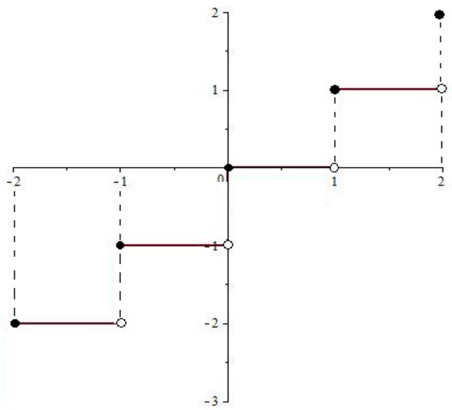
Gambar 2.14: Grafik fungsi $k(x) = |sign(x + 1) + x|$

2.3.3 Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

Bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, ditulis $[[x]]$, didefinisikan sebagai

$$[[x]] = n, \qquad \text{jika } n \leq x < n + 1$$

dengan n bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.
Sebagai contoh $[[2]] = 2, [[\pi]] = 3, [[-0,9]] = -1$. Adapun grafik fungsi $f(x) = [[x]]$ untuk $-2 \leq x \leq 2$ diberikan dalam Gambar 2.15.



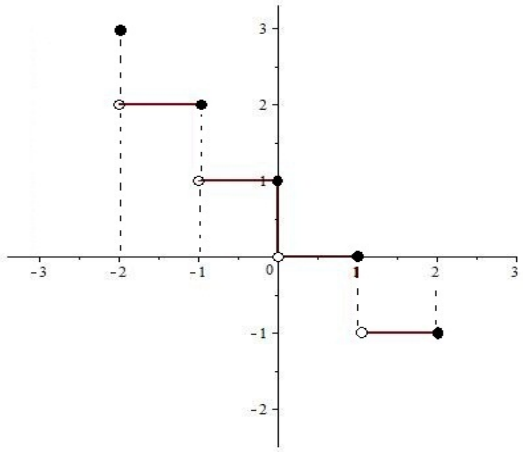
Gambar 2.15: Grafik fungsi $f(x) = [[x]]$

Contoh 2.11. *Tuliskan fungsi* $h(x) = [[1-x]]$ *untuk* $-2 \leq x \leq 2$ *tanpa memuat notasi "*$[[\cdot]]$*" dan sketsakan grafik fungsi* h.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
[[1-x]] &= n, \qquad n \leq 1-x < n+1 \\
&= n, \qquad -n < x \leq 1-n \\
&= \begin{cases} 3 & , x = -2 \\ 2 & , -2 < x \leq -1 \\ 1 & , -1 < x \leq 0 \\ 0 & , 0 < x \leq 1 \\ -1 & , 1 < x \leq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Adapun grafik fungsi $h(x) = [[1-x]]$ diberikan dalam Gambar 2.16.



Gambar 2.16: Grafik fungsi $h(x) = [[1-x]]$ pada selang $[-2, 2]$

2.4 Fungsi Komposisi

Diberikan dua fungsi f dan g. **Fungsi komposisi** $f \circ g$, dibaca f komposisi g, didefinisikan sebagai

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Domain fungsi $f \circ g$ adalah himpunan semua $x \in D_g$ dimana $g(x) \in D_f$. Sedangkan range fungsi $f \circ g$ adalah himpunan semua nilai $f(x) \in R_f$

dengan $x \in D_f \cap R_g$. Jadi

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ R_{f \circ g} &= \{f(x) \in R_f \mid x \in D_f \cap R_g\} \end{aligned}$$

Oleh karena itu jelaslah bahwa $D_{f \circ g} \subseteq D_g$ dan $R_{f \circ g} \subseteq R_f$.

Contoh 2.12. *Diberikan fungsi f dan g yang masing-masing didefinisikan $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = 2x - 1$. Tentukan $F(x)$ jika $F = f \circ g$, D_F, dan R_F.*

Penyelesaian:

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{2x - 1}.$$

Untuk domain F adalah semua nilai $x \in \mathbb{R}$ dengan $g(x) = 2x - 1 \geq 0$.
Jadi, diperoleh $D_F = [\frac{1}{2}, \infty)$.
Sedangkan untuk range F adalah $R_F = [0, \infty)$. □

Perhatikan bahwa fungsi komposisi $f \circ g$ terdefinisi apabila $R_g \cap D_f \neq \emptyset$. Sebagai contoh, jika $f(x) = \sqrt{x - 2}$ dan $g(x) = -x^2 + 1$ maka fungsi $f \circ g$ tidak terdefinisi.

Contoh 2.13. *Diberikan fungsi f yang didefinisikan*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \leq 0 \\ 2 & , x > 0 \end{cases}$$

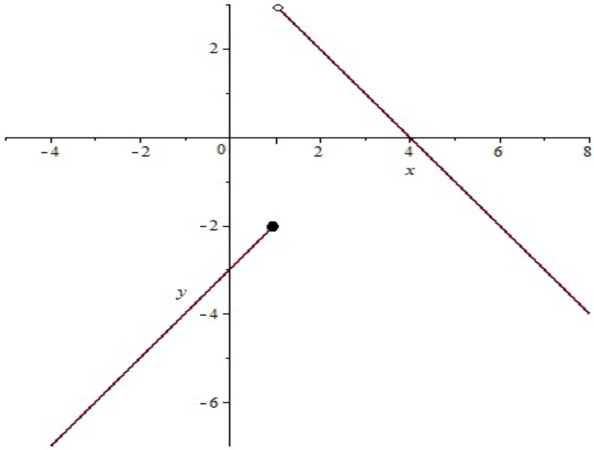
dan fungsi g yang didefinisikan

$$g(x) = \begin{cases} x - 3 & , x < 1 \\ -x + 4 & , x \geq 1 \end{cases}$$

Tentukan fungsi $f \circ g$ dan fungsi $g \circ f$ serta sketsakan grafiknya.

Penyelesaian:
Perhatikan grafik fungsi g seperti diberikan dalam Gambar 2.17. Dari grafik fungsi g, diperhatikan bahwa $R_g = (-\infty, 3]$. Sementara itu, $D_f = \mathbb{R}$. Karena $R_g \cap D_f = (-\infty, 3] \neq \emptyset$, maka fungsi $f \circ g$ terdefinisi. Oleh karena itu, diperoleh

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x) + 1 & , g(x) \leq 0 \\ 2 & , g(x) > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$



Gambar 2.17: Grafik fungsi g

Untuk $g(x) \leq 0$, diperoleh

$$g(x) \quad = \quad \begin{cases} x-3 & ,x<1 \\ -x+4 & ,x \geq 4 \end{cases} \tag{2.2}$$

Untuk $g(x) > 0$, diperoleh

$$g(x) = -x+4, \qquad 1 \leq x < 4 \tag{2.3}$$

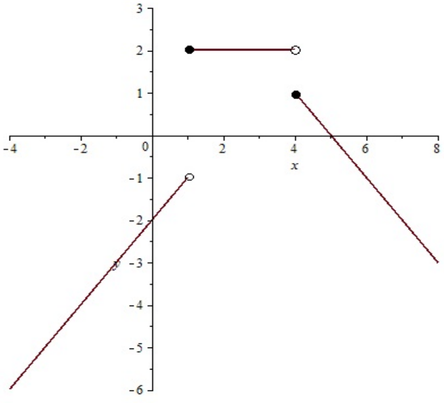
Substitusi (2.2) dan (2.3) ke (2.1), diperoleh

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) \quad &= \quad \begin{cases} (x-3)+1 & ,x<1 \\ (-x+4)+1 & ,x \geq 4 \\ 2 & ,1 \leq x < 4 \end{cases} \\ &= \quad \begin{cases} x-2 & ,x<1 \\ 2 & ,1 \leq x < 4 \\ -x+5 & ,x \geq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

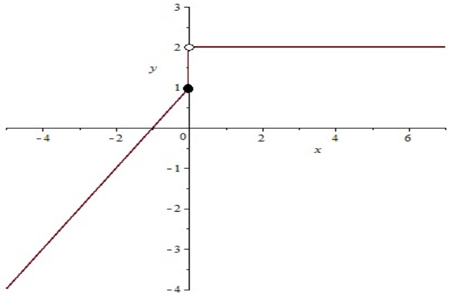
Adapun grafik fungsi $f \circ g$ diberikan dalam Gambar 2.18.

Selanjutnya, perhatikan grafik fungsi f seperti dalam Gambar 2.19 Dari grafik fungsi f, diperhatikan bahwa $R_f = (-\infty, 1] \cup \{2\}$. Sementara itu, $D_g = \mathbb{R}$. Karena $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka fungsi $g \circ f$ terdefinisi. Oleh karena itu, diperoleh

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad = \quad \begin{cases} f(x)-3 & ,f(x)<1 \\ -f(x)+4 & ,f(x) \geq 1 \end{cases} \tag{2.4}$$



Gambar 2.18: Grafik fungsi $f \circ g$



Gambar 2.19: Grafik fungsi f

Untuk $f(x) < 1$, diperoleh

$$f(x) = x + 1, \qquad x < 0 \tag{2.5}$$

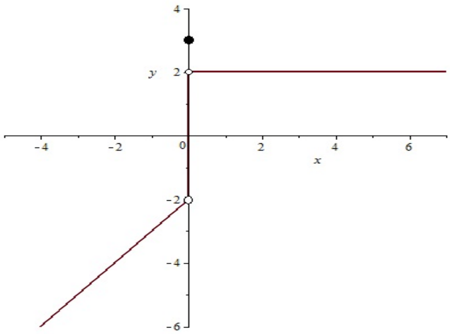
Untuk $f(x) \geq 1$, diperoleh

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ 2 & , x > 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Substitusi (2.5) dan (2.6) ke (2.4), diperoleh

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (x+1) - 3 & , x < 0 \\ -1 + 4 & , x = 0 \\ 2 & , x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & , x < 0 \\ 3 & , x = 0 \\ 2 & , x > 0 \end{cases}$$

Adapun grafik fungsi $g \circ f$ diberikan dalam Gambar 2.20. $\square$



Gambar 2.20: Grafik fungsi $g \circ f$

2.5 Fungsi Polinomial

Fungsi p disebut **polinomial** atau **polinom** jika p dapat dinyatakan sebagai

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dengan n bilangan bulat nonnegatif dan $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ konstanta-konstanta yang disebut **koefisien-koefisien** polinomial. Domain polinomial, jika tidak disebutkan secara khusus, adalah $\mathbb{R}$. Jika koefisien $a_n \neq 0$, maka polinomial tersebut dikatakan mempunyai **derajat** n. Sebagai contoh, fungsi

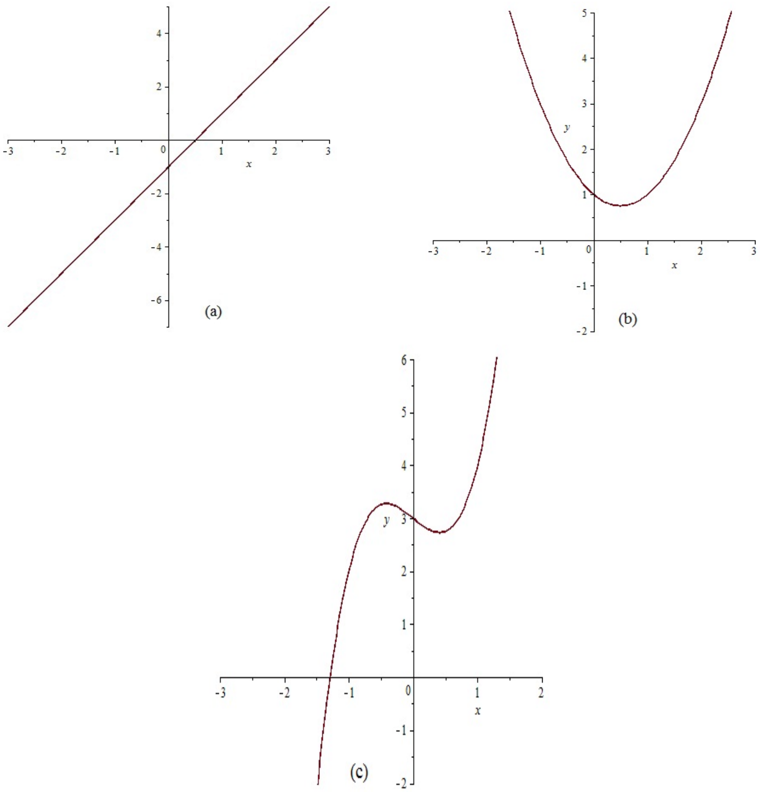
$$p(x) = 3x^5 - x^2 + 6x - 1$$

merupakan polinom berderajat 5.

Polinom berderajat 0 disebut **fungsi konstan**, polinom berderajat 1 disebut **fungsi linear**, polinom berderajat 2 disebut **fungsi kuadratik**, polinom berderajat 3 disebut **fungsi kubik**. Grafik fungsi konstan adalah garis yang sejajar dengan sumbu x. Grafik fungsi linear adalah garis yang berbentuk $y = mx+b$, dan grafik fungsi kuadratik berbentuk parabola. Contoh grafik fungsi linear, fungsi kuadratik dan fungsi kubik dapat dilihat pada Gambar 2.21.

Jika p dan q keduanya polinomial, maka fungsi f yang berbentuk

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$



Gambar 2.21: Grafik (a) fungsi linear $y = 2x - 1$, (b) fungsi kuadratik $y = x^2 - x + 1$, dan (c) fungsi kubik $y = 2x^3 - x + 3$

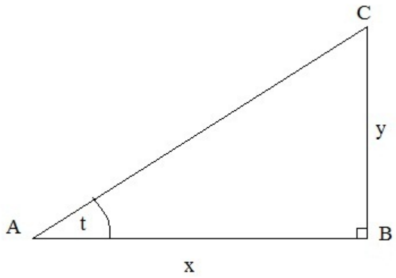
disebut **fungsi rasional**. Domain fungsi rasional $f = p/q$ adalah $D_p \cap D_q$ dengan $q(x) \neq 0$. Sebagai contoh, domain fungsi

$$f(x) = \frac{3x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 9}$$

adalah $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 3\}$

2.6 Fungsi Trigonometri

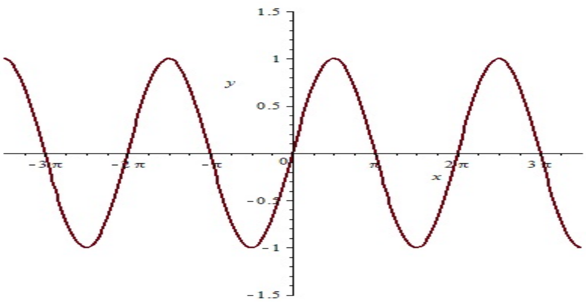
Fungsi-fungsi trigonometri umum (sinus, cosinus, dan tangen) didasarkan atas besar sudut t dalam Gambar 2.22 berikut.



Gambar 2.22: Segitiga siku-siku ABC

$$\sin t = \frac{|BC|}{|AC|}, \qquad \cos t = \frac{|AB|}{|AC|}, \qquad \tan t = \frac{|BC|}{|AB|}$$

Adapun grafik ketiga fungsi trigonometri umum tersebut masing-masing diberikan pada Gambar 2.23, 2.24, dan Gambar 2.25.

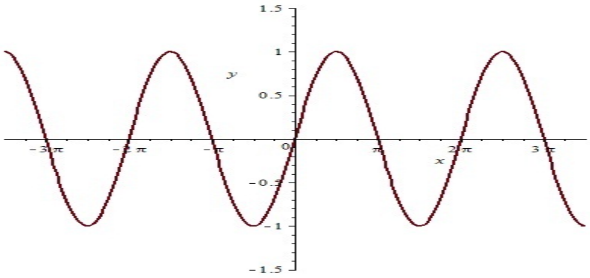


Gambar 2.23: Grafik fungsi $f(x) = \sin x$

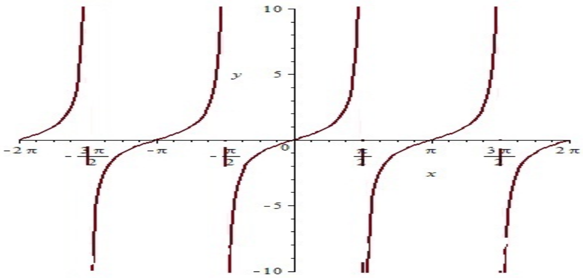
Perlu dicatat bahwa fungsi sinus dan cosinus keduanya terdefinisi pada $\mathbb{R}$ dengan range $[-1, 1]$. Jadi untuk setiap x di $\mathbb{R}$, diperoleh

$$-1 \le \sin x \le 1 \qquad \text{dan} \qquad -1 \le \cos x \le 1$$

Nilai $\sin x = 0$ terjadi saat nilai $x = n\pi$ dengan n bilangan bulat. Sedangkan fungsi tangen terdefinisi di semua nilai di $\mathbb{R}$ kecuali di $n\pi$ dengan n bilangan bulat, yakni $\tan x$ terdefinisi di setiap $\sin x \neq 0$.



Gambar 2.24: Grafik fungsi $f(x) = \cos x$



Gambar 2.25: Grafik fungsi $f(x) = \tan x$

2.7 Fungsi Eksponensial

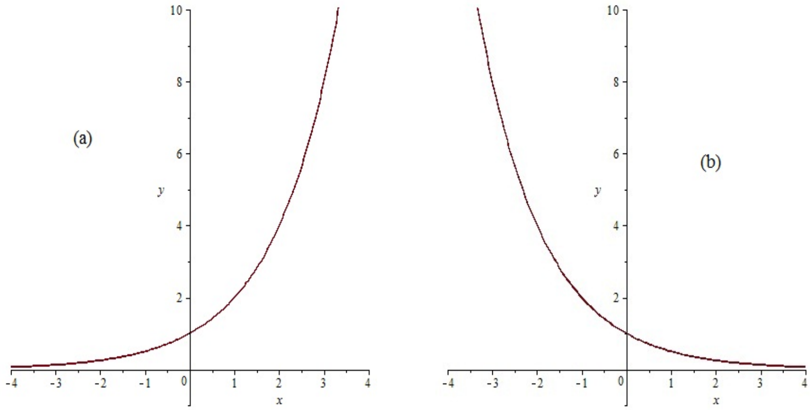
Secara umum, **fungsi eksponensial** adalah fungsi yang berbentuk

$$f(x) = a^x$$

dengan a konstanta positif. Grafik fungsi eksponensial, sebagai contoh $f(x) = 2^x$ dan $f(x) = (1/2)^x$ diberikan dalam Gambar 2.26.

Sifat-sifat eksponensial
Diberikan $a > 0$ dan $b > 0$. Jika x dan y sebarang bilangan real, maka

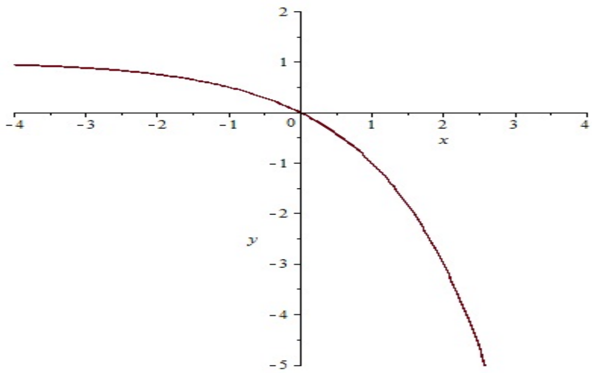
1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$



Gambar 2.26: Grafik fungsi (a). $f(x) = 2^x$ dan (b). $f(x) = (1/2)^x$

Contoh 2.14. *Sketsakan grafik fungsi* $f(x) = 1 - 2^x$ *dan tentukan domain dan rangenya.*

Penyelesaian:
Pertama, sketsakan dahulu grafik $y = 2^x$. Kemudian, untuk mendapatkan grafik $y = -2^x$, cerminkan grafik $y = 2^x$ terhadap sumbu x. Sedangkan grafik $f(x) = 1 - 2^x$ diperoleh dari grafik $y = -2^x$ digeser 1 satuan ke atas. Hasilnya diberikan dalam Gambar 2.27.



Gambar 2.27: Grafik fungsi $f(x) = 1 - 2^x$

Domain dari $f(x) = 1 - 2^x$ adalah $\mathbb{R}$ dan rangenya $(-\infty, 1)$. $\square$

2.8 Fungsi Invers

Suatu fungsi f yang memadankan suatu nilai x di dalam domainnya D_f dengan nilai tunggal y di rangenya R_f. Terkadang jika dibalik, yakni untuk suatu nilai y di R_f, diperoleh kembali nilai x yang dipadankan dengan y. Fungsi yang baru ini, yang memadankan nilai y dengan x, dinotasikan dengan f^{-1}. Diperhatikan bahwa, domain f^{-1} adalah R_f dan rangenya adalah D_f. Fungsi f^{-1} ini dinamakan **fungsi invers** f. Notasi $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

Tidak selalu, jika f adalah fungsi maka f^{-1} juga fungsi. Sebagai contoh, $f(x) = y = x^2$ fungsi pada $\mathbb{R}$ tidak memiliki invers, sebab untuk $y = 1$ maka terdapat $x_1 = 1$ dan $x_2 = -1$ dimana $x_1 = 1 \neq -1 = x_2$ tetapi berlaku $y = 1 = (x_1)^2 = (x_2)^2$. Tetapi jika didefinisikan fungsi $g(x) = x^2$ pada $[0, \infty)$, maka g^{-1} merupakan fungsi. Dalam kasus ini, g memiliki invers.

Apabila f mempunyai invers f^{-1}, maka f^{-1} juga mempunyai invers, yakni f. Jadi bisa dikatakan bahwa f dan f^{-1} merupakan pasangan fungsi invers, dan dirumuskan

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{dan} \qquad f(f^{-1}(y)) = y$$

Jika f mempunyai invers, maka berlaku

$$x = f^{-1}(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f(x) \tag{2.7}$$

Dengan demikian, jika diberikan grafik fungsi f dan f memiliki invers maka grafik fungsi f^{-1} diperoleh dari hasil pencerminan grafik fungsi f terhadap garis $y = x$. Sedangkan cara untuk mendapatkan rumus fungsi invers f adalah tentukan terlebih dahulu $f^{-1}(y)$, kemudian tukarkan x dan y dalam rumus $x = f^{-1}(y)$.

Contoh 2.15. *Tentukan invers fungsi $f(x) = x^2 - 3$ pada selang $[0, \infty)$ dan sketsakan grafik fungsi inversnya.*

Penyelesaian:
Pertama, dituliskan

$$y = x^2 - 3$$

Selesaikan persamaan ini untuk x diperoleh

$$x^2 = y + 3$$

$$x = \sqrt{y + 3}$$

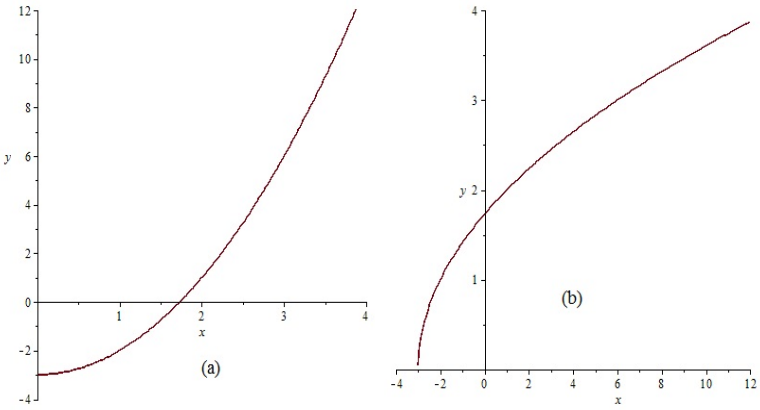
Akhirnya, pertukarkan x dan y diperoleh

$$y = \sqrt{x+3}$$

Oleh karena itu, diperoleh fungsi invers f adalah

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$$

Adapun grafik fungsi f dan f^{-1} diberikan pada Gambar 2.28.



Gambar 2.28: Grafik fungsi (a) $f(x) = x^2 - 3$ dan (b) $f^{-1} = \sqrt{x+3}$

2.9 Fungsi Logaritma

Sebelum bicara fungsi logaritma, akan terlebih dahulu diberikan pengertian fungsi naik dan fungsi turun.

Definisi 2.16. *Diberikan fungsi f dan selang $I \subseteq D_f$.*
(a) Fungsi f dikatakan **naik** *pada selang I jika*

$$f(x_1) \leq f(x_2), \qquad \text{asalkan } x_1 < x_2 \text{ untuk setiap } x_1, x_2 \in I;$$

(b) Fungsi f dikatakan **turun** *pada selang I jika*

$$f(x_1) \geq f(x_2), \qquad \text{asalkan } x_1 < x_2 \text{ untuk setiap } x_1, x_2 \in I;$$

Pada Definisi 2.16, jika "$f(x_1) \leq f(x_2)$" diganti menjadi "$f(x_1) < f(x_2)$" maka dikatakan fungsi f **naik ketat** atau **naik murni** pada I, dan jika "$f(x_1) \geq f(x_2)$" diganti menjadi "$f(x_1) > f(x_2)$" maka dikatakan fungsi f **turun ketat** atau **turun murni** pada I. Suatu fungsi yang naik murni atau turun murni disebut **monoton ketat** atau **monoton murni**. Diperhatikan bahwa jika f naik murni pada selang I, maka f juga naik pada I, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Begitu juga untuk turun murni.

Contoh 2.17. *Periksa, apakah fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi naik atau fungsi turun, atau bukan kedua-duanya pada selang* $I = [-2, 3]$*:*
(a). $f(x) = x^3$ *(b).* $g(x) = x^2 + 1$.

Penyelesaian:
(a). Ambil sebarang $x_1, x_2 \in I = [-2, 3]$ dengan $x_1 < x_2$. Jadi

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad & \Leftrightarrow \quad x_1^3 < x_2^3 \\ & \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2). \end{aligned}$$

Jadi f naik pada $I = [-2, 3]$.
(b). g bukan fungsi naik pada I karena $-2 < 0$ tetapi $g(-2) = 5 > 1 = g(0)$.
g juga bukan fungsi turun pada I karena $0 < 1$ tetapi $g(0) = 1 < 2 = g(1)$. □

Teorema 2.18. *Jika f fungsi monoton murni pada domainnya, maka f memiliki invers.*

Sekarang dibicarakan fungsi logaritma. Jika $a > 0$ dan $a \neq 1$, fungsi eksponensial $f(x) = a^x$ monoton murni (buktikan!). Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.18, fungsi eksponensial mempunyai invers. Invers fungsi eksponensial $f(x) = a^x$ disebut **fungsi logaritma dengan basis** a, dinotasikan $\log_a(x)$. Jika dengan menggunakan rumus fungsi invers persamaan (2.7), maka diperoleh

$$log_a(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad a^y = x \tag{2.8}$$

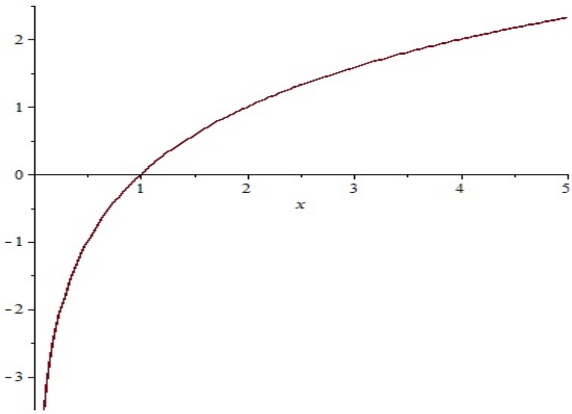
Sebagai contoh, $\log_{10} 0,01 = -2$ sebab $10^{-2} = 0,01$. Dengan menerapkan $f(x) = a^x$ dan $f^{-1}(x) = \log_a x$, maka diperoleh

$$\log_a(a^x) = x \qquad \text{untuk setiap } x \in \mathbb{R}$$

dan

$$a^{\log_a x} = x \qquad \text{untuk setiap } x > 0.$$

Fungsi logaritma mempunyai domain $(0, \infty)$ dan range $\mathbb{R}$. Grafik fungsi $f(x) = \log_2 x$ dapat diperoleh dari grafik $y = 2^x$ yang dicerminkan terhadap garis $y = x$, seperti diberikan dalam Gambar 2.29.



Gambar 2.29: Grafik fungsi $f(x) = \log_2 x$

Sifat-sifat Logaritma

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$ untuk sebarang bilangan real r.

Contoh 2.19. *Gunakan sifat logaritma untuk mengevaluasi nilai* $\log_2 80 - \log_2 10$.

Penyelesaian:
Dengan menggunakan sifat 2 logaritma, diperoleh

$$\log_2 80 - \log_2 10 = \log_2\left(\frac{80}{10}\right) = \log_2 8 = 3 \qquad \square$$

Salah satu basis logaritma yang sering digunakan adalah bilangan irasional e yang bernilai $e = 2,718281828459045 2353 \cdots$. Bilangan ini ditemukan oleh seorang matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler pada tahun 1727. Logaritma dengan basis bilangan e dinamakan **logaritma asli** dan biasanya dinotasikan secara khusus

$$\log_e x = \ln x$$

Dengan demikian diperoleh

$$\ln x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad e^y = x$$

dan

$$\ln e^x = x \qquad \text{untuk setiap } x \in \mathbb{R}.$$

Secara khusus, dipunyai

$$\ln e = 1$$

Contoh 2.20. *Selesaikan persamaan* $e^{5-3x} = 10$.

Penyelesaian:
Dengan mengambil logaritma kedua sisi persamaan, diperoleh

$$\begin{aligned} \ln e^{5-3x} &= \ln 10 \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \frac{1}{3}\Big(5 - \ln 10\Big) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.21. *Untuk sebarang bilangan real a $(a \neq 1)$, berlaku*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Contoh 2.22. *Evaluasi nilai* $\log_8 5$ *dalam enam angka di belakang koma.*

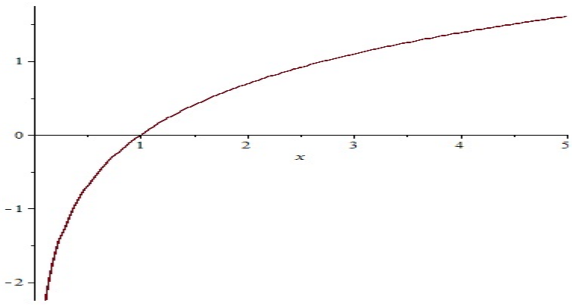
Penyelesaian:

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0,773976$$

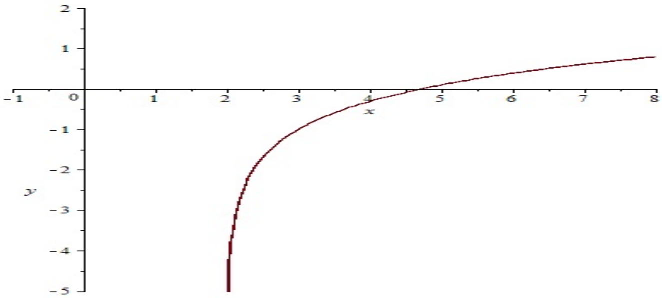
Grafik fungsi $f(x) = \ln x$ diberikan dalam Gambar 2.30. □

Contoh 2.23. *Sketsakan grafik fungsi* $f(x) = \ln(x-2) - 1$

Penyelesaian:
Pertama, sketsakan grafik $y = \ln x$. Kemudian grafik $y = \ln x$ digeser 2 satuan ke kanan dilanjutkan digeser 1 satuan ke bawah, hasilnya seperti diberikan dalam Gambar 2.31.



Gambar 2.30: Grafik fungsi $f(x) = \ln x$



Gambar 2.31: Grafik fungsi $f(x) = \ln(x-2) - 1$

2.10 Rangkuman

1. Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B, ditulis $f : A \rightarrow B$, adalah suatu aturan yang memasangkan setiap x anggota A dengan tepat satu y anggota B. Domain atau daerah asal atau darah definisi fungsi f adalah himpunan semua nilai $x \in \mathbb{R}$ sehingga $f(x)$ terdefinisi. Range atau jelajah atau daerah hasil dari fungsi f adalah himpunan semua nilai $f(x)$ dimana x anggota domain f.

2. Jika f dan g keduanya fungsi, maka $f + g$ dan $f \cdot g$ keduanya adalah fungsi yang terdefinisi pada $D_f \cap D_g$, dan f/g fungsi yang terdefinisi pada $D_f \cap D_g$ dengan $g(x) \neq 0$.

3. Fungsi komposisi $f \circ g$ terdefinisi apabila $R_g \cap D_f \neq \emptyset$.

4. Fungsi polinomial adalah fungsi yang dapat dinyatakan sebagai

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dengan n bilangan bulat nonnegatif dan $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ konstanta-konstanta. Fungsi polinomial terdefinisi pada $\mathbb{R}$.

5. Fungsi trigonometri sinus dan cosinus terdefinisi pada $\mathbb{R}$, sedangkan fungsi tangen terdefinisi pada $\mathbb{R}$ kecuali di sinus sama dengan 0.

6. Fungsi eksponensial adalah fungsi yang berbentuk

$$f(x) = a^x$$

dengan a konstanta positif. Fungsi eksponensial terdefinisi pada $\mathbb{R}$.

7. Fungsi logaritma adalah invers fungsi eksponensial. Fungsi logaritma dengan basis $a > 0, a \neq 1$ dituliskan

$$f(x) = \log_a x$$

yang terdefinisi untuk setiap $x > 0$.

2.11 Bahan Diskusi

1. Jika f fungsi ganjil dan g fungsi genap, bagaimanakah dengan fungsi-fungsi
(i). $f \circ g$ (ii). $g \circ f$ (iii). $f \circ f$ (iv). $g \circ g$.

2. Jika $f(x) = x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x-1}$, apa yang membedakan fungsi $f \circ g$ dengan fungsi h dimana $h(x) = x - 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$?

2.12 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Varberg, D., Purcell, E., and Rigdon, S., 2015, *Calculus*, 9th, Wiley Publishing

2. Stewart, J., 2016, *Calculus: Early Transcendentals*, 8th, Belmont: Thomson Higher Education

3. Leithold, L.1996.*The Calculus with Geometry Analytic.* 7th, Boston: Addison-Wesley

4. Apostol, T.M., 2010. *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, New York: John Wiley & Sons

2.13 Latihan Soal-soal

1. Jika diberikan $f(x) = \frac{x}{x+1}$, tentukan nilai dari
   (i). $f(0)$ (ii). $f(-2)$ (iii). $f(x+1)$.
   (iv). $f(x^2-2)$ (v). $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, h \neq 0$

2. Tentukan domain atau daerah asal dari fungsi-fungsi berikut
   (i). $f(x) = 5$ (ii). $g(t) = \frac{4-t^2}{2-t}$ (iii). $h(x) = \sqrt{5-x}$.

3. Jika f dan g keduanya fungsi ganjil, buktikan bahwa $f+g$ fungsi ganjil dan $f \cdot g$ fungsi genap.

4. Apakah ada suatu fungsi yang merupakan fungsi genap sekaligus fungsi ganjil? Jika ada tunjukkan contohnya.

5. Diberikan fungsi $f(x) = x^2$. Nyatakan fungsi kuadrat $g(x) = 2x^2 - x + 2$ dalam bentuk $bf(x-a)+c$ untuk suatu $a, b, c \in \mathbb{R}$.

6. Tuliskan fungsi $f(x) = |1-2x| - |x+1|$ tanpa memuat notasi "$|\cdot|$" dan sketsakan grafiknya.

7. Sketsakan grafik fungsi $g(x) = |x^2-4| - |x^2-9|$.

8. Sketsakan grafik persamaan $x + |x| = y + |y|$.

9. Tuliskan fungsi $g(x) = sign(x+1) - sign(x-1)$ tanpa memuat notasi "*sign*" dan sketsakan grafiknya.

10. Tuliskan fungsi $h(x) = [[2x-1]]$ untuk $-1 \leq x \leq 1$ tanpa memuat notasi "$[[\cdot]]$ dan sketsakan grafiknya.

11. Tuliskan fungsi $f(x) = sign(x+1) - |x-1|$ tanpa memuat notasi "*sign*" dan notasi "$|\cdot|$", serta skestakan grafiknya.

12. Diberikan fungsi $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ dan $g(x) = \sqrt{x-2}$. Tentukan fungsi $f \circ g$ dan fungsi $g \circ f$ serta tentukan domain dari masing-masing fungsi tersebut.

13. Diberikan fungsi f yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,x \leq 0 \\ 2x-1 & ,0 \leq x \leq 2 \\ 3 & ,x > 2 \end{cases}$$

dan fungsi g yang didefinisikan

$$g(x) = \begin{cases} x & ,x < 1 \\ 2 & ,1 \leq x < 2 \\ -1 & ,x \geq 2 \end{cases}$$

Tentukan domain dan range fungsi $f \circ g$.

14. Diberikan fungsi f yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ,x \leq -1 \\ 0 & ,x > -1 \end{cases}$$

dan fungsi g yang didefinisikan

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & ,x < 1 \\ 2 & ,x \geq 1 \end{cases}$$

a. Tentukan fungsi $f \circ f$ dan sketsakan grafiknya.
b. Tentukan fungsi $g \circ g$ dan sketsakan grafiknya.
c. Tentukan fungsi $f \circ g$ dan sketsakan grafiknya.
d. Tentukan fungsi $g \circ f$ dan sketsakan grafiknya.

15. Jika $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = x^2$, dan $h(x) = x^3 + 2$, tentukan rumus fungsi $(f \circ g \circ h)(x)$.

Bab 3

Limit Fungsi

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami pengertian dan konsep limit fungsi;
2. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
3. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. memeriksa apakah suatu fungsi mempunyai limit di suatu titik atau tidak;
2. menentukan limit fungsi di suatu titik;
3. menentukan limit fungsi tak hingga dan limit fungsi di tak hingga;
4. menentukan asimtot fungsi jika ada, khususnya asimtot tegak, datar, atau miring.

3.1 Definisi dan Teorema

Pandang fungsi f yang didefinisikan berikut:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \qquad x \neq 1.$$

Fungsi f terdefinisi untuk setiap nilai x kecuali $x = 1$. Untuk $x \neq 1$, fungsi f dapat ditulis

$$f(x) = x + 1, \qquad x \neq 1.$$

Selanjutnya akan dilihat nilai-nilai $f(x)$ untuk x mendekati 1, baik untuk $x < 1$ atau $x > 1$. Nilai-nilai $f(x)$ untuk beberapa kasus x mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

x	0	0,9	0,999	0,999999	1	1,000001	1,001	1,1	2
$f(x)$	1	1,9	1,999	1,999999	?	2,000001	2,001	2,1	3

Dari tabel di atas terlihat bahwa jika x mendekati 1 maka nilai $f(x)$ mendekati 2. Dalam hal ini dikatakan **limit** $f(x)$ untuk x mendekati 1 adalah 2, ditulis

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

Definisi 3.1. *Bilangan L dikatakan* **limit** *$f(x)$ di $x = c$ jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$ maka*

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Jika demikian halnya, selanjutnya ditulis

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Contoh 3.2. *Diberikan fungsi $f(x) = 4x - 3$. Buktikan*

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5.$$

Penyelesaian:
Diberikan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang.
Pilih $\delta < \frac{\epsilon}{4}$.
Jadi, jika $0 < |x - 2| < \delta$, diperoleh

$$|f(x) - 5| = |(4x - 3) - 5| = |4x - 8| = 4|x - 2| < 4\delta < \epsilon. \qquad \square$$

Contoh 3.3. *Buktikan*

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Bukti. Diberikan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang.
Jika $|x - 2| < 1$ diperoleh $1 < x < 3$ dan akibatnya $|x + 2| < 5$. Pilih $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$.
Jadi, jika $0 < |x - 2| < \delta$, diperoleh

$$|x^2 - 4| = |(x + 2)(x - 2)| = |x + 2||x - 2| < 5|x - 2| < 5\delta < \epsilon. \qquad \square$$

Berikut ini diberikan teorema yang menyatakan bahwa suatu fungsi jika mempunyai limit maka fungsi tersebut tidak mungkin mempunyai dua nilai limit yang berbeda.

Teorema 3.4. *Jika* $\lim_{x \to c} f(x) = L_1$ *dan* $\lim_{x \to c} f(x) = L_2$, *maka* $L_1 = L_2$.

Bukti. Diberikan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang.
Karena $\lim_{x \to c} f(x) = L_1$, berdasarkan Definisi 3.1, terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga jika $0 < |x - c| < \delta_1$ maka berlaku

$$|f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.1}$$

Karena $\lim_{x \to c} f(x) = L_2$, berdasarkan Definisi 3.1, terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga jika $0 < |x - c| < \delta_2$ maka berlaku

$$|f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Ambil $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dengan demikian $\delta \leq \delta_1$ dan $\delta \leq \delta_2$. Akibatnya, jika $|x - c| < \delta$ maka ketaksamaan (3.1) dan (3.2) berlaku. Oleh karena itu, dengan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |(L_1 - f(x)) - (L_2 - f(x))| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |L_2 - f(x)| \\ &= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Karena ketaksamaan di atas berlaku untuk setiap $\epsilon > 0$, maka disimpulkan $L_1 = L_2$. $\square$

Berikut beberapa teorema penting berkenaan dengan limit fungsi. Sebagian diantaranya tidak diberikan bukti, bukti dapat digunakan sebagai latihan.

Teorema 3.5. *Jika* $f(x) = a$ *(konstan), maka*

$$\lim_{x \to c} f(x) = a.$$

Bukti. Untuk setiap $\epsilon > 0$ yang diberikan, dipilih $\delta = \epsilon$. Oleh karena itu, jika $0 < |x - c| < \delta$ diperoleh

$$|f(x) - a| = |a - a| = 0 < \epsilon. \qquad \square$$

Teorema 3.6. *Jika* $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, *untuk suatu* n *bilangan asli dan* $a_0, a_1, \cdots, a_n$ *bilangan-bilangan real, maka*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n.$$

Teorema 3.7. *Jika* $\lim_{x \to c} f(x) = L$, *maka untuk setiap* $k \in \mathbb{R}$ *berlaku*

$$\lim_{x \to c} kf(x) = kL,$$

atau

$$\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x).$$

Bukti. Jika $k = 0$, maka $kf(x) = 0$ untuk setiap x. Hasilnya mengikuti Teorema 3.5.
Selanjutnya, anggap $k \neq 0$.
Diberikan $\epsilon > 0$ sebarang.
Karena $\lim_{x \to c} f(x) = L$, terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga jika $0 < |x - c| < \delta_1$ berlaku

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|k|}.$$

Dipilih $\delta = \delta_1$. Jadi, jika $0 < |x - c| < \delta$, diperoleh

$$|kf(x) - kL| = |k||f(x) - L| < |k|\frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon. \qquad \square$$

Teorema 3.8. *Jika* $\lim_{x \to c} f(x) = L_1$ *dan* $\lim_{x \to c} g(x) = L_2$, *maka*

(i). $\lim_{x \to c}(f + g)(x) = L_1 + L_2$

(ii). $\lim_{x \to c}(f - g)(x) = L_1 - L_2$

(iii). $\lim_{x\to c}(f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$

(iv). $\lim_{x\to c}(f/g)(x) = \frac{L_1}{L_2}$, *jika* $L_2 \neq 0$.

Bukti. Hanya akan dibuktikan butir (i) dan (ii) saja.
(i). Diberikan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang.
Karena $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$, terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x - c| < \delta_1$, berlaku

$$|f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.3}$$

Karena $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$, terdapat $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x - c| < \delta_2$, berlaku

$$|g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.4}$$

Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Oleh karena itu, jika $0 < |x - c| < \delta$, maka berlaku pertaksamaan (3.3) dan (3.4). Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| &= |(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

(ii). Dengan mengambil $k = -1$ pada Teorema 3.7 dan dengan menggunakan butir (i), maka terbukti. □

Akibat dari Teorema 3.8, khususnya (i) dan (iii), dapat diperumum menjadi

Teorema 3.9. *Jika* $\lim_{x\to c} f_i(x) = L_i$ *untuk setiap* $i = 1, 2, \cdots, n$, *maka*

(i). $\lim_{x\to c}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)(x) = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$

(ii). $\lim_{x\to c}(f_1 f_2 \cdots f_n)(x) = L_1 L_2 \cdots L_n$

Teorema 3.10. *Jika* $\lim_{x\to c} f(x) = L$, *dan* n *suatu bilangan asli maka*

$$\lim_{x\to c} \big(f(x)\big)^n = L^n,$$

atau

$$\lim_{x\to c} \big(f(x)\big)^n = \big(\lim_{x\to c} f(x)\big)^n,$$

Bukti. (i). Dengan mengambil $f_i(x) = f(x)$ dan $\lim_{x\to c} f_i(x) = L$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$ pada Teorema 3.9 (ii), diperoleh

$$\lim_{x\to c} \big(f(x)\big)^n = L^n.$$

□

Teorema 3.11. *Diberikan* $\lim_{x\to c} f(x) = L$*. Jika* $L \geq 0$ *dan* n *bilangan bulat positif, maka*

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

atau

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}.$$

Contoh 3.12. *Hitunglah*

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^3 + x - 1}{x^2 + 2}}$$

Penyelesaian:
Karena

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 1}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^3 + x - 1)}{\lim_{x\to 1}(x^2 + 2)} = \frac{1}{3} \geq 0,$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^3 + x - 1}{x^2 + 2}} &= \sqrt{\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 1}{x^2 + 2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

□

Teorema 3.13. *Jika* $f(x) \leq g(x)$ *untuk setiap* x*, limit* f *dan limit* g *keduanya ada apabila* x *mendekati* c*, maka*

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$$

Teorema 3.14. Teorema Apit *Jika* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *untuk setiap* x *dan*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$

maka

$$\lim_{x\to c} g(x) = L.$$

Contoh 3.15. *Tunjukkan bahwa*

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

Penyelesaian:
Perhatikan bahwa berikut ini tidak bisa dituliskan

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

karena $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ tidak ada.
Namun, karena

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1, \qquad \text{untuk setiap } x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

maka diperoleh

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2.$$

Selanjutnya, dengan mengambil limit atas semua ruas ketaksamaan di atas, diperoleh

$$\lim_{x\to 0} -x^2 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} \leq \lim_{x\to 0} x^2.$$

Karena

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0,$$

maka disimpulkan

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0. \qquad \square$$

3.2 Limit Sepihak

Definisi 3.16. (a). *Misal f terdefinisi pada selang buka (c, d). Bilangan L dikatakan* **limit kanan** *$f(x)$ untuk x menuju c sama dengan L, ditulis*

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $0 < x - c < \delta$ maka

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

(b). Misal f terdefinisi pada selang buka (b, c). Bilangan L dikatakan **limit kiri** *$f(x)$ untuk x menuju c sama dengan L, ditulis*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $0 < c - x < \delta$ maka

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

Contoh 3.17. *Diberikan fungsi h yang didefinisikan*

$$h(x) \quad = \quad \begin{cases} 4 - x^2 & , x \leq 1 \\ 2 + x^2 & , x > 1 \end{cases}$$

Hitunglah
(a). $\lim_{x \to 1^+} h(x)$ (b). $\lim_{x \to 1^-} h(x)$

Penyelesaian:
(a). Karena untuk $x > 1$ fungsi $h(x) = 2 + x^2$, maka

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 + x^2) = 2 + (1)^2 = 3.$$

(b). Karena untuk $x < 1$ fungsi $h(x) = 4 - x^2$, maka

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^+} (4 - x^2) = 4 - (1)^2 = 3. \qquad \square$$

Contoh 3.18. *Hitunglah*

$$\text{(i). } \lim_{x \to 0^+} [[x]], \qquad \text{dan} \qquad \text{(ii). } \lim_{x \to 0^-} [[x]].$$

Penyelesaian:
(i). Karena $[[x]] = 0$ untuk $0 \leq x < 1$, diperoleh

$$\lim_{x \to 0^+} [[x]] = 0.$$

(ii). Karena $[[x]] = -1$ untuk $-1 \leq x < 0$, diperoleh

$$\lim_{x \to 0^-} [[x]] = -1. \qquad \square$$

Dari Contoh 3.18 ini menunjukkan bahwa secara umum limit kiri belum tentu sama dengan limit kanan. Jika limit kiri sama dengan limit kanan, menunjukkan ia memiliki limit seperti dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 3.19. $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *jika dan hanya jika*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L.$$

Teorema Apit untuk limit sepihak, diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.20. *Diberikan selang* $[a, b]$ *dan* $c \in (a, b)$.

(i). Jika $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *untuk setiap* $x > c$ *dan*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^+} h(x) = L_1,$$

maka

$$\lim_{x \to c^+} g(x) = L_1.$$

(ii). Jika $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *untuk setiap* $x < c$ *dan*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^-} h(x) = L_2,$$

maka

$$\lim_{x \to c^-} g(x) = L_2.$$

3.3 Limit Di Tak Hingga

Pandang fungsi f yang didefinisikan berikut:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}.$$

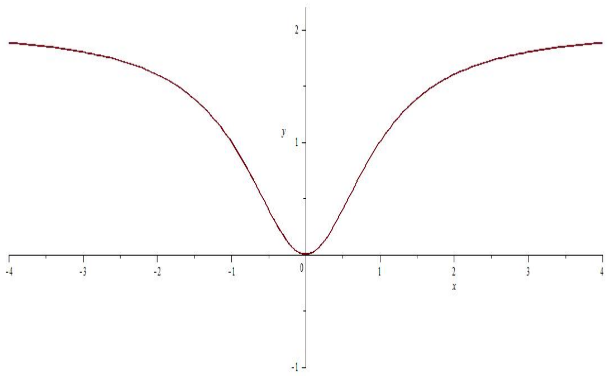
Grafik fungsi f dapat dilihat pada Gambar 3.1.

Selanjutnya akan dilihat nilai-nilai $f(x)$ untuk x semakin besar menuju tak berhingga dengan melihat tabel berikut.

x	0	1	5	10	100	1000	100000
$f(x)$	0	1	50/26	200/201	20000/10001	$2,000$	$2,000$

Dari tabel di atas terlihat bahwa jika x semakin besar maka nilai $f(x)$ mendekati 2. Dalam hal ini dikatakan **limit** $f(x)$ untuk x menuju tak berhingga adalah 2, ditulis

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2.$$



Gambar 3.1: Grafik fungsi $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$

Definisi 3.21. *Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dan fungsi f yang terdefinisi pada selang (a, ∞). Bilangan $L \in \mathbb{R}$ dikatakan limit $f(x)$ untuk x menuju tak hingga, ditulis*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{atau} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan $N > 0$ sedemikian hingga apabila $x > N$ maka berlaku

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Teorema 3.22. *Jika n bilangan asli, maka berlaku*

$$\text{(i). } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \qquad \text{(ii). } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Bukti. Diberikan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang.
Pilih bilangan $N > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{n}}$. Jadi, jika $x > N$ diperoleh

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{x^n}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|^n < \left|\frac{1}{N}\right|^n < \epsilon. \qquad \square$$

Contoh 3.23. *Hitunglah*

$$\text{(i). } \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2-4}}, \qquad \text{(ii). } \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2-4}}$$

Penyelesaian:
(i). Karena $x \to \infty$, di sini cukup diambil untuk $x > 0$ dengan $3x^2 - 4 > 0$. Oleh karena itu $x = \sqrt{x^2}$. Dengan menggunakan teorema-teorema limit yang telah diberikan, diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2-4}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2-4}}(\frac{1/x}{1/\sqrt{x^2}}) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{3-\frac{4}{x^2}}} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x})}{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3-\frac{4}{x^2}})} \\
&= \frac{(\lim_{x\to\infty} 2 + 3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x})}{(\sqrt{\lim_{x\to\infty}(3-\frac{4}{x^2})})} \\
&= \frac{(2+3\cdot 0)}{(\sqrt{(3-4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}})} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3-4\cdot 0}} = \frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

(ii). Karena $x \to -\infty$, di sini cukup diambil untuk $x < 0$ dengan $3x^2 - 4 > 0$. Oleh karena itu $x = -\sqrt{x^2}$ atau $-x = \sqrt{x^2}$. Dengan menggunakan teorema-teorema limit yang telah diberikan, diperoleh

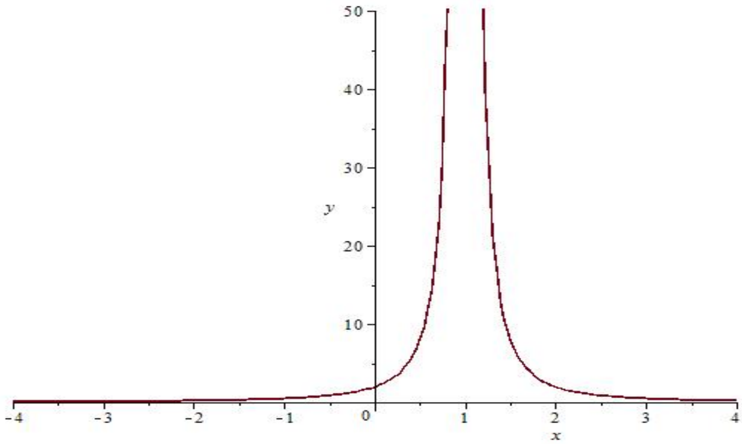
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2-4}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2-4}}(\frac{1/x}{-1/\sqrt{x^2}}) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{3-\frac{4}{x^2}}} \\
&= -\frac{\lim_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x})}{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3-\frac{4}{x^2}})} \\
&= -\frac{(\lim_{x\to\infty} 2 + 3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x})}{(\sqrt{\lim_{x\to\infty}(3-\frac{4}{x^2})})} \\
&= -\frac{(2+3\cdot 0)}{(\sqrt{(3-4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}})} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3-4\cdot 0}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \square
\end{aligned}$$

3.4 Limit Tak Hingga

Pandang fungsi f berikut

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}, \qquad x \neq 1$$

di sekitar $x = 1$. Grafik fungsi f dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2: Grafik fungsi $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$

Selanjutnya akan dilihat nilai-nilai $f(x)$ untuk x mendekati 1 dengan melihat tabel berikut.

x	$0,5$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	?	$1,001$	$1,01$	1,1
$f(x)$	8	200	20000	2000000	?	2000000	20000	200

Dari tabel di atas terlihat bahwa jika x semakin dekat ke 1, maka nilai $f(x)$ semakin besar menuju tak berhingga. Dalam hal ini dikatakan **limit** $f(x)$ untuk x mendekati 1 adalah tak berhingga, ditulis

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty.$$

Definisi 3.24. *Diberikan selang buka (a, b) yang memuat c dan diberikan fungsi f yang terdefinisi pada selang (a, b) kecuali mungkin di titik c. Limit $f(x)$ untuk x mendekati c adalah tak hingga, ditulis*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \qquad \text{atau} \qquad \lim_{x \to c} f(x) = +\infty,$$

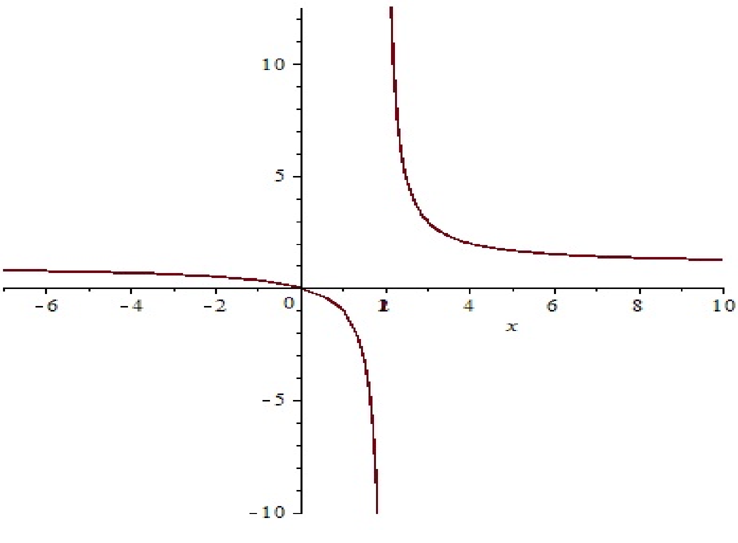
jika untuk setiap $N > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga apabila $0 < |x - c| < \delta$, maka berlaku $f(x) > N$.

Dalam Definisi 3.24, kalimat "kecuali mungkin di titik c" artinya fungsi tersebut bisa terdefinisi atau tidak terdefinisi di titik c. Jadi dalam hal ini, fungsinya terdefinisi atau tidak terdefinisi di titik c tidak diperhatikan.

Selanjutnya, pandang fungsi h yang didefinisikan

$$h(x) = \frac{x}{x - 2}, \qquad x \neq 2.$$

Grafik fungsi h dapat dilihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3: Grafik fungsi $h(x) = \frac{x}{(x-2)}$

Dalam Gambar 3.3, bila diperhatikan bahwa untuk x mendekati 2 dengan $x < 2$ maka nilai $h(x)$ menuju negatif tak terbatas. Sebaliknya, untuk x mendekati 2 dengan $x > 2$ maka nilai $h(x)$ semakin membesar tak terbatas. Untuk dua kasus ini, dapat dituliskan

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty,$$

dan

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = \infty.$$

Lebih jelasnya untuk pengertian limit kiri dan limit kanan tak hingga dituangkan dalam definisi berikut.

Definisi 3.25. (i). *Diberikan selang buka (a, c) dan diberikan fungsi f yang terdefinisi pada selang (a, c). Limit $f(x)$ untuk x mendekati c dari arah kiri adalah tak hingga, ditulis*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty \qquad \text{atau} \qquad \lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty,$$

jika untuk setiap $N > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga apabila $0 < c - x < \delta$, maka berlaku $f(x) > N$.
(ii). *Diberikan selang buka (c, b) dan diberikan fungsi f yang terdefinisi pada selang (c, b). Limit $f(x)$ untuk x mendekati c dari arah kanan adalah tak hingga, ditulis*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \qquad \text{atau} \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty,$$

jika untuk setiap $N > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga apabila $0 < x - c < \delta$, maka berlaku $f(x) > N$.

Teorema 3.26. *Jika n bilangan asli, maka berlaku*

$$\begin{aligned}
&\text{(i).} && \lim_{x \to c} \left| \frac{1}{(x-c)^n} \right| = \infty, \\
&\text{(ii).} && \lim_{x \to c^+} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty \\
&\text{(iii).} && \lim_{x \to c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = -\infty, \ n \text{ ganjil} \\
&\text{(iv).} && \lim_{x \to c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty, \ n \text{ genap}
\end{aligned}$$

Teorema 3.27. *Diberikan $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to c} f(x) = 0$, dan $\lim_{x \to c} g(x) = L \neq 0$. Berlaku pernyataan-pernyataan berikut:*

(i). *Jika* $L > 0$ *dan* $f(x) \to 0$ *dengan* $f(x) > 0$ *untuk setiap* x*, maka*

$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty.$$

(ii). *Jika* $L > 0$ *dan* $f(x) \to 0$ *dengan* $f(x) < 0$ *untuk setiap* x*, maka*

$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

(iii). *Jika* $L < 0$ *dan* $f(x) \to 0$ *dengan* $f(x) > 0$ *untuk setiap* x*, maka*

$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$$

(iv). *Jika* $L < 0$ *dan* $f(x) \to 0$ *dengan* $f(x) < 0$ *untuk setiap* x*, maka*

$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty.$$

Bukti. Hanya dibuktikan butir (i) saja, selebihnya dapat digunakan sebagai latihan.
Karena $\lim_{x\to c} g(x) = L > 0$, terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga apabila $0 < |x - c| < \delta_1$ maka berlaku

$$|g(x) - L| < L/2.$$

Oleh karena itu, diperoleh hubungan

$$-\frac{L}{2} < g(x) - L < \frac{L}{2}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{L}{2} < g(x) \tag{3.5}$$

Selanjutnya, karena $\lim_{x\to c} f(x) = 0$, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga apabila $0 < |x - c| < \delta_2$ maka berlaku

$$|f(x)| < \epsilon$$

Ambil $\epsilon = L/(2N)$, akibatnya diperoleh

$$f(x) < \epsilon = \frac{L}{2N}. \tag{3.6}$$

Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Jadi, jika $0 < |x - c| < \delta$, maka pertaksamaan (3.5) dan (3.6) berlaku.
Oleh karena itu, jika $0 < |x - c| < \delta$, diperoleh

$$\frac{g(x)}{f(x)} > \frac{L/2}{L/(2N)} = N. \qquad \square$$

Teorema 3.27 masih berlaku apabila pernyataan "$x \to c$" diganti dengan "$x \to c^+$" atau "$x \to c^-$".

Contoh 3.28. *Hitunglah*

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

Penyelesaian:
Ambil $f(x) = x^2 - 2x - 3$ dan $g(x) = x^2 + x + 1$. Karena $\lim_{x \to 3^+} g(x) = 14 > 0$ dan $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 0$ dengan $f(x) > 0$ untuk setiap $x > 3$, maka dengan menggunakan Teorema 3.27 (i) dengan mengganti "$x \to 3$" dengan "$x \to 3^+$", diperoleh

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x - 3} = \infty. \qquad \square$$

Definisi 3.29. *Garis $x = a$ disebut* **asimtot tegak** *kurva $y = f(x)$ jika sedikitnya ada satu dari pernyataan berikut benar:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Sebagai contoh, sumbu-y (garis $x = 0$) merupakan asimtot tegak kurva $y = 1/x^2$ karena $\lim_{x \to 0} 1/x^2 = \infty$.

Contoh 3.30. *Tentukan asimtot tegak kurva*

$$f(x) = \frac{2x}{x-2}$$

Penyelesaian:
Jika x mendekati 2 dari arah kanan, maka penyebut $x - 2$ adalah bilangan positif sangat kecil dan $2x$ mendekati 4. Dengan demikian $2x/(x-2)$ bilangan positif sangat besar. Jadi, secara intuitif dituliskan

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x}{x-2} = \infty.$$

Dengan cara serupa, jika x mendekati 2 dari arah kiri, maka penyebut $x - 2$ adalah bilangan negatif sangat kecil dan $2x$ tetap positif (mendekati 4). Dengan demikian $2x/(x-2)$ bilangan negatif sangat besar. Jadi, secara intuitif dituliskan

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x}{x-2} = -\infty.$$

Jadi, garis $x = 2$ merupakan asimtot tegak kurva $f(x) = \frac{2x}{x-2}$. □

Definisi 3.31. *Garis* $y = L$ *disebut* **asimtot datar** *kurva* $y = f(x)$ *jika berlaku*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \textit{atau} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Sebagai contoh, kurva fungsi

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$$

mempunyai asimtot datar garis $y = 1$ karena

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x^2+4} = 1.$$

Sedangkan kurva fungsi

$$g(x) = \frac{2x^3}{|x^3|+1}$$

mempunyai dua asimtot datar, yakni garis $y = 2$ dan garis $y = -2$ karena

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{|x^3|+1} = 2$$

dan

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{|x^3| + 1} = -2.$$

Contoh 3.32. *Tentukan asimtot-asimtot kurva*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Penyelesaian:
Karena

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

dan

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x},$$

maka kurva $f(x) = \frac{1}{x}$ mempunyai asimtot tegak dan datar, yakni garis $x = 0$ merupakan asimtot tegak dan garis $y = 0$ merupakan asimtot datar. □

Definisi 3.33. *Garis* $y = mx + b$ *disebut* **asimtot miring** *kurva* $y = f(x)$ *jika berlaku*

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Contoh 3.34. *Tentukan asimtot kurva*

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Penyelesaian:
Karena $x^2 + 1$ tidak pernah bernilai 0, maka tidak terdapat asimtot tegak.
Karena $f(x) \to \infty$ apabila $x \to \infty$ dan $f(x) \to -\infty$ apabila $x \to -\infty$, maka f tidak mempunyai asimtot datar.
Selanjutnya, diperhatikan bahwa

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

sehingga diperoleh

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to 0 \text{ jika } x \to \pm\infty$$

Jadi, garis $y = x$ merupakan asimtot miring kurva $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$. □

3.5 Rangkuman

1. Diberikan n bilangan asli, k konstanta dan f dan g fungsi-fungsi yang memiliki limit di c, maka

   (a) $\lim_{x\to c} k = k$;

   (b) $\lim_{x\to c} x = c$;

   (c) $\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$;

   (d) $\lim_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$;

   (e) $\lim_{x\to c} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$;

   (f) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$;

   (g) $\lim_{x\to c} \big[f(x)\big]^n = \big[\lim_{x\to c} f(x)\big]^n$;

   (h) $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x\to c} f(x) \geq 0$ dan n genap.

2. $\lim_{x\to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L.$$

3. Jika n bilangan asli, maka berlaku

$$\text{(i). } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \qquad \text{(ii). } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

4. Jika n bilangan asli, maka berlaku

$$\begin{aligned}
&\text{(i).} && \lim_{x\to c} \left|\frac{1}{(x-c)^n}\right| = \infty,\ n \text{ genap} \\
&\text{(ii).} && \lim_{x\to c^+} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty \\
&\text{(iii).} && \lim_{x\to c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = -\infty,\ n \text{ ganjil} \\
&\text{(iv).} && \lim_{x\to c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty,\ n \text{ genap}
\end{aligned}$$

5. Garis $x = a$ merupakan asimtot tegak kurva $y = f(x)$ jika sedikitnya ada satu dari pernyataan berikut benar:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

6. Garis $y = L$ merupakan asimtot datar kurva $y = f(x)$ jika berlaku

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{atau} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

7. Garis $y = mx + b$ merupakan asimtot miring kurva $y = f(x)$ jika berlaku

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

3.6 Bahan Diskusi

1. Diberikan bilangan $L \in \mathbb{R}$. Definisikan pengertian

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

dengan kalimat Anda sendiri.

2. Diberikan $c \in \mathbb{R}$. Definisikan pengertian

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

dengan kalimat Anda sendiri.

3. Diberikan $c \in \mathbb{R}$. Definisikan pengertian

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

dengan kalimat Anda sendiri.

3.7 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Varberg, D., Purcell, E., and Rigdon, S., 2015, *Calculus*, 9th, Wiley Publishing

2. Stewart, J., 2016, *Calculus: Early Transcendentals*, 8th, Belmont: Thomson Higher Education

3. Leithold, L.1996.*The Calculus with Geometry Analytic.* 7th, Boston: Addison-Wesley

4. Apostol, T.M., 2010. *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, New York: John Wiley & Sons

3.8 Latihan Soal-soal

1. Hitung

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$$

2. Buktikan bahwa

$$\lim_{x\to 0} x^4 \cos\frac{2}{x} = 0$$

3. Diberikan

$$g(x) = \begin{cases} 2 & , x \leq 1 \\ -1 & , x = 1 \\ 3 & , x > 1 \end{cases}$$

Hitung

(i). $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ (ii). $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ (iii). $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

4. Diberikan

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \leq 3 \\ 10-x & , x > 3 \end{cases}$$

Hitung

(i). $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$ (ii). $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$ (iii). $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$

5. Jika $f(x) = \frac{|x|}{x}, x \neq 0$, hitunglah

   (i). $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (ii). $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (iii). $\lim_{x \to 0} f(x)$

6. Jika $f(x) = [[x]] - [[4 - x]]$, hitunglah

   (i). $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ (ii). $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

7. Hitunglah
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{[[x^2]] - 4}{x^2 - 4}$$

8. Hitunglah
$$\lim_{x \to 1} [[x + 1]]$$

9. Jika $f(x) = [[x]] + [[-x]]$, tunjukkan bahwa $\lim_{x \to 2} f(x)$ ada, tetapi $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$.

10. Buktikan bahwa
$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} e^{\sin \frac{\pi}{x}} = 0$$

11. Dengan menggunakan Definisi 3.24, buktikan bahwa
$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{(x - 2)^2} = \infty$$

12. Hitunglah
$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

13. Hitunglah
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{sign(x)}$$

14. Tentukan asimtot datar dan asimtot tegak dari setiap kurva fungsi yang diberikan berikut.

    (a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$
    (b) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-3x-2}$
    (c) $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2-6x+5}$

(d) $f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 5}$

15. Tunjukkan bahwa garis $y = \frac{b}{a}x$ dan $y = -\frac{b}{a}x$ merupakan asimtot-asimtot miring hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

16. Tentukan asimtot-asimtot miring dari kurva-kurva berikut

(a). $y = \frac{-2x^2+5x-1}{2x-1}$

(b). $y = \frac{x^2+12}{x-2}$

(c). $y = \frac{2x^3+x^2+1}{x^2+1}$

(d). $y = \frac{(x^1)^3}{(x-1)^2}$

17. Gunakan Teorema Apit untuk mengevaluasi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$$

Bab 4

Kekontinuan Fungsi

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami pengertian dan konsep kekontinuan fungsi;
2. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
3. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. memeriksa apakah suatu fungsi kontinu di suatu titik atau tidak;
2. menentukan jenis titik kediskotinuan fungsi;

4.1 Fungsi Kontinu

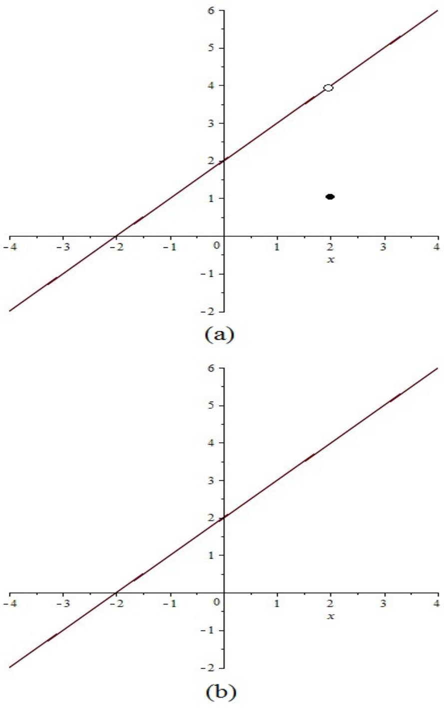
Perhatikan dua fungsi f dan g yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = x + 2$$

dan

$$g(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$$

Jika diperhatikan sekilas, kedua fungsi tersebut nyaris sama, yakni $f(x) = g(x)$ untuk setiap x dengan $x \neq 2$. Kedua fungsi hanya berbeda nilainya di satu titik, yakni di $x = 2$, dimana $f(2) = 4 \neq 1 = g(2)$. Grafik kedua fungsi diberikan dalam Gambar 4.1.



Gambar 4.1: Grafik fungsi (a). $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \neq 2, g(2) = 1$, dan (b). $f(x) = x + 2$,

Pada Gambar 4.1 (a), grafik fungsi f berupa garis lurus yang tidak terputus. Sedangkan pada Gambar 4.1 (b) grafik fungsi g berupa garis lurus yang terputus di titik $x = 2$. Keadaan seperti ini dikatakan bahwa f **kontinu** di $x = 2$ dan g dikatakan **diskontinu** atau **tidak kontinu** di $x = 2$. Berkenaan dengan itu, diberikan definisi fungsi kontinu di suatu titik.

Definisi 4.1. *Fungsi f dikatakan* **kontinu** *di $x = c$ jika dan hanya jika ketiga kondisi berikut terpenuhi:*

(i). *$f(c)$ ada, yakni $f(x)$ terdefinisi di titik $x = c$;*

(ii). *$\lim_{x\to c} f(x)$ ada, yakni $\lim_{x\to c} f(x) \in \mathbb{R}$;*

(iii). *$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.*

Pada Definisi 4.1, jika salah satu dari ketiga syarat tidak dipenuhi maka fungsi f dikatakan **tidak kontinu** atau **diskontinu** di $x = c$. Jadi syarat perlu suatu fungsi kontinu di titik $x = c$ adalah fungsi tersebut harus terdefinisi di titik $x = c$.

Contoh 4.2. *Diberikan fungsi*

$$h(x) = \begin{cases} 2 + x & , x \leq 1 \\ 2 - x & , x > 1 \end{cases}$$

Periksa, apakah h kontinu di $x = 1$.

Penyelesaian:
Cukup jelas, $h(1) = 2 + 1 = 3$ ada.
Selanjutnya akan diperiksa limit h di $x = 1$.
Untuk limit kiri: $\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-}(2 + x) = 2 + 1 = 3$.
Untuk limit kanan: $\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+}(2 - x) = 2 - 1 = 1$.
Karena limit kiri tidak sama dengan limit kanan, maka h tidak memiliki limit di $x = 1$. Karena syarat kedua dalam Definisi 4.1 tidak dipenuhi, disimpulkan h tidak kontinu di $x = 1$. □

Sekarang kembali lagi ke fungsi g seperti yang diberikan di awal subbab ini, yang didefinisikan

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$$

Telah ditunjukkan bahwa fungsi g diskontinu (tidak kontinu) di $x = 2$. Seandainya, di titik $x = 2$ fungsi g didefinisikan $g(2) = 4$, maka g kontinu di $x = 2$. Jenis titik diskontinu seperti ini disebut **diskontinu yang dapat dihapus** (*removable discontinuity*). Fungsi h yang diberikan dalam Contoh 4.2 diskontinu di $x = 1$, meskipun di titik $x = 1$ didefinisikan suatu nilai berapapun, tetap saja fungsi h tidak kontinu di titik $x = 1$. Jenis diskontinu fungsi h seperti ini disebut **diskontinu esensial** (*essential discontinuity*).

Berikut satu teorema yang berkenaan dengan kekontinuan fungsi di suatu titik.

Teorema 4.3. *Diberikan fungsi f dan g, dan bilangan $k \in \mathbb{R}$. Jika f dan g kontinu di titik c, maka fungsi*

(i). kf;

(ii). $f + g$;

(iii). $f \cdot g$;

(iv). f/g, *asalkan* $g(c) \neq 0$;

(v). $\sqrt[n]{f}$, *asalkan* $f(c) > 0$ *dan* n *bilangan asli;*

(vi). $|f|$;

kontinu di titik c.

Bukti. Akan dibuktikan butir (ii) saja, selainnya dapat digunakan sebagai latihan.
Karena f dan g kontinu di $x = c$, maka dari Definisi 4.1 diperoleh

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \tag{4.1}$$

dan

$$\lim_{x\to c} g(x) = g(c) \tag{4.2}$$

Dari persamaan-persamaan (4.1) dan (4.2) dan Teorema 3.8, maka diperoleh

$$\lim_{x\to c} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = f(c) + g(c). \qquad \square$$

Operasi komposisi fungsi akan mempertahankan kekontinuan, seperti diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.4. *Jika g kontinu di titik c dan f kontinu di $g(c)$, maka fungsi komposisi $f \circ g$ kontinu di titik c.*

Contoh 4.5. *Periksa, apakah fungsi $h(x) = \sin(x^2)$ kontinu pada $\mathbb{R}$?*

Penyelesaian:
Definisikan fungsi f dan g pada $\mathbb{R}$, dengan

$$g(x) = x^2 \qquad \text{dan} \qquad f(x) = \sin x$$

Karena g fungsi polinomial yang kontinu pada $\mathbb{R}$, dan f juga fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$, maka $h(x) = (f \circ g)(x) = \sin(x^2)$ kontinu pada $\mathbb{R}$. $\square$

Definisi 4.6. *Fungsi f dikatakan* **kontinu pada selang buka** (a, b) *jika f kontinu di setiap titik $x \in (a, b)$.*

4.2 Kontinu Kanan dan Kontinu Kiri

Sama halnya dengan pengertian limit dikenal istilah limit kiri dan limit kanan, dalam kekontinuan fungsi juga dikenal istilah kontinu kiri dan kontinu kanan.

Definisi 4.7. (a). *Fungsi f dikatakan* **kontinu kanan** *di $x = c$ jika dan hanya jika ketiga kondisi berikut terpenuhi:*

(i). *$f(c)$ ada, yakni f terdefinisi di titik $x = c$;*

(ii). $\lim_{x \to c^+} f(x)$ *ada ;*

(iii). $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$.

(b). *Fungsi f dikatakan* **kontinu kiri** *di $x = c$ jika dan hanya jika ketiga kondisi berikut terpenuhi:*

(i'). *$f(c)$ ada, yakni f terdefinisi di titik $x = c$;*

(ii'). $\lim_{x \to c^-} f(x)$ *ada ;*

(iii'). $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$.

Suatu fungsi yang tidak kontinu kanan di $x = c$ belum tentu fungsi tersebut kontinu kiri di $x = c$, begitu juga sebaliknya. Sebagai contoh fungsi $f(x) = sign(x)$ di $x = 0$ tidak kontinu kanan juga tidak kontinu kiri. Bisa juga terjadi, suatu fungsi tidak kontinu kiri di $x = c$ tetapi kontinu kanan di $x = c$. Sebagai contoh fungsi $g(x) = [[x]]$ kontinu kanan di $x = 0$ tetapi tidak kontinu kiri di $x = 0$. Jika suatu fungsi kontinu kiri di $x = c$ dan sekaligus kontinu kanan di $x = c$ maka ia kontinu di $x = c$ dan juga sebaliknya, seperti dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 4.8. *Fungsi f kontinu kiri di $x = c$ dan sekaligus kontinu kanan di $x = c$ jika dan hanya jika f kontinu di $x = c$.*

Definisi 4.9. *Fungsi f dikatakan* **kontinu pada selang tutup** $[a, b]$ *jika f kontinu pada (a, b), kontinu kanan di a, dan kontinu kiri di b.*

Contoh 4.10. *Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$ kontinu pada selang $[-2, 2]$.*

Penyelesaian:
Jika $-2 < c < 2$, berdasarkan aturan limit, diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} (2 - \sqrt{4 - x^2}) \\ &= 2 - \sqrt{\lim_{x \to c} (4 - x^2)} \\ &= 2 - \sqrt{4 - c^2} \\ &= f(c) \end{aligned}$$

Jadi, f kontinu pada selang $(-2, 2)$.
Selanjutnya, karena

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 2 = f(-2) \qquad \text{dan} \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 = f(2)$$

ini menunjukkan f kontinu di titik $x = \pm 1$. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa f kontinu pada selang $[-2, 2]$. □

Teorema 4.11. *Setiap polinomial kontinu dimana-mana, yakni setiap polinomial kontinu pada $\mathbb{R}$.*

Bukti. Diambil sebarang polinomial p dalam bentuk

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dengan $a_0, a_1, \cdots, a_n$ konstanta-konstanta.
Diperhatikan bahwa

$$\lim_{x \to c} a_0 = a_0$$

dan

$$\lim_{x \to c} a_m x^m = a_m c^m \qquad \text{untuk} \qquad m = 1, 2, \cdots, n$$

Persamaan terakhir di atas menyatakan bahwa fungsi $f(x) = x^m$ kontinu. Oleh karena itu, fungsi $g(x) = ax^m$ juga kontinu. Karena p merupakan jumlahan berhingga fungsi-fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$, maka p juga kontinu pada $\mathbb{R}$. □

Teorema 4.12. *Setiap fungsi rasional kontinu pada domainnya.*

Bukti. Fungsi rasional f adalah fungsi dalam bentuk

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

dengan p dan q polinomial. Domain f adalah $D_f = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$. Karena polinomial kontinu pada $\mathbb{R}$, maka fungsi rasional f kontinu pada D_f. □

Contoh 4.13. *Hitung*

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 + 2x + 1}{3 - x}$$

Penyelesaian:
Fungsi

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x + 1}{3 - x}$$

merupakan fungsi rasional. Berdasarkan Teorema 4.12, maka f kontinu pada $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 3\}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1} \frac{2x^3 + 2x + 1}{3 - x} &= \lim_{x \to -1} f(x) \\ &= f(-1) \\ &= \frac{2(-1)^3 + 2(-1) + 1}{3 - (-1)} \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$ □

4.3 Rangkuman

1. Fungsi f dikatakan kontinu di $x = c$ jika
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

2. (a) Fungsi f dikatakan kontinu kanan di $x = c$ jika
$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c).$$
   (b) Fungsi f dikatakan kontinu kiri di $x = c$ jika
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c).$$

3. Diberikan fungsi f dan g, dan bilangan $k \in \mathbb{R}$. Jika f dan g kontinu di titik c, maka fungsi

   (i). kf; (ii). $f + g$; (iii). $f \cdot g$; (iv). $|f|$;
   (v). f/g, asalkan $g(c) \neq 0$; (vi). $\sqrt[n]{f}$, asalkan $f(c) > 0$ dan $n \in \mathbb{N}$;

   kontinu di titik c.

4. Fungsi f kontinu kiri di $x = c$ dan sekaligus kontinu kanan di $x = c$ jika dan hanya jika f kontinu di $x = c$.

5. Fungsi polinomial kontinu pada $\mathbb{R}$.

6. Fungsi rasional kontinu pada domainnya.

4.4 Bahan Diskusi

1. Carilah fungsi f dan g yang keduanya tidak kontinu di $x = c$ tetapi fungsi $f + g$ kontinu di $x = c$.

2. Carilah fungsi f dan g yang keduanya tidak kontinu di $x = c$ tetapi fungsi $f \cdot g$ kontinu di $x = c$.

3. Bisakah Anda mencari fungsi f dan g, dengan g tidak kontinu di $x = 1$ dan f tidak kontinu di titik $g(1)$ tetapi $f \circ g$ kontinu di $x = 1$.

4.5 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Varberg, D., Purcell, E., and Rigdon, S., 2015, *Calculus*, 9th, Wiley Publishing
2. Stewart, J., 2016, *Calculus: Early Transcendentals*, 8th, Belmont: Thomson Higher Education
3. Leithold, L.1996.*The Calculus with Geometry Analytic.* 7th, Boston: Addison-Wesley
4. Apostol, T.M., 2010. *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, New York: John Wiley & Sons

4.6 Latihan Soal-soal

1. Dari fungsi-fungsi yang diberikan berikut, sketsakan grafiknya dan tentukan semua titik x dimana fungsi tidak kontinu di titik tersebut.

   a.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$$

   b.

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x & , x \leq -2 \\ 2 - x & , x = -2 \\ 2x - 1 & , x > -2 \end{cases}$$

2. Buktikan bahwa fungsi f yang didefinisikan

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$$

   diskontinu di $x = 0$. Kemudian, tentukan jenis kediskontinuannya di titik $x = 0$ tersebut.

3. Diberikan fungsi f yang didefinisikan

$$f(x) = [[1 - 2x]]$$

   Tentukan, jika ada, semua nilai x dimana f diskontinu.

4. Diberikan fungsi h yang didefinisikan

$$h(x) = \begin{cases} |x| - [[x]] & , [[x]] \text{ genap} \\ |x| - [[x+1]] & , [[x]] \text{ ganjil} \end{cases}$$

   Tentukan semua nilai x dimana h diskontinu.

5. Tentukan nilai c sehingga fungsi f yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & , x < 2 \\ x^3 - cx & , x \geq 2 \end{cases}$$

   kontinu pada $\mathbb{R}$.

6. Tentukan nilai a dan b sehingga fungsi f yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & , 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & , x \geq 3 \end{cases}$$

   kontinu dimana-mana

7. Sketsakan grafik fungsi f yang memenuhi semua persyaratan berikut:

   (a). Domainnya adalah $[-2, 2]$,

   (b). $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$,

   (c). Diskontinu di titik $x = -1$ dan $x = 1$,

   (d). Kontinu kanan di $x = -1$ dan kontinu kiri di $x = 1$.

8. Manakah dari fungsi-fungsi berikut yang memiliki titik diskontinu $x = c$ dapat dihapus? Jika kediskontinuannya dapat dihapus, definisikan nilai fungsi tersebut di titik diskontinu $x = c$ sedemikian hingga fungsi menjadi kontinu di titik tersebut.

   (a). $f(x) = \frac{x^4-1}{x-1}, c = 1$

   (b). $g(x) = \frac{x^3-x^2-2x}{x-2}, c = 2$

   (c). $h(x) = [[\sin x]], c = \pi$

Bab 5

Turunan

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami pengertian dan konsep turunan fungsi;
2. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
3. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

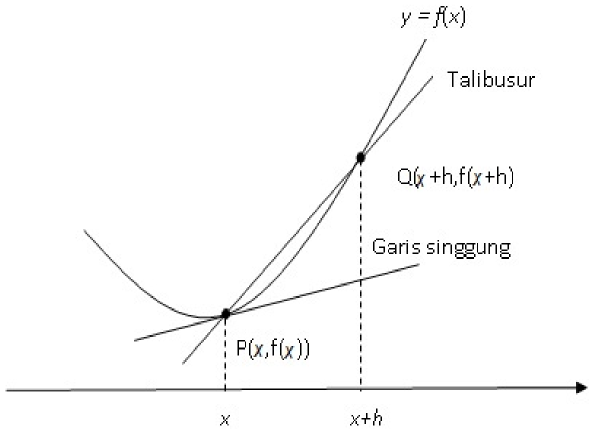
Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menentukan persamaan garis singgung kurva di suatu titik;
2. mencari turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan;
3. menggunakan aturan rantai untuk mencari turunan;
4. mencari turunan fungsi trigonometri umum, fungsi eksponensial, dan fungsi logaritma;
5. mencari turunan tingkat tinggi suatu fungsi;
6. mencari turunan fungsi implisit;

5.1 Garis Singgung

Diberikan fungsi kontinu f dimana grafik kurvanya dinyatakan dengan $y = f(x)$. Misalkan P adalah suatu titik tetap pada kurva y dan misalkan Q adalah titik di dekat P yang dapat digerak-gerakkan pada kurva. Garis yang melalui titik P dan Q disebut **talibusur** (lihat Gambar 5.1). Jika $P = P(x, f(x))$ dan $Q = Q(x + h, f(x + h))$ (anggap $h \neq 0$), maka kemiringan talibusur PQ atau garis yang menghubungkan titik P dan Q, dinyatakan dengan m_{PQ}, adalah

$$m_{PQ} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Gambar 5.1: Garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik P

Jika titik Q bergerak mendekati P sedemikian hingga h cukup kecil mendekati 0, ditulis $h \to 0$, maka garis yang melalui titik P dan Q itu berubah menjadi garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik P (Gambar 5.1).

Definisi 5.1. *Diberikan fungsi f yang kontinu di titik $x = x_0$.* **Garis singgung** *kurva f di titik $P(x_0, f(x_0))$ adalah garis lurus yang melalui titik P dengan kemiringan (slope) m, dengan*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

asalkan limitnya ada. Jika $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$, *maka garis singgung di titik* P *adalah garis* $x = x_0$.

Contoh 5.2. *Carilah persamaan garis singgung kurva* $y = f(x) = x^2$ *di* $x = 2$.

Penyelesaian:
Kemiringan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2$ di $x = 2$ adalah

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 4+h \\ &= 4. \end{aligned}$$

Oleh karena itu diperoleh persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ melewati titik $(2, 4)$ adalah

$$y - 4 = m(x-2) = 4(x-2) \qquad \text{atau} \qquad y = 4x - 4. \qquad \square$$

5.2 Turunan Fungsi

Definisi 5.3. *Turunan (derivatif) fungsi* f *di titik* c, *ditulis* $f'(c)$, *adalah*

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \tag{5.1}$$

asalkan limitnya ada.

Penulisan lain dari persamaan (5.1) adalah

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \tag{5.2}$$

asalkan limitnya ada.

Jika dalam persamaan (5.1) konstanta c diganti dengan variabel x, maka diperoleh

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{5.3}$$

Contoh 5.4. *Diberikan* $f(x) = 13x - 6$. *Carilah* $f'(4)$.

Penyelesaian: Jika menggunakan persamaan (5.1), diperoleh

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(13(4+h) - 6) - (13 \cdot 4 - 6)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{13h}{h} = 13. \end{aligned}$$

Jika menggunakan persamaan (5.2), diperoleh

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x\to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{(13x - 6) - 46}{x - 4} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{13(x-4)}{x - 4} = 13. \end{aligned}$$

□

Contoh 5.5. *Jika* $f(x) = x^3 - 2x$, *tentukan*

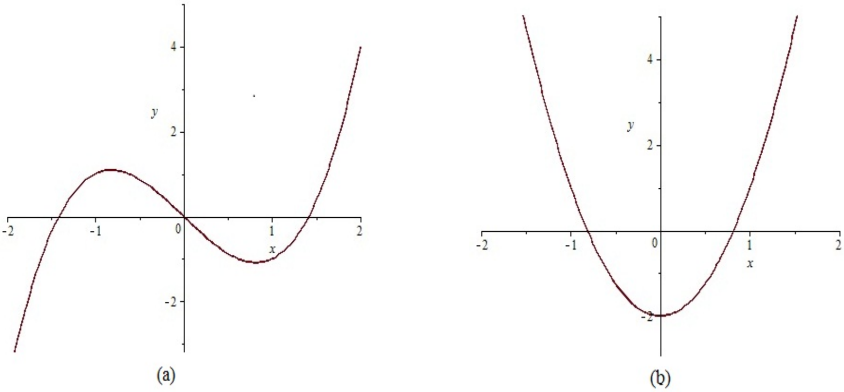
(a). Rumus untuk $f'(x)$

(b). Ilustrasikan f *dan* f' *dengan membandingkan grafiknya.*

Penyelesaian:
(a). Dengan menggunakan persamaan (5.3), diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^3 - 2(x+h)] - [x^3 - 2x]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x - 2h - x^3 + 2x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 2) \\ &= 3x^2 - 2 \end{aligned}$$

(b). Grafik $f(x) = x^3 - 2x$ dan $f'(x) = 3x^2 - 2$ diberikan dalam Gambar 5.2.



Gambar 5.2: Grafik (a) $f(x) = x^3 - 2x$ dan (b) $f'(x) = 3x^2 - 2$

Pada ruas kanan persamaan (5.1) atau persamaan (5.2), jika limitnya ada maka f dikatakan **diferensiabel** atau **dapat diturunkan** di titik c. Jika limitnya tidak ada maka f dikatakan **tidak diferensiabel** atau **tidak dapat diturunkan** di titik c.

Contoh 5.6. *Buktikan bahwa* $f(x) = |x|$ *tidak diferensiabel di titik* $x = 0$.

Penyelesaian:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Limit ini tidak ada karena

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

dan

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Jadi f tidak diferensiabel di titik 0. $\square$

Jika dituliskan $y = f(x)$, ini menunjukkan bahwa x merupakan variabel bebas dan y variabel terikat. Untuk itu, beberapa notasi lain sebagai alternatif penulisan dari turunan $y = f(x)$ adalah

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

Notasi D dan d/dx disebut **operator diferensial**. Notasi dy/dx dikenalkan oleh Gottfried Wilhelm Leibniz seorang matematikawan asal Perancis.

Telah diketahui bahwa fungsi $f(x) = |x|$ merupakan fungsi kontinu di setiap x. Pada Contoh 5.6 telah ditunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ tidak diferensiabel di $x = 0$. Dari hasil tersebut menunjukkan bahwa fungsi yang kontinu di suatu titik belum menjamin diferensiabel di titik tersebut. Namun sebaliknya, suatu fungsi yang diferensiabel di suatu titik, maka fungsi tersebut kontinu di titik tersebut seperti dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 5.7. *Jika f diferensiabel di $x = c$, maka f kontinu di $x = c$.*

Bukti. Untuk membuktikan f kontinu di $x = c$ harus ditunjukkan bahwa syarat-syarat pada Definisi 4.1 terpenuhi oleh f.
Karena f diferensiabel di $x = c$, maka $f'(c)$ ada, sehingga diperoleh hubungan

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{5.4}$$

Dari persamaan (5.4), disimpulkan $f(c)$ ada.
Selanjutnya, pandang bahwa

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} \big(f(x) - f(c)\big) &= \lim_{x \to c} \Big((x - c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\Big) \\ &= \lim_{x \to c} (x - c) \cdot \lim_{x \to c} \Big(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\Big) \\ &= 0 \cdot f'(c) = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Dari persamaan (5.5), diperoleh

$$\lim_{x \to c} f(x) - f(c) = \lim_{x \to c} \big(f(x) - f(c)\big) = 0.$$

Jadi disimpulkan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. □

Ruas kanan pada persamaan (5.1) jika tidak memiliki limit, bisa jadi dikarenakan limit kiri dan limit kanannya tidak sama, yakni

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

Untuk hal itu, akan dikenalkan istilah turunan kanan dan turunan kiri.

Definisi 5.8. *Diberikan fungsi f yang terdefinisi di $x = c$.*
(a). **Turunan kanan** *fungsi f di $x = c$, ditulis $f'_+(c)$, adalah*

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

atau ekivalen dengan

$$f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

asalkan limitnya ada. Jika limitnya tidak ada maka dikatakan f **tidak memiliki turunan kanan** *di $x = c$.*

(b). **Turunan kiri** *fungsi f di $x = c$, ditulis $f'_-(c)$, adalah*

$$f'_-(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

atau ekivalen dengan

$$f'_-(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

asalkan limitnya ada. Jika limitnya tidak ada maka dikatakan f **tidak memiliki turunan kiri** *di $x = c$.*

Teorema 5.9. *Fungsi f memiliki turunan di $x = c$ jika dan hanya jika $f'_-(c) = f'_+(c) \in \mathbb{R}$. Lebih jauh,*

$$f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c).$$

Contoh 5.10. *Diberikan fungsi f yang didefinisikan*

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 2x - 2 & , x < 0 \\ 7 - x & , x \geq 0 \end{cases}$$

(a). *Tentukan $f'_-(0)$ dan $f'_+(0)$ jika ada.*

(b). *Apakah f diferensiabel (dapat diturunkan) di $x = 0$?*

Penyelesaian:
(a). Untuk $h < 0$, maka

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{(2h-2) - 7}{h} = 2 - \frac{9}{h}$$

tidak memiliki limit kiri di $x = 0$. Jadi, f tidak memiliki turunan kiri di $x = 0$.
Untuk $h > 0$, dari definisi turunan kanan, diperoleh

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(7-h) - 7}{h} = -1$$

(b). Karena f tidak memiliki turunan kiri di $x = 0$, disimpulkan f tidak dapat diturunkan di $x = 0$. $\square$

5.3 Aturan Pencarian Turunan

Teorema 5.11. *Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan asli, maka $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Bukti.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i\right) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{2} + \cdots + nxh^{n-1} + h^n) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}h}{2} + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}) = nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Catatan: $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. $\square$

Teorema 5.12. *Jika f dan g diferensiabel di setiap x, maka*

(i). $(kf)'(x) = kf'(x)$ *untuk sebarang* $k \in \mathbb{R}$,

(ii). $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(iii). $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(iv). $(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$ *asalkan* $g(x) \neq 0$.

Bukti. Karena f diferensiabel di x, maka berlaku

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(i). Oleh karena itu untuk setiap $k \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$\begin{aligned}
(kf)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} \\
&= k \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= kf'(x)
\end{aligned}$$

(ii). Karena g diferensiabel di x, maka berlaku

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Oleh karena itu untuk setiap x, diperoleh

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

(iii). Sesuai definisi turunan, diperoleh

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) + \lim_{h\to 0} \left(g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&\quad + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)
\end{aligned}$$

Bukti (iv) digunakan sebagai bahan diskusi. □

Teorema 5.12, khususnya (ii) dan (iii), dapat diperumum menjadi teorema berikut.

Teorema 5.13. *Jika* $f_i, i = 1, 2, \cdots, n$ *diferensiabel di setiap* x*, maka*

(i). $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x)$

(ii).
$$(f_1 f_2 \cdots f_n)'(x) = f_1'(x)f_2(x)f_3(x)\cdots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)f_3(x)\cdots f_n'(x)$$

Contoh 5.14. *Diberikan* $f(x) = 3x^8 - 5x^2 + x - 7$*, tentukan* $f'(x)$*.*

Penyelesaian:
Dengan menggunakan Teorema 5.11 dan Teorema 5.13 (i), diperoleh (dengan menggunakan notasi $D_x f(x)$):

$$\begin{aligned} D_x f(x) &= D_x[3x^8 - 5x^2 + x - 7] \\ &= D_x[3x^8] + D_x[-5x^2] + D_x[x] + D_x[-7] \\ &= 3D_x[x^8] - 5D_x[x^2] + D_x[x] - D_x[7] \\ &= 3 \cdot 8x^7 - 5 \cdot 2x + 1 - 0 \\ &= 24x^7 - 10x + 1. \end{aligned}$$

Definisi 5.15. *Diberikan fungsi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*.*

(a). Fungsi f *dikatakan* **diferensiabel pada selang buka** (a, b) *jika* f *diferensiabel di setiap titik* $x \in (a, b)$*.*

(b). Fungsi f *dikatakan* **diferensiabel pada selang tutup** $[a, b]$ *jika* f *diferensiabel pada selang buka* (a, b)*,* $f_+'(a)$ *ada dan* $f_-'(b)$ *ada.*

5.4 Turunan Fungsi Trigonometri

Pada bagian ini dibahas turunan fungsi trigonometri umum yang meliputi: fungsi sinus, cosinus, dan tangen. Pertama, dibahas turunan fungsi sinus.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(-\sin x\frac{1-\cos h}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= -\sin x\left(\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\right)+\cos x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= -\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x
\end{aligned}$$

Selanjutnya, turunan fungsi cosinus.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(-\cos x\frac{1-\cos h}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= -\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1=-\sin x
\end{aligned}$$

Sedangkan, turunan fungsi tangen diperoleh dari turunan fungsi sinus dan cosinus serta menggunakan Teorema 5.12 (iv).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{\cos x(\cos x)-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

Contoh 5.16. *Jika* $f(x)=2\sin x-3\tan x$, *carilah* $f'(x)$.

Penyelesaian:

$$f'(x)=2\cos x-\frac{3}{\cos^2 x}. \qquad \square$$

5.5 Turunan Fungsi Eksponensial

Diberikan bilangan $a > 0$ dan fungsi $f(x) = a^x$. Dengan menggunakan definisi turunan, diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \end{aligned}$$

Karena faktor a^x tidak bergantung pada h, maka diperoleh

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x f'(0)$$

Dari hasil ini menunjukkan bahwa jika fungsi eksponensial $f(x) = a^x$ diferensiabel di 0, maka f diferensiabel dimana-mana dan

$$f'(x) = f'(0)a^x$$

Nilai-nilai $f'(0)$ untuk beberapa kasus nilai a, diperoleh

$$\text{Untuk } a = 2, \qquad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0,69$$

$$\text{Untuk } a = 3, \qquad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1,10$$

$$\text{Untuk } a = e \ (e \approx 2,82), \qquad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h} = 1$$

Dari hasil ini, disimpulkan jika $f(x) = e^x$, maka $f'(x) = e^x$.

Contoh 5.17. *Tentukan nilai x sehingga kurva $y = e^x$ mempunyai garis singgung yang sejajar dengan garis $y = 2x$.*

Penyelesaian:
Karena $y = e^x$, diperoleh $y' = e^x$. Karena garis $y = 2x$ mempunyai kemiringan 2, maka garis singgung kurva $y = e^x$ yang sejajar dengan garis $y = 2x$ memenuhi persamaan

$$e^x = 2$$

dan nilai x yang memenuhi adalah $x = \ln 2$. □

5.6 Aturan Rantai

Mungkin suatu saat dihadapkan mencari turunan seperti

$$f(x) = (7x + 2)^{55}$$

Tentu perlu waktu yang lama jika harus merubah dalam bentuk polinom $f(x) = a_{55}x^{55} + a_{54}x^{54} + \cdot + a_1 x + a_0$ kemudian menurunkan polinom tersebut. Ada suatu cara ringkas mencari turunan seperti fungsi f tersebut, yang dikenal dengan nama **aturan rantai** seperti diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 5.18. *Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposisi $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Jika g diferensiabel di x dan f diferensiabel di $u = g(x)$, maka $f \circ g$ diferensiabel di x dan*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Dengan menggunakan Teorema 5.18, maka untuk mencari turunan fungsi $f(x) = (7x+2)^{55}$ dapat dimisalkan $u = 7x+2$ sehingga diperoleh $f = u^{55}$. Karena u diferensiabel di x dan f diferensiabel di u, diperoleh

$$f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 55u^{54} \cdot 7 = 385u^{54} = 385(7x + 2)^{54}$$

Contoh 5.19. *Diberikan $f(x) = \left(\frac{4x-1}{x-2}\right)^7, x \neq 2$. Hitunglah $f'(x)$.*

Penyelesaian:
Dengan menggunakan aturan rantai dan Teorema 5.12 (iv), diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= 7\Big(\frac{4x-1}{x-2}\Big)^6 \Big(\frac{4(x-2)-(4x-1)}{(x-2)^2}\Big) \\ &= 7\Big(\frac{4x-1}{x-2}\Big)^6 \Big(\frac{-7}{(x-2)^2}\Big) \\ &= -49\Big(\frac{4x-1}{x-2}\Big)^6 \frac{1}{(x-2)^2} \end{aligned} \qquad \square$$

Contoh 5.20. *Carilah turunan dari fungsi $y = \sin^4 3x$.*

Penyelesaian:
Misalkan $y = u^4$, $\quad u = \sin v \quad$ dan $\quad v = 3x$,

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \\
&= 4u^3 \cdot \cos v \cdot 3 \\
&= 12 \sin^3 3x \cos 3x. \qquad \square
\end{aligned}$$

5.7 Turunan Tingkat Tinggi

Turunan dari fungsi f adalah fungsi baru, seperti sebelumnya sebut saja f'. Jika f' diturunkan lagi, bila mugkin, menghasilkan fungsi baru, sebut saja f''. Fungsi f' disebut **turunan pertama** dari fungsi f dan fungsi f'' disebut **turunan kedua** dari fungsi f. Selanjutnya, jika masih memungkinkan f'' diturunkan lagi maka menghasilkan **turunan ketiga** dari fungsi f, dinotasikan f''', dan seterusnya. Turunan kedua, ketiga dan seterusnya dari fungsi f disebut **turunan tingkat tinggi** dari fungsi f. Sebagai contoh, jika

$$f(x) = 4x^3 + x^2 - 7x + 2,$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 12x^2 + 2x - 7 \\
f''(x) &= 24x + 2 \\
f'''(x) &= 24 \\
f^{iv}(x) &= 0
\end{aligned}$$

Kemudian, karena turunan dari fungsi nol adalah nol, maka turunan kelima, keenam, dan seterusnya yang lebih tinggi akan nol.

Di sini akan diperkenalkan notasi-notasi untuk turunan tingkat tinggi. Sebelum itu disampaikan terlebih dahulu notasi turunan pertama dari $y = f(x)$, yakni $f'(x)$ dan $D_x y$, dan notasi $\frac{dy}{dx}$ yang dinamakan notasi **Leibniz**. Untuk turunan kedua, diperoleh notasi-notasi

$$f''(x) \qquad D_x^2 y \qquad \frac{d^2y}{dx^2}$$

dimana untuk notasi Leibniz turunan kedua diartikan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Notasi-notasi turunan selengkapnya diberikan dalam Tabel 5.1.

Tabel 5.1: Notasi Turunan Pertama dan Turunan Tingkat Tinggi

Turunan	Notasi f	Notasi y	Notasi D	Notasi Leibniz
Pertama	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Kedua	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Ketiga	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Keempat	$f^{iv}(x)$	y^{iv}	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
Kelima	$f^{(5)}(x)$	$y^{(5)}$	$D_x^5 y$	$\frac{d^5y}{dx^5}$
Keenam	$f^{(6)}(x)$	$y^{(6)}$	$D_x^6 y$	$\frac{d^6y}{dx^6}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Ke-n	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Contoh 5.21. *Jika $f(x) = x^3 - 2x$, tentukan $f''(x)$.*

Penyelesaian:
Pada Contoh 5.5 telah ditunjukkan bahwa $f'(x) = 3x^2 - 2$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 2] - [3x^2 - 2]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2 - 3x^2 + 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (6x + 3h) \\ &= 6x \qquad \square \end{aligned}$$

Contoh 5.22. *Jika $y = |x^2 - 1|$, carilah $\frac{d^2y}{dx^2}$.*

Penyelesaian:
Dari Contoh 5.6 telah diketahui bahwa $f(x) = |x|$ tidak diferensiabel di $x = 0$, oleh karena itu $y = |x^2 - 1|$ tidak diferensiabel di $x^2 - 1 = 0$ atau di $x = \pm 1$. Selain di $x = \pm 1$, y diferensiabel dengan

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 2x & , \ x < -1 \text{ atau } x > 1 \\ -2x & , \ -1 < x < 1 \end{cases}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \begin{cases} 2 & , \ x < -1 \text{ atau } x > 1 \\ -2 & , \ -1 < x < 1 \end{cases} \qquad \square$$

5.8 Turunan Fungsi Implisit

Misal y fungsi dari x yang didefinisikan

$$y = 4x^3 + 2x - 6$$

maka y dikatakan terdefinisi secara **eksplisit** dalam x, dapat dituliskan $y = f(x)$ dengan $f(x) = 4x^3 + 2x - 6$. Namun, tidak mesti suatu fungsi dapat dinyatakan secara eksplisit. Sebagai contoh, diberikan persamaan

$$y^3 + 7y = x^3 \tag{5.6}$$

Persamaan (5.6) tidak bisa dinyatakan secara eksplisit. Untuk kondisi seperti itu, dikatakan bahwa y terdefinisi secara **implisit**. Barangkali menjadi suatu pertanyaan dalam hati, mungkinkah bisa dicari $\frac{dy}{dx}$ dari bentuk implisit seperti contoh tersebut? Jawabannya adalah bisa, dengan cara mendiferensialkan kedua ruas persamaan (5.6) terhadap x dengan menganggap persamaan memang menentukan y sebagai fungsi dari x. Dengan menggunakan Aturan Rantai dan menurunkan kedua ruas persamaan (5.6) terhadap x, diperoleh

$$\begin{aligned} 3y^2\frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} &= 3x^2 \\ \frac{dy}{dx}\left(3y^2 + 7\right) &= 3x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2}{3y^2 + 7} \end{aligned}$$

Contoh 5.23. *Diberikan persamaan lengkungan $x^2 + y^2 = 25$. Tentukan persamaan garis singgung kurva yang melalui titik $P(-3, 4)$.*

Penyelesaian:
Dengan menurunkan kedua ruas persamaan lengkungan tersebut, diperoleh

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

sehingga didapatkan

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Di titik $(-3, 4)$, diperoleh gradien garis singgung

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_P = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

Jadi persamaan garis singgung lengkungan di titik $(-3, 4)$ adalah

$$y - 4 = \frac{3}{4}(x + 3) \qquad \text{atau} \qquad 4y - 3x = 25. \qquad \square$$

Contoh 5.24. *Diberikan persamaan* $x^3 + y^3 = 6xy$.

(a). Tentukan y'

(b). Tentukan persamaan garis singgung kurva y *di titik (3,3).*

Penyelesaian:
(a). Dengan mendiferensialkan kedua ruas terhadap x persamaan $x^3 + y^3 = 6xy$, diperoleh

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

atau

$$x^2 + 3y^2y' = 2xy' + 2y$$

Dengan menyelesaikan terhadap y' diperoleh

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

(b). Di $x = y = 3$, diperoleh

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

Jadi persamaan garis singgung kurva y di (3,3) adalah

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{atau} \qquad y = -x + 6$$

5.9 Turunan Fungsi Logaritma

Dalam subbab ini akan dibahas turunan fungsi logaritma dengan menggunakan turunan implisit.

Teorema 5.25. *Jika* $y = \log_a x$, *maka*

$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

Bukti.

$$y = \log_a x \qquad \Leftrightarrow \qquad a^y = x$$

Dengan menurunkan secara implisit $a^y = x$, diperoleh

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y(\ln a)} = \frac{1}{x \ln a}$$

$\square$

Contoh 5.26. *Jika* $y = \ln(x^2 + 1)$, *tentukan* y'

Penyelesaian:
Dengan menggunakan aturan rantai, misalkan $u = x^2 + 1$ maka diperoleh $y = \ln u$, sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{2x}{x^2+1} \qquad \square$$

5.10 Rangkuman

1. Turunan atau derivatif fungsi f di titik c, ditulis $f'(c)$, adalah
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$
atau
$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$
asalkan limit-limitnya ada.

2. Jika f diferensiabel di $x = c$, maka f kontinu di $x = c$.

3. Fungsi f memiliki turunan di $x = c$ jika dan hanya jika $f'_-(c) = f'_+(c) \in \mathbb{R}$.

4. Jika f dan g diferensiabel di setiap x, maka
   (i). $(kf)'(x) = kf'(x)$ untuk sebarang $k \in \mathbb{R}$,
   (ii). $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
   (iii). $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
   (iv). $(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$ asalkan $g(x) \neq 0$.

5. jika $f(x) = e^x$, maka $f'(x) = e^x$.

6. Jika $y = \log_a x$, maka
$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

5.11 Bahan Diskusi

1. Perlihatkan bahwa hiperbola-hiperbola $xy = 1$ dan $x^2 - y^2 = 1$ berpotongan saling tegak lurus.
2. Tentukan bentuk $\frac{dy}{dx}$ dari $|x|y + 3x^2 = 1$
3. Buktikan Teorema 5.12 (iv).
4. Gunakan definisi turunan untuk membuktikan bahwa
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

5.12 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Varberg, D., Purcell, E., and Rigdon, S., 2015, *Calculus*, 9th, Wiley Publishing
2. Stewart, J., 2016, *Calculus: Early Transcendentals*, 8th, Belmont: Thomson Higher Education
3. Leithold, L.1996.*The Calculus with Geometry Analytic.* 7th, Boston: Addison-Wesley
4. Apostol, T.M., 2010. *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, New York: John Wiley & Sons

5.13 Latihan Soal-soal

1. Tentukan kemiringan (*slope*) kurva $y = x - x^2$ dengan menggunakan Definisi 5.1.
2. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = \frac{1}{x+1}$ di titik $(1, \frac{1}{2})$.
3. Tentukan persamaan garis normal kurva $y = \sqrt{9 - 4x}$ di titik $(-4, 5)$. (*Catatan*: **garis normal** adalah garis yang tegak lurus dengan garis singgung).
4. Carilah $g'(1)$ jika ada atau nyatakan tidak ada dari fungsi
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ x & , x > 1 \end{cases}$$

5. Diberikan fungsi f yang didefinisikan $f(x) = |x - 3|$.

   (a). Tentukan $f'_-(3)$ dan $f'_+(3)$ jika ada.

   (b). Apakah f diferensiabel (dapat diturunkan) di $x = 3$?

6. Carilah $f'(0)$ (jika ada) dari fungsi-fungsi berikut

   (a) $f(x) = |x - 1|$

   (b) $f(x) = sign(x)$

   (c) $f(x) = sign(x - 1)$

   (d) $f(x) = [[x]]$

   (e) $f(x) = [[x - \frac{1}{2}]]$

7. Hitunglah turunan dari fungsi-fungsi berikut:

   (a). $f(x) = 11x^4 - 3x + 17$

   (b). $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

   (c). $h(x) = |x - 1|$

8. Diberikan fungsi f dan g pada $\mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x \leq 0 \\ x - 1 & , x > 0 \end{cases}$$

   dan

$$g(x) = \begin{cases} -x & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

   Tentukan turunan dari fungsi:
   (a). $f + g$ (b). $f \cdot g$ (c). f/g.

9. Tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut:

   (a) $F(x) = \frac{(x^2-3)^4}{(x^2+1)^3}$

   (b) $G(x) = (3x - 7)^4(x^3 - 2x + 3)^3$

   (c) $H(x) = \frac{(3x-1)^3(2x^3+2)^4}{(5x^2+2)^2}$

   (d) $K(x) = |2x - 1|^5$

10. Diberikan

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

    (a) Tentukan $f'(x)$ untuk $x \neq 0$
    (b) Carilah $f'(0)$ dengan menggunakan definisi turunan
    (c) Buktikan bahwa $f'(x)$ tidak kontinu di $x = 0$.

11. Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$ jika

    (a) $y = (2x^2 - 7)^{27}$
    (b) $y = |2x - 1|^5$
    (c) $y = [[x^2]]$
    (d) $y = sign(x^2 - 1)$
    (e) $y = sign|x^2 - 1|$
    (f) $y = \sin^4(x^5 + 2x)$
    (g) $y = \cos(\cos 3x)$

12. Diberikan $f(x) = x^3$ dan $g(x) = f(x^2)$. Tentukan:
    (a). $f'(x^2)$ (b). $g'(x)$.

13. Diberikan $f(x) = x^2 + 5x + 5$ dan

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

    Tentukan turunan $f \circ g$ dengan dua cara:
    (a). Tentukan dahulu rumus $(f \circ g)(x)$, lalu turunkan
    (b). Dengan aturan rantai.

14. Diberikan fungsi f dan g pada $\mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , x \leq 0 \\ x - 2 & , x > 0 \end{cases}$$

    dan

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$$

    Tentukan turunan dari fungsi:
    (a). $f \circ g$ (b). $g \circ f$

15. Carilah $\frac{dy}{dx}$ dari persamaan-persamaan berikut:

    (a) $xy = 2$

    (b) $x^3 - 3xy^2 + 12xy = 0$

    (c) $\frac{x^3}{y^2} - 2 = \sqrt{y}$

16. Carilah persamaan garis singgung kurva $x^2y^2 + 3xy = 10y$ di titik $(2, 1)$.

17. Dimanakah garis singgung kurva $y = x^2 \cos^2 x^2$ di $x = \sqrt{\pi}$ akan memotong sumbu x?

18. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika

    (a). $y = \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

    (b). $y = \ln (\sin x)$

    (c). $y = \ln (x^2 + y^2)$

    (d). $y = \frac{\ln x}{x^2}$

    (e). $y = \ln (1 + e^{2x})$

19. Tentukan rumus $f^{(n)}(x)$ jika $f(x) = \ln (x - 1)$

20. Tentukan y' jika $x^y = y^x$.

Bab 6

Penggunaan Turunan

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. mampu mengaplikasikan turunan untuk menyelesaikan permasalahan optimasi dalam kehidupan sehari-hari;
2. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
3. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

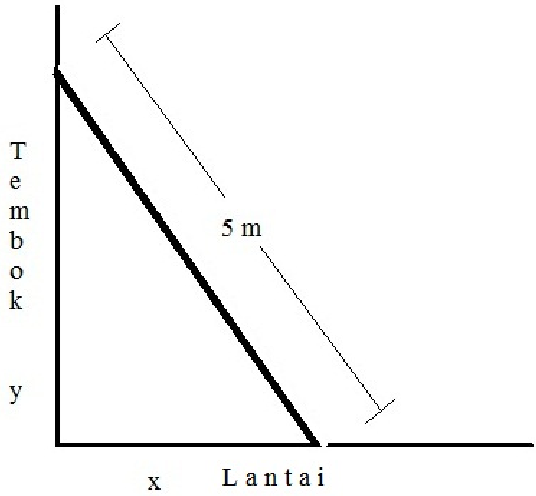
Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menentukan titik-titik kritis fungsi;
2. menentukan maksimum dan minimum nilai fungsi;
3. menggambar grafik dengan memanfaatkan turunan untuk mengetahui dimana grafik naik, dimana grafik turun, dimana grafik cekung ke atas, dan dimana grafik cekung ke bawah.

6.1 Laju yang Berkaitan

Banyak permasalahan yang berhubungan kecepatan perubahan dari dua atau lebih besaran yang bergantung waktu. Sebagai contoh, diberikan pada contoh kasus berikut.

Contoh 6.1. *Sebuah tangga lurus yang panjangnya 5 m disandarkan pada dinding tembok yang mana temboknya tegak lurus dengan lantai (lihat Gambar 6.1). Jika kaki tangga bergeser menjauhi tembok dengan kecepatan 1 m/dt, tentukan berapa kecepatan puncak tangga menggeser sepanjang dinding tembok pada saat kaki tangga berjarak 3 m dari tembok.*



Gambar 6.1: Ilustrasi untuk Contoh 6.1

Penyelesaian:
Misalkan
$t =$ menyatakan waktu (detik), dihitung sejak tangga mulai bergeser.
$y =$ jarak (meter) puncak tangga ke tanah, setelah bergeser selama t detik.
$x =$ jarak (meter) kaki tangga ke tembok, setelah bergeser selama t detik.
Karena y dan x bergantung pada t, maka dapat dituliskan $y = y(t)$ dan $x = x(t)$.

Karena kaki tangga bergeser mendatar menjauhi tembok sebesar 1 m/dt, diperoleh $\frac{dx}{dt} = 1$. Dari teorema Pythagoras, diperoleh hubungan

$$y^2 = 5^2 - x^2 = 25 - x^2$$

Dengan menurunkan kedua ruas persamaan di atas terhadap t, diperoleh

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

atau diperoleh

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Untuk $x = 3$, diperoleh $y = 4$. Oleh karena itu, kecepatan bergerak puncak tangga pada saat kaki tangga berjarak 3 m dari tembok adalah (m/dt):

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4} \cdot 1 = -\frac{3}{4}$$

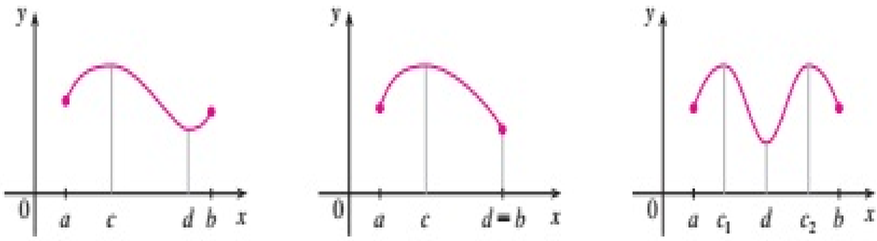
Tanda "$-$" di atas menunjukkan arah kecepatan ke bawah. $\square$

6.2 Maksimum dan Minimum

Definisi 6.2. *Diberikan fungsi f dan $I \subseteq D_f$ yang memuat titik c.*
(a). $f(c)$ dikatakan **nilai maksimum** *f pada I jika $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in I$;*
(b). $f(c)$ dikatakan **nilai minimum** *f pada I jika $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in I$;*
(c). $f(c)$ dikatakan **nilai ekstrim** *f pada I jika $f(c)$ adalah nilai maksimum atau nilai minimum f pada I.*

Teorema 6.3. Teorema Nilai Ekstrim *Jika fungsi f kontinu pada selang tertutup I, maka f mencapai maksimum dan minimum pada I.*

Ilustrasi Teorema 6.3 diberikan pada Gambar 6.2. Pada teorema ini, bahwa fungsi yang kontinu pada selang tertutup menjamin fungsi mempunyai nilai maksimum dan minimum. Namun bukan berarti suatu fungsi yang tidak kontinu pada suatu selang tertentu, tidak bisa mencapai/mempunyai nilai maksimum atau nilai minimum. Atau, fungsi kontinu tetapi terdefinisi pada selang yang tidak tertutup bisa mungkin mencapai maksimum atau minimum. Berikut diberikan beberapa contoh kasus.



Gambar 6.2: Ilustrasi untuk Teorema 6.3

Kasus 1: Didefinisikan $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, untuk $x \neq 1$, dan $f(1) = 3$ pada selang tertutup $[0, 3]$. Di sini fungsi f tidak kontinu di $x = 1$ tetapi f memiliki nilai maksimum di $x = 3$ dengan $f(3) = 4$, dan memiliki nilai minimum di $x = 0$ dengan $f(0) = 1$.
Kasus 2: Didefinisikan $g(x) = \frac{x^3}{3} - x$ pada selang terbuka $(-2, 2)$. Di sini fungsi g kontinu pada selang terbuka $(-2, 2)$ tetapi dapat memiliki nilai maksimum, dalam hal ini di $x = -1$, dan memiliki nilai minimum, dalam hal ini di $x = 1$.

Definisi 6.4. *Diberikan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$.*

(a). Titik $c \in I$ dikatakan **maksimum lokal** *atau* **maksimum relatif** *f pada I jika terdapat subselang buka $J \subseteq I$ sehingga $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in J$. Selanjutnya, jika c titik maksimum lokal, maka $f(c)$ dikatakan* **nilai maksimum lokal**.

(b). Titik $c \in I$ dikatakan **minimum lokal** *atau* **minimum relatif** *f pada I jika terdapat subselang buka $J \subseteq I$ sehingga $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in J$. Selanjutnya, jika c titik minimum lokal, maka $f(c)$ dikatakan* **nilai minimum lokal**.

Akibat dari Definisi 6.4 ini, bahwasannya setiap titik maksimum (minimum) merupakan titik maksimum lokal (minimum lokal).

6.3 Masalah-masalah Maksimum dan Minimum

Sebelum membicarakan masalah-masalah maksimum dan minimum, terlebih dahulu dikenalkan beberapa istilah diantaranya titik ujung, titik, stasioner, dan titik singular.

Diberikan selang tertutup $I = [a, b]$ dan fungsi f yang terdefinisi pada I. Titik a dan b merupakan **titik-titik ujung** dari I. Jika $c \in I$ dimana $f'(c) = 0$, maka c disebut **titik stasioner** f pada I. Sedangkan, jika $c \in I$ dimana f tidak terdiferensialkan di c, maka c disebut **titik singular** f pada I. Sebagai contoh, jika $f(x) = |x|$ untuk setiap $x \in I = [-2, 3]$, maka titik -2 dan 3 merupakan titik ujung I, titik 0 merupakan titik singular f, dan tidak terdapat titik stasioner pada I. Sekumpulan titik ujung, titik stasioner, dan titik singular disebut **titik-titik kritis**. Sementara itu, titik kritis yang menyebabkan fungsi mencapai nilai maksimum atau nilai minimum disebut **titik ekstrim**. Sedangkan, titik kritis yang menyebabkan fungsi mencapai nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal disebut **titik ekstrim lokal**. Jika c adalah titik ekstrim, nilai $f(c)$ disebut **nilai ekstrim**. Jika c adalah titik ekstrim lokal, nilai $f(c)$ disebut **nilai ekstrim lokal**.

Teorema 6.5. *Diberikan fungsi f yang terdefinisi pada selang tertutup $I = [a, b]$ yang memuat titik c. Jika $f(c)$ merupakan nilai ekstrim, maka c merupakan suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu dari berikut:*

(i). *titik ujung dari I, yakni $c = a$ atau $c = b$;*

(ii). *titik stasioner dari f, yakni titik yang menyebabkan $f'(c) = 0$;*

(iii). *titik singular dari f, yakni titik yang tidak terdiferensialkan.*

Pandang fungsi $f(x) = |x|$ yang grafiknya sudah pernah diberikan di Bab 2. Di $x = 0$, fungsi f mencapai nilai minimum tetapi f tidak diferensiabel di $x = 0$ (0 merupakan titik singular f).

Contoh 6.6. *Carilah nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ pada selang $I = [-1, 4]$.*

Penyelesaian:
Pertama, akan dicari semua titik ujung, titik stasioner maupun titik singular, jika ada.
Titik-titik ujung I adalah -1 dan 4.
Titik stasioner $c \in I$ diperoleh jika $f'(c) = 0$. Karena $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x$, diperoleh 0, 1, dan 3 merupakan titik-titik stasioner.
Sedangkan titik singular tidak ada (coba periksa!).
Berikutnya, membandingkan semua nilai f di titik-titik ujung maupun titik stasioner, diperoleh

$f(-1) = 37$

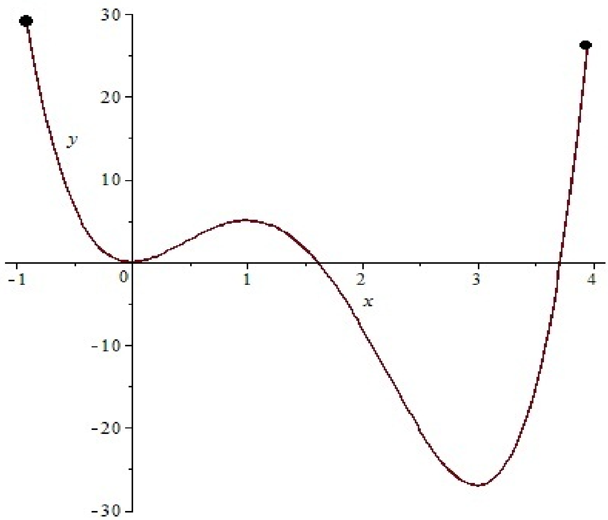
$f(0) = 0$

$f(1) = 5$

$f(3) = -27$

$f(4) = 32$

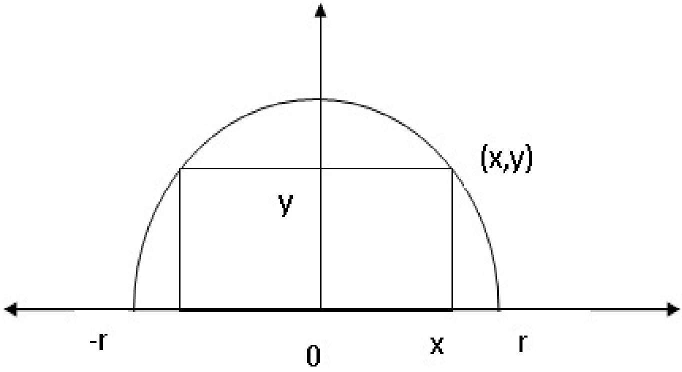
Dari kelima nilai di atas, nilai maksimumnya adalah 37 dicapai di titik $x = -1$, dan nilai minimumnya adalah -27 dicapai di titik $x = 3$. Garik fungsi f diberikan pada Gambar 6.3 $\square$



Gambar 6.3: Grafik $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ pada selang $I = [-1, 4]$

Contoh 6.7. *Tentukan luas terbesar persegipanjang yang dapat digambarkan di dalam setengah lingkaran dengan jari-jari r (lihat Gambar 6.4).*

Penyelesaian:
Ambil persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan pusat lingkaran di titik asal, diberikan pada Gambar 6.4.



Gambar 6.4: Ilustrasi permasalahan untuk Contoh 6.7

Dengan demikian diperoleh luas persegipanjang, dinyatakan dengan A, adalah

$$A(x) = 2xy = 2x\sqrt{r^2 - x^2}, \qquad 0 \le x \le r.$$

Turunan dari A adalah

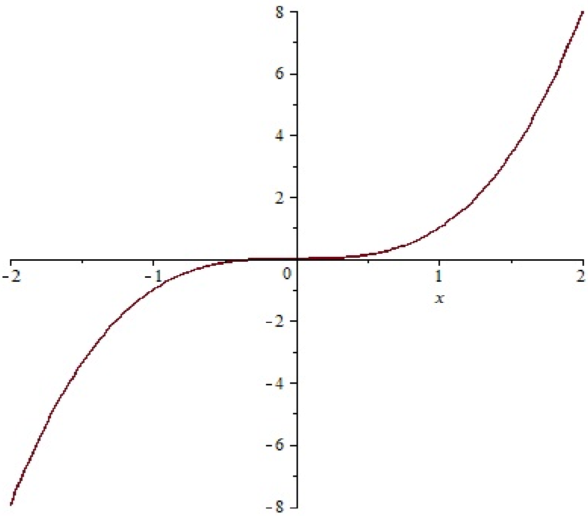
$$A'(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$A'(x) = 0$ dipenuhi oleh $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.
Jadi diperoleh titik-titik kritis di $x = 0, x = \frac{r}{\sqrt{2}}$, dan $x = r$.
Karena $A(0) = A(r) = 0$ dan

$$A(\frac{r}{\sqrt{2}}) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2,$$

diperoleh luas terbesar persegipanjang adalah r^2 saat $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$. □

Sekarang, pandang fungsi $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan $f(x) = x^3$, grafiknya diberikan pada Gambar 6.5. Diperhatikan bahwa $f'(x) = 3x^2 = 0$ dipenuhi oleh $x = 0$. Di sini, $x = 0$ bukanlah titik maksimum maupun minimum bagi f sebab $f(x) = x^3 < 0 = f(0)$ untuk setiap $x < 0$ dan $f(0) = 0 < x^3 = f(x)$ untuk setiap $x > 0$. Dengan demikian, jika $f'(c) = 0$ bukan berarti berakibat titik c menjadi titik maksimum atau minimum.



Gambar 6.5: Grafik fungsi $f(x) = x^3$

6.4 Teorema Nilai Rata-rata

Pada bagian ini akan dibicarakan Teorema Nilai Rata-rata yang merupakan salah satu bagian penting di dalam kalkulus. Pertama, dibicarakan Teorema Rolle.

Teorema 6.8. Teorema Rolle *Diberikan f fungsi yang kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan $f(a) = f(b)$. Jika f diferensiabel pada (a, b), maka terdapat $c \in (a, b)$ sehingga $f'(c) = 0$.*

Bukti. Akan dibuktikan perkasus.
Kasus 1: $f(x) = k$ konstan.
Karena $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$, maka dapat dipilih sebarang $c \in (a, b)$.
Kasus 2: $f(x) > f(a)$ untuk suatu $x \in (a, b)$.
Dari Teorema Nilai Ekstrim, f mempunyai nilai maksimum pada $[a, b]$. Karena $f(a) = f(b)$, f mencapai maksimum di suatu $c \in (a, b)$. Jadi f mempunyai maksimum lokal di c. Karena f diferensiabel pada (a, b), maka f diferensiabel di c. Oleh karena itu $f'(c) = 0$.
Kasus 3: $f(x) < f(a)$ untuk suatu $x \in (a, b)$.
Dari Teorema Nilai Ekstrim, f mempunyai nilai minimum pada $[a, b]$. Karena $f(a) = f(b)$, f mencapai minimum di suatu $c \in (a, b)$. Jadi

f mempunyai minimum lokal di c. Karena f diferensiabel pada (a, b), maka f diferensiabel di c. Oleh karena itu $f'(c) = 0$. $\square$

Teorema Rolle pertamakali dipublikasikan oleh matematikawan Perancis yang bernama Michel Rolle (1652-1719) dalam bukunya yang berjudul "*Mthode pour resoudre les Egalitez*". Teorema Rolle ini kemudian digeneralisasi dalam Teorema Nilai Rata-rata berikut.

Teorema 6.9. Teorema Nilai Rata-rata *Diberikan fungsi f yang terdefinisi pada selang tertutup $[a, b]$. Jika f diferensiabel pada (a, b), maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian hingga berlaku*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Bukti. Definisikan g persamaan garis yang melewati titik $(a, f(a))$ dan titik $(b, f(b))$ dan definisikan fungsi s dengan

$$s(x) = f(x) - g(x)$$

untuk setiap $x \in [a, b]$.
Oleh karena itu, diperoleh hubungan

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Akibatnya diperoleh

$$s(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Diperhatikan bahwa $s(b) = s(a) = 0$ dan untuk setiap $x \in (a, b)$ berlaku

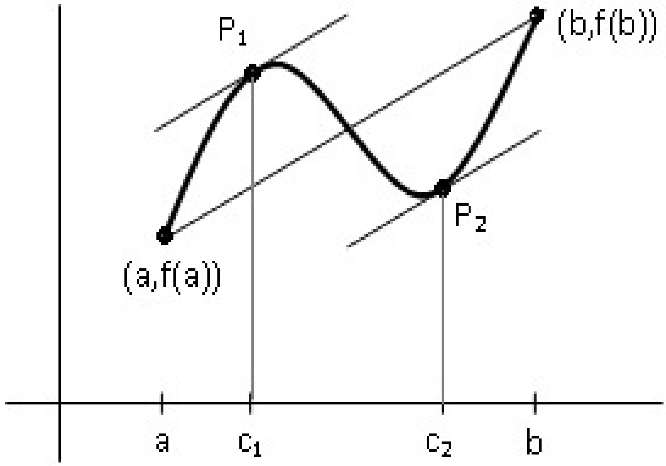
$$s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Jika terdapat $c \in (a, b)$ yang memenuhi $s'(x) = 0$, bukti selesai, karena persamaan terakhir menyimpulkan

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

Ilustrasi Teorema Nilai Rata-rata diberikan pada Gambar 6.6, dimana terdapat c_1 dan c_2 di (a, b) dengan grafik f memiliki garis singgung yang kemiringannya sama dengan kemiringan garis yang menghubungkan titik $(a, f(a))$ dengan titik $(b, f(b))$.



Gambar 6.6: Ilustrasi Teorema Nilai Rata-rata

Contoh 6.10. *Tentukan bilangan c di dalam selang* $[1, 4]$ *yang dijamin oleh Teorema Nilai Rata-rata untuk fungsi* $f(x) = 2\sqrt{x}$.

Penyelesaian:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

dan

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

Jadi harus diselesaikan persamaan

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3},$$

yang diperoleh hasil $c = \frac{9}{4}$. □

6.5 Menggambar Grafik Canggih

Pada Bab 2 telah diperkenalkan penggambaran grafik fungsi. Namun, hal itu dianggap masih sederhana karena belum dipahami sifat-sifat fungsi, misalkan dimana grafik fungsi mencapai maksimum/minimum, dimana grafik naik/turun, atau yang lainnya. Pada bagian ini akan dikenalkan bagaimana menggambar grafik dengan memanfaatkan turunan sehingga bisa diketahui dimana grafik fungsi naik maupun grafik turun dan lain sebagainya.

Teorema 6.11. *Diberikan f fungsi kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan diferensiabel pada selang (a, b).*

(i). *Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$, maka grafik fungsi f naik pada (a, b).*

(ii). *Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$, maka grafik fungsi f turun pada (a, b).*

Bukti. (i). Ambil sebarang $x_1, x_2 \in [a, b]$ dengan $x_1 < x_2$. Berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata, terdapat $c \in (x_1, x_2)$ sehingga berlaku

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Karena $x_2 - x_1 > 0$ dan dari hipotesa berlaku $f'(c) > 0$, maka berlaku

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{atau} \qquad f(x_2) > f(x_1)$$

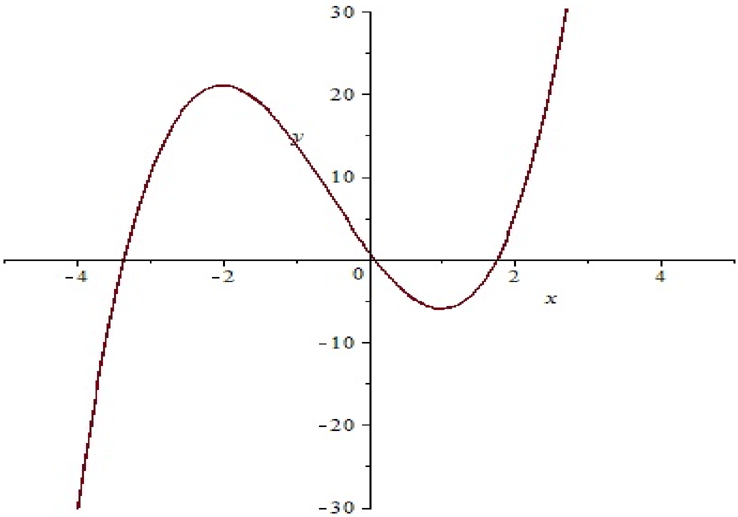
atau dengan kata lain grafik fungsi f naik pada selang $[a, b]$.
Bukti untuk (ii), serupa (sebagai latihan). □

Contoh 6.12. *Diberikan fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. Tentukan dimana grafik fungsi f naik dan dimana grafik fungsi f turun.*

Penyelesaian:
Karena f adalah polinomial, maka f kontinu dan diferensiabel pada $\mathbb{R}$.
Karena $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$ dan dari persamaan $f'(x) = 0$, diperoleh

$$6x^2 + 6x - 12 = 0 \iff (x + 2)(x - 1) = 0$$

yang dipenuhi oleh $x = -2$ dan $x = 1$.
Untuk mendapatkan dimana grafik fungsi f naik adalah dengan menyelesaikan pertaksamaan $f'(x) > 0$ atau ekivalen dengan menyelesaikan pertaksamaan $(x + 2)(x - 1) > 0$, yakni diperoleh penyelesaian $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. Jadi, grafik fungsi naik pada selang $(-\infty, -2)$ dan pada selang $[1, \infty)$.



Gambar 6.7: Grafik fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Untuk mendapatkan dimana grafik fungsi f turun adalah dengan menyelesaikan pertaksamaan $f'(x) < 0$ atau ekivalen dengan menyelesaikan pertaksamaan $(x + 2)(x - 1) < 0$, yakni diperoleh penyelesaian $(-2, 1)$. Jadi, grafik fungsi f turun pada selang $(-2, 1)$. Grafik fungsi f dapat dilihat pada Gambar 6.7. □

Teorema 6.13. *Diberikan f fungsi kontinu pada selang $[a, b]$, titik $c \in (a, b)$, dan f diferensiabel di (a, b) kecuali mungkin di c.*

(i). *Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in (a, c)$ dan $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in (c, b)$, maka f mencapai nilai maksimum lokal di $x = c$.*

(ii). *Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in (a, c)$ dan $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in (c, b)$, maka f mencapai nilai minimum lokal di $x = c$.*

Contoh 6.14. *Diberikan fungsi f dengan*

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Tentukan titik ekstrim lokal dari f dan nilai-nilai dimana f mencapai nilai ekstrim lokal.

Penyelesaian:
Karena f berupa polinomial, maka f diferensiabel pada daerah definisinya, yakni $\mathbb{R}$, dan diperoleh

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Dari persamaan $f'(x) = 0$, diperoleh $3x^2 - 12x + 9 = 0$ atau $3(x-1)(x-3) = 0$, yang dipenuhi oleh $x = 1$ dan $x = 3$. Karena $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in (-\infty, 1)$ dan setiap $x \in (3, \infty)$, dan $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in (1, 3)$, diperoleh kesimpulan f mencapai maksimum lokal di $x = 1$ dengan nilai $f(1) = 5$ dan mencapai minimum lokal di $x = 3$ dengan nilai $f(3) = 1$. □

Teorema 6.15. *Jika f memiliki nilai ekstrim lokal di c dan $f'(c)$ ada, maka $f'(c) = 0$.*

Bukti. Anggap f memiliki maksimum lokal di c. Sesuai Definisi 6.4 (a), terdapat selang buka (a, b) yang memuat c sehingga $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in (a, b)$. Ini berakibat jika $h \to 0$, maka

$$f(c) \geq f(c + h)$$

Oleh karena itu,

$$f(c + h) - f(c) \leq 0 \tag{6.1}$$

Jika kedua ruas pertaksamaan (6.1) dibagi dengan $h > 0$, diperoleh

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Kemudian mengambil limit kanan kedua ruas pertaksamaan ini, diperoleh

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Karena $f'(c)$ ada, maka diperoleh

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0. \tag{6.2}$$

Jika kedua ruas pertaksamaan (6.1) dibagi dengan $h < 0$, diperoleh

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Kemudian mengambil limit kiri kedua ruas pertaksamaan ini, diperoleh

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq \lim_{h\to 0^-} 0 = 0$$

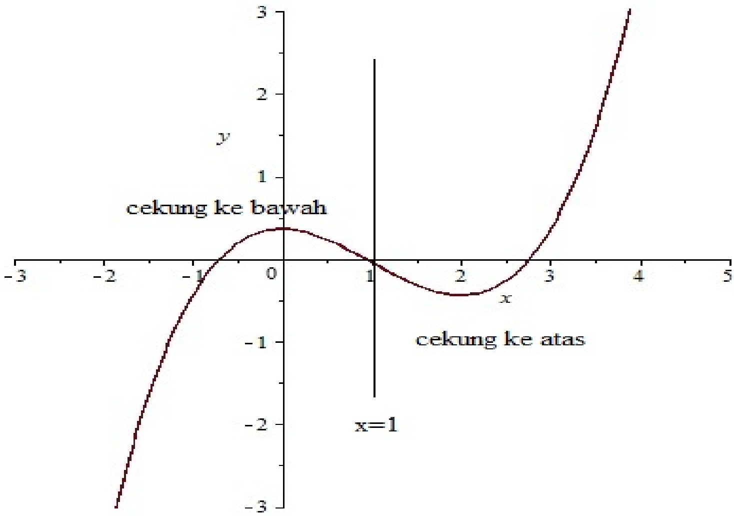
Karena $f'(c)$ ada, maka diperoleh

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0. \qquad (6.3)$$

Dari pertaksamaan (6.2) dan (6.3), disimpulkan $f'(c) = 0$.
Untuk kasus f memiliki minimum relatif di c, bukti serupa. □

Definisi 6.16. *Jika grafik fungsi f berada di atas semua garis singgungnya pada selang I, disebut* **cekung ke atas** *pada I. Jika grafik fungsi f berada di bawah semua garis singgungnya pada selang I, disebut* **cekung ke bawah** *pada I.*

Ilustrasi mengenai cekung ke atas dan cekung ke bawah, diberikan pada Gambar 6.8.



Gambar 6.8: Ilustrasi untuk cekung ke atas dan cekung ke bawah

Dalam Gambar 6.8 tersebut, untuk $x < 1$ grafik cekung ke bawah. Sedang untuk $x > 1$ grafik cekung ke atas. Dalam hal ini, kecekungan tidak bisa dilihat dari tanda $f'(x)$. Bisa mungkin, $f'(x) > 0$ pada suatu selang ia cekung ke atas atau cekung ke bawah. Begitu juga, jika $f'(x) < 0$ pada suatu selang ia mungkin cekung ke atas atau cekung ke bawah. Untuk memahami lebih jauh sifat-sifat grafik fungsi dimana ia cekung ke atas atau cekung ke bawah, diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 6.17. *Diberikan fungsi f pada I dan f diferensiabel dua kali pada I.*

(i). Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka grafik fungsi f cekung ke atas.

(ii). Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka grafik fungsi f cekung ke bawah.

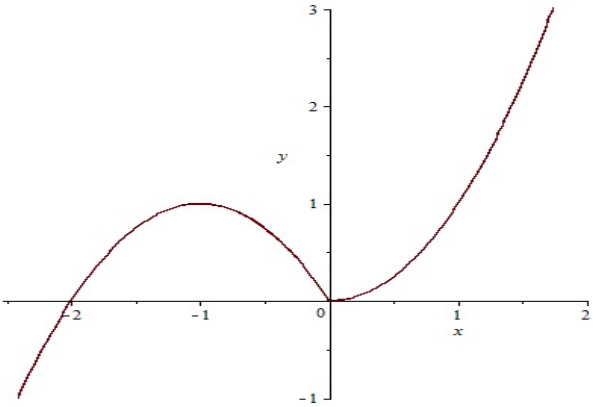
Definisi 6.18. *Diberikan f fungsi kontinu pada I. Titik P di kurva f dikatakan* **titik balik** *jika terjadi perubahan pada f dari cekung ke atas ke cekung ke bawah atau sebaliknya.*

Pada Definisi 6.18, tidak mengharuskan turunan fungsi di titik balik sama dengan nol, seperti diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 6.19. *Diberikan fungsi*

$$f(x) = \begin{cases} -2x - x^2 & , x \leq 0 \\ x^2 & , x > 0 \end{cases}$$

Penyelesaian:
Untuk $x < 0$, diperoleh $f''(x) = -2 < 0$. Jadi grafik fungsi f cekung ke bawah pada selang $(-\infty, 0)$.
Untuk $x > 0$, diperoleh $f''(x) = 2 > 0$. Jadi grafik fungsi f cekung ke atas pada selang $(0, \infty)$.
Di titik $x = 0$ diperoleh $f(0) = 0$.
Titik $(0, 0)$ merupakan titik balik f karena terjadi perubahan dari cekung ke bawah ke cekung ke atas. Coba periksa bahwa di $x = 0$, fungsi f kontinu tetapi tidak diferensiabel (dengan sendirinya juga f tidak diferensiabel dua kali di $x = 0$). Grafik fungsi f diberikan pada Gambar 6.9. $\square$



Gambar 6.9: Grafik fungsi $f(x) = -2x - x^2$ untuk $x \leq 0$ dan $f(x) = x^2$ untuk $x > 0$

Selanjutnya dibahas bagaimana menggambar grafik suatu fungsi dengan memanfaatkan turunan. Berikut salah satu prosedur atau langkah-langkah untuk memudahkan cara menggambar grafik.

1. Periksa domain (daerah asal) dan range (daerah jelajah) fungsi untuk melihat batas dimana fungsi terdefinisi dan batas nilainya.

2. Periksa apakah fungsi genap atau fungsi ganjil untuk melihat kesimetrian grafik fungsi, atau bukan keduanya, yakni bukan fungsi ganjil dan bukan fungsi genap.

3. Cari perpotongan kurva dengan sumbu-sumbu koordinat.

4. Gunakan turunan pertama untuk mencari titik kritis dan tempat dimana grafik fungsi naik dan turun.

5. Cari titik-titik untuk ekstrim lokal.

6. Gunakan turunan kedua untuk mengetahui dimana grafik fungsi cekung ke atas atau cekung ke bawah dan cari titik-titik baliknya jika ada.

Contoh 6.20. *Sketsakan grafik fungsi* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Penyelesaian:
Jika mengikuti prosedur yang telah disebutkan di atas, diperoleh:

1. Karena f berupa polinomial yang tidak diberikan domainnya secara khusus, maka yang menjadi domain f adalah seluruh daerah $\mathbb{R}$. Sedangkan untuk rangennya juga seluruh daerah $\mathbb{R}$ karena f merupakan polinom berderajat ganjil.

2. Fungsi f bukan merupakan fungsi genap dan juga bukan fungsi ganjil. Jadi grafik fungsi f tidak simetri terhadap titik asal maupun simetri terhadap sumbu y.

3. Perpotongan grafik f dengan sumbu y jika $x = 0$, diperoleh $y = f(0) = 3$. Perpotongan dengan sumbu x jika $y = f(x) = 0 = x^3 - 3x^2 + 3$. Mungkin sulit diselesaiakn, bisa ditinggalkan.

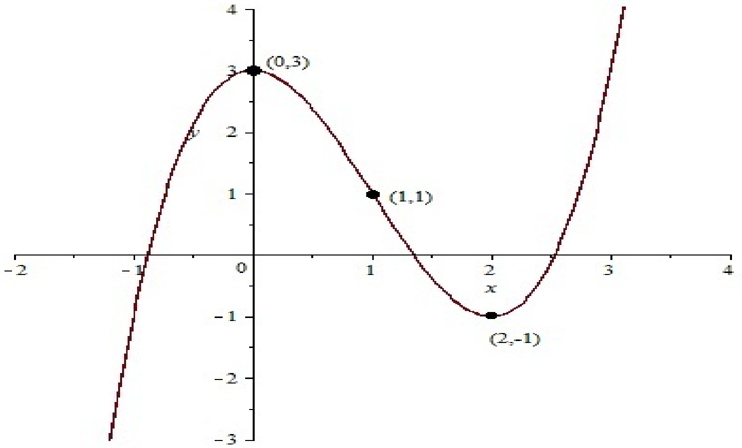
4. Turunan pertama f adalah $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Untuk $f'(x) = 0$, diperoleh titik-titik kritisnya $x = 0$ dan $x = 2$. Diperoleh tiga selang $(-\infty, 0), (0, 2)$, dan $(2, \infty)$ yang akan diperiksa apakah f naik atau turun pada selang-selang tersebut. Karena $f'(x) > 0$ pada selang $(-\infty, 0)$ dan pada selang $(2, \infty)$, berarti f naik pada selang-selang tersebut. Sedangkan pada setiap $x \in (0, 2)$ berlaku $f'(x) < 0$, maka f turun pada selang $(0, 2)$.

5. Karena $f'(x) > 0$ untuk setiap $x < 0$ dan $f'(x) < 0$ untuk setiap $0 < x < 2$ maka titik $x = 0$ merupakan titik maksimum relatif dengan $f(0) = 3$. Sedangkan, karena $f'(x) < 0$ untuk setiap $0 < x < 2$ dan $f'(x) > 0$ untuk setiap $x > 2$ maka titik $x = 2$ merupakan titik minimum relatif dengan $f(2) = -1$.

6. Turunan kedua f adalah $f''(x) = 6x - 6$. Untuk $f''(x) = 0$, diperoleh titik baliknya $x = 1$. Diperoleh dua selang $(-\infty, 1)$, dan $(1, \infty)$ yang akan diperiksa apakah f cekung ke atas atau cekung ke bawah pada selang-selang tersebut. Karena $f''(x) < 0$ pada selang $(-\infty, 1)$, berarti grafik fungsi f cekung ke bawah pada selang $(-\infty, 1)$. Sedangkan pada setiap $x \in (1, \infty)$ berlaku $f''(x) > 0$, maka grafik cekung ke atas pada selang $(1, \infty)$.

7. Karena f cekung ke bawah pada selang $(-\infty, 1)$ dan cekung ke atas pada selang $(1, \infty)$ dengan $f(1) = 1$, maka titik $(1, 1)$ merupakan titik balik.

Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ diberikan pada Gambar 6.10. $\square$



Gambar 6.10: Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

Contoh 6.21. *Sketsakan grafik fungsi*

$$g(x) \quad = \quad \begin{cases} 2(x-1)^3 & , x < 0 \\ (x-1)^4 & , x \geq 0 \end{cases}$$

Penyelesaian:
Jika mengikuti prosedur yang telah disebutkan sebelumnya, diperoleh:

1. Karena g berupa polinomial sepotong-sepotong, maka yang menjadi domain f adalah seluruh daerah $\mathbb{R}$. Sedangkan untuk range-nya adalah $(-\infty, -2) \cup [0, \infty)$ (coba periksa).

2. Fungsi g bukan merupakan fungsi genap dan juga bukan fungsi ganjil. Jadi grafik fungsi g tidak simetri terhadap titik asal maupun simetri terhadap sumbu y.

3. Perpotongan grafik g dengan sumbu y jika $x = 0$, diperoleh $y = g(0) = 1$. Perpotongan dengan sumbu x jika $y = g(x) = 0$, diperoleh $x = 1$

4. Turunan pertama g adalah $g'(x) = 6(x-1)^2$ untuk $x < 0$ dan $g'(x) = 4(x-1)^3$ untuk $x > 0$. Untuk $g'(x) = 0$, diperoleh titik-titik kritisnya $x = 1$. Diperoleh tiga selang $(-\infty, 0), (0, 1)$, dan $(1, \infty)$ yang akan diperiksa apakah g naik atau turun pada selang-selang tersebut. Karena $g'(x) > 0$ pada selang $(-\infty, 0)$

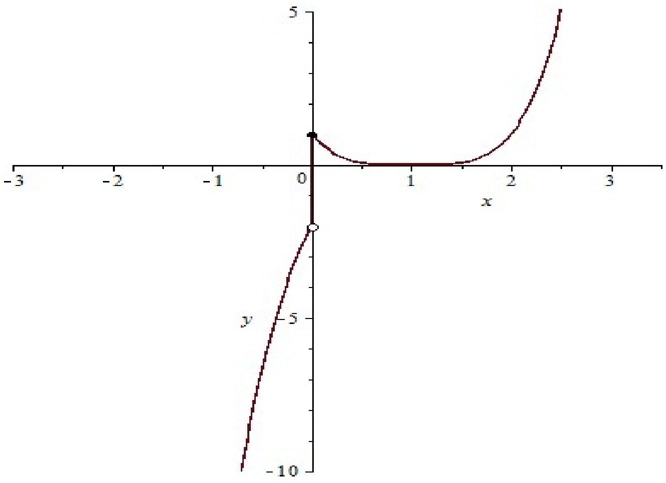
dan pada selang $(1, \infty)$, berarti g naik pada selang-selang tersebut. Sedangkan pada setiap $x \in (0, 1)$ berlaku $g'(x) < 0$, maka grafik g turun pada selang $(0, 1)$.

5. Karena $g'(x) > 0$ untuk setiap $x < 0$ dan $g'(x) < 0$ untuk setiap $0 < x < 1$ tetapi g tidak diferensiabel di 0 maka titik $x = 0$ merupakan titik singular.

6. Turunan kedua g adalah $g'(x) = 12(x - 1)$ untuk $x < 0$ dan $g'(x) = 12(x - 1)^2$ untuk $x > 0$.

7. Karena g tidak diferensiabel di 0, maka grafik fungsi g tidak memiliki titik balik. Grafik fungsi g cekung ke bawah pada selang $(-\infty, 0)$ dan cekung ke atas pada selang $(0, \infty)$.

Grafik fungsi g diberikan pada Gambar 6.11. □



Gambar 6.11: Grafik fungsi g

6.6 Rangkuman

1. Jika fungsi f kontinu pada selang tertutup I, maka f mencapai maksimum dan minimum pada I.

2. Jika $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $f(c)$ merupakan nilai ekstrim, maka c merupakan salah satu dari titik ujung dari $[a, b]$, titik stasioner dari f, atau titik singular dari f.

3. Jika $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan f diferensiabel pada (a, b), maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian hingga berlaku

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

4. Diberikan f fungsi kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan diferensiabel pada selang (a, b).

   (i). Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$, maka grafik fungsi f naik pada (a, b).

   (ii). Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$, maka grafik fungsi f turun pada (a, b).

5. Jika f memiliki nilai ekstrim relatif di c dan $f'(c)$ ada, maka $f'(c) = 0$.

6. Diberikan fungsi f pada I dan f diferensiabel dua kali pada I.

   (i). Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka grafik fungsi f cekung ke atas.

   (ii). Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka grafik fungsi f cekung ke bawah.

6.7 Bahan Diskusi

1. Buktikan Teorema 6.11 (ii).

2. Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata, buktikan bahwa

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

   untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Buktikan Teorema 6.15 untuk kasus minimum relatif.

6.8 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Varberg, D., Purcell, E., and Rigdon, S., 2015, *Calculus*, 9th, Wiley Publishing

2. Stewart, J., 2016, *Calculus: Early Transcendentals*, 8th, Belmont: Thomson Higher Education

3. Leithold, L.1996.*The Calculus with Geometry Analytic.* 7th, Boston: Addison-Wesley

4. Apostol, T.M., 2010. *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, New York: John Wiley & Sons

6.9 Latihan Soal-soal

1. Sebuah layang-layang diterbangkan dengan ketinggian 40 m. Seorang anak yang menerbangkan layang-layang itu bergerak di tanah dengan kecepatan 3 m/dt. Jika benang dalam keadaan tegang, tentukan kecepatan mengulur benang ketika panjang benang yang dipakai adalah 50 m.

2. Sebuah tangki air raksasa berbentuk kerucut terbalik mengeluarkan minyak dengan debit 6 m^3/menit. Jika tinggi kerucut adalah 24 m, jari-jari lingkaran sebesar 12 m, tentukan perubahan kecepatan tinggi permukaan air pada tangki pada saat tinggi air dalam tangki 10 m.

3. Carilah semua titik kritis dari fungsi-fungsi berikut:

   (a) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$
   (b) $g(t) = \frac{t-1}{t^2-t+1}$
   (c) $h(\theta) = 2\cos\theta + \sin^2\theta$.

4. Carilah nilai maksimum dan minimum dari fungsi-fungsi berikut:

   (a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ pada selang $[-2, 1]$.
   (b) $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ pada $\mathbb{R}$.
   (c) $h(x) = x + \frac{1}{x}$ pada selang $[-1, \frac{3}{2}]$.
   (d) $F(x) = |5 - 3x|$ pada selang $[0, 3]$.

5. Tentukan nilai a dan b agar fungsi yang didefinisikan $g(x) = x^3 + ax^2 + b$ mencapai ekstrim relatif di titik $(2, 3)$.

6. Hitung jarak terdekat titik $P(4, 5)$ ke lingkaran $x^2 + y^2 = 9$.

7. Sketsakan grafik fungsi-fungsi berikut

   (a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

   (b) $g(x) = x\sqrt{x+2}$

   (c) $h(x) = x^2|x|$

Bab 7

Integral

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. mampu mengaplikasikan integral dalam menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari;
2. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
3. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menentukan anti turunan suatu fungsi;
2. menentukan integral tentu fungsi pada selang tertutup;
3. menggunakan metode substitusi untuk menghitung integral;

7.1 Anti Turunan

Di dalam matematika, banyak ditemui pasangan operasi balikan, misalnya penambahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, penarikan akar dan pemangkatan, dan sebagainya. Pada subbab ini akan dikenalkan kebalikan dari penurunan yang disebut anti penurunan.

Definisi 7.1. *Diberikan fungsi F dan f yang terdefinisi pada selang I. Fungsi F dikatakan* **anti turunan** *dari f pada I jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in I$.*

Perlu dijelaskan pada definisi di atas, bahwa anti turunan dari suatu fungsi adalah fungsi juga. Jika x adalah suatu titik ujung dari I, maka $F'(x)$ hanya perlu turunan satu sisi, yakni jika x titik ujung kiri I maka perlu turunan kanan saja dan jika x titik ujung kanan I maka perlu turunan kiri saja.

Contoh 7.2. *Tentukan suatu anti turunan dari fungsi $f(x) = 3x^2$ pada selang $(-\infty, \infty)$.*

Penyelesaian:
Di sini akan dicari suatu fungsi F yang memenuhi $F'(x) = 3x^2$ untuk setiap bilangan real x. Ternyata fungsi F yang memenuhi $F'(x) = 3x^2$ banyak sekali, diantaranya $F(x) = x^3, F(x) = x^3 + 1, F(x) = x^3 - 11$, dan sebagainya. Kenyataannya, $F(x) = x^3 + C$ dengan C konstanta sebarang merupakan suatu anti turunan dari $f(x) = 3x^2$. □

Jika melihat teorema yang diberikan pada Bab 6, bahwasannya dua fungsi dengan turunannya sama hanya berbeda dalam konstantanya saja. Kesimpulannya adalah, jika f mempunyai suatu anti turunan, maka anti turunannya adalah semua fungsi dalam satu koleksi dimana untuk selisih dua anggota dalam koleksi tersebut berupa konstanta, yakni jika F_1 dan F_2 masing-masing adalah suatu anti turunan dari f maka $F_1 - F_2 = C$ untuk suatu konstanta C.

Notasi yang sering digunakan untuk menuliskan anti turunan fungsi f adalah

$$\int f(x)\ dx$$

Jadi, jika F adalah anti turunan dari f maka dapat dituliskan

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C.$$

Teorema 7.3. *Jika r bilangan rasional dan $r \neq -1$, maka*

$$\int x^r \ dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C.$$

Bukti. Untuk setiap bilangan rasional $r \neq -1$, diambil fungsi

$$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

dengan C konstanta sebarang. Dengan menurunkan F, diperoleh

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{x^{r+1}}{r+1} + C\Big) = x^r. \qquad \square$$

Teorema 7.4. *Jika fungsi f dan g keduanya mempunyai anti turunan dan k suatu bilangan real, maka*

(i). $\int kf \ dx = k \int f \ dx$

(ii). $\int (f+g) \ dx = \int f \ dx + \int g \ dx$

Bukti. (i). Dengan mendiferensialkan $k \int f \ dx$, diperoleh

$$\begin{aligned} D_x\Big[k \int f \ dx\Big] &= kD_x\Big[\int f \ dx\Big] \\ &= kf(x) \end{aligned}$$

(ii). Dengan mendiferensialkan $\int f \ dx + \int g \ dx$, diperoleh

$$\begin{aligned} D_x\Big[\int f \ dx + \int g \ dx\Big] &= D_x\Big[\int f \ dx\Big] + D_x\Big[\int g \ dx\Big] \\ &= f(x) + g(x). \end{aligned}$$

$\square$

Contoh 7.5. *Tentukan*

$$\int (4x^3 - 5x + 7) \ dx$$

Penyelesaian:
Dengan menggunakan Teorema 7.3 dan Teorema 7.4, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int (4x^3 - 5x + 7)\ dx &= \int 4x^3\ dx + \int -5x\ dx + \int 7\ dx \\
&= 4\int x^3\ dx - 5\int x\ dx + 7\int\ dx \\
&= 4\big(\frac{x^4}{4} + C_1\big) - 5\big(\frac{x^2}{2} + C_2\big) + 7(x + C_3) \\
&= x^4 - \frac{5x^2}{2} + 7x + (4C_1 - 5C_2 + 7C_3) \\
&= x^4 - \frac{5x^2}{2} + 7x + C. \qquad \square
\end{aligned}$$

Teorema 7.6. *Diberikan fungsi g dan bilangan rasional r dengan $r \neq -1$. Jika g diferensiabel, maka*

$$\int [g(x)]^r g'(x)\ dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C.$$

Contoh 7.7. *Carilah*

$$\int \sin^3 x \cos x\ dx$$

Penyelesaian:
Misalkan $g(x) = \sin x$, maka $g'(x) = \cos x$. Jadi,

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos x\ dx &= \int [g(x)]^3 g'(x)\ dx \\
&= \frac{[g(x)]^{3+1}}{3+1} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C \qquad \square
\end{aligned}$$

7.2 Integral Tentu

Sebelum memahami integral tentu, di awal subbab ini akan diberikan terlebih dahulu pengertian jumlah Riemann yang diawali dengan pengertian notasi sigma.
Perhatikan jumlah:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \tag{7.1}$$

Untuk memudahkan penulisan (7.1), dituliskan sebagai

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Dengan demikian, yang dimaksud dengan $\sum_{i=1}^{20} i^2$ dan $\sum_{i=3}^{35}(2i-1)$ masing-masing adalah

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$$

dan

$$\sum_{i=3}^{35}(2i-1) = 5 + 7 + 9 + \cdots + 69.$$

Jika semua nilai a_i dalam $\sum_{i=1}^{n} a_i$ mempunyai nilai sama, yakni $a_i = a$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$, maka diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{\text{n suku}} = na.$$

Sebagai hasil, disepakati

$$\sum_{i=1}^{n} a = na.$$

Beberapa sifat $\sum$ diantaranya sebagai berikut

(i). jika k bilangan real, maka $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$,

(ii). $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Contoh 7.8. *Jika* $\sum_{i=1}^{50} a_i = 60$ *dan* $\sum_{i=1}^{50} b_i = 11$, *hitunglah*

$$\sum_{i=1}^{50}(2a_i - 3b_i + 1)$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{50}(2a_i - 3b_i + 1) &= \sum_{i=1}^{50} 2a_i + \sum_{i=1}^{50}(-3b_i) + \sum_{i=1}^{50} 1\\ &= 2\sum_{i=1}^{50} a_i - 3\sum_{i=1}^{50} b_i + \sum_{i=1}^{50} 1\\ &= 2(60) - 3(11) + 50(1)\\ &= 120 - 33 + 50 = 137. \qquad \square\end{aligned}$$

Terkadang didapatkan sesuatu yang hasilnya sederhana, misalkan

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)\\ &= a_{n+1} - a_1.\end{aligned}$$

Definisi 7.9. *Diberikan fungsi f yang terdefinisi pada selang tertutup $I = [a, b]$. Pandang $\{[x_{i-1}, x_i] : i = 1, 2, \cdots, n\}$ suatu partisi pada selang I, yakni partisi yang membagi selang I menjadi n subselang dengan $x_0 = a$ dan $x_n = b$. Diambil $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$, dan nyatakan $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) : i = 1, 2, \cdots, n\}$.* **Jumlah Riemann** *fungsi f yang terkait dengan $\mathcal{P}$, ditulis $S(f, \mathcal{P})$, adalah*

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pada Definisi 7.9, jumlah Riemann suatu fungsi tergantung dari fungsi dan cara mempartisi selang. Sebagai ilustrasinya, diberikan contoh berikut.

Contoh 7.10. *Diberikan fungsi $f(x) = x^2 - 1$ pada selang tertutup $I = [-1, 2]$ dan diberikan $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, dan $\mathcal{P}_3$ dengan*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= \{([-1, 0], -1/\sqrt{2}), ([0, 1], 1/\sqrt{2}), ([1, 2], 2)\}\\ \mathcal{P}_2 &= \{([-1, -1/2], -1), ([-1/2, 0], 0), ([0, 1], 1/2), ([1, 2], 1)\}\\ \mathcal{P}_3 &= \{([-1, 0], -1/2), ([0, 2], 1)\end{aligned}$$

Hitunglah $S(f, \mathcal{P}_1), S(f, \mathcal{P}_2)$, dan $S(f, \mathcal{P}_3)$.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
S(f,\mathcal{P}_1) &= \sum_{i=1}^{3} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= f(-1/\sqrt{2})(0-(-1)) + f(1/\sqrt{2})(1-(0)) + f(2)(2-(1)) \\
&= (-1/2)(1) + (-1/2)(1) + 3(1) = 2 \\
S(f,\mathcal{P}_2) &= \sum_{i=1}^{4} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= f(-1)(-1/2-(-1)) + f(0)(0-(-1/2)) + f(1/2)(1-0) \\
&\quad + f(1)(2-1) \\
&= 0(1/2) + (-1)(1/2) + (3/4)(1) + 0(1) = \frac{1}{4} \\
S(f,\mathcal{P}_3) &= \sum_{i=1}^{2} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= f(-1/2)(0-(-1)) + f(1)(2-(0)) \\
&= (-3/4)(1) + (0)(2) = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

Definisi 7.11. *Diberikan fungsi f yang terdefinisi pada selang tertutup $[a,b]$ dan $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) : i = 1, 2, \cdots, n\}$ partisi pada $[a,b]$ dengan $|\mathcal{P}| \to 0$ ($|\mathcal{P}| = maks\{|x_i - x_{i-1}| \; |i = 1, 2, \cdots, n\}$). Jika*

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

ada, fungsi f dikatakan **terintegral Riemann** *atau cukup dikatakan* **terintegral** *pada selang $[a,b]$. Selanjutnya, jika f terintegral pada $[a,b]$,* **integral tentu** *dari f pada $[a,b]$, ditulis $\int_a^b f(x)dx$, adalah*

$$\int_a^b f(x)\; dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i-1} - x_i)$$

Pada Definisi 7.11, f dikatakan terintegral ekivalen dengan mengatakan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sedemikian hingga jika $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) : i = 1, 2, \cdots, n\}$ partisi pada $[a,b]$ dengan $|\mathcal{P}| \to 0$ maka berlaku

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx\Big| < \epsilon, \qquad \text{apabila } n > N$$

Diperhatikan bahwa jika $|\mathcal{P}| \to 0$ maka berakibat $n \to \infty$, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Oleh karena itu, jika $|\mathcal{P}| \to 0$ berakibat

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Contoh 7.12. *Hitunglah*

$$\int_0^2 (x+1)\ dx$$

dengan menggunakan limit jumlah Riemann.

Penyelesaian:
Ambil selang $[0,2]$ dan bagi menjadi n subselang sama panjang. Oleh karena itu, jika $\mathcal{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) : i = 1, 2, \cdots, n\}$ partisi pada $[a,b]$ maka diperoleh $|\mathcal{P}| = 2/n \to 0$. Selanjutnya ambil fungsi $f(x) = x+1$ pada selang $[0,2]$ dan $t_i = x_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$. Akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (x+1)\ dx &= \int_0^2 f(x)\ dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \big(f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) \\
&\quad + f(t_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(t_n)(x_n - x_{n-1})\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \big(f(2/n)(2/n - 0) + f(4/n)(4/n - 2/n) \\
&\quad + (6/n)(6/n - 4/n) + \cdots + f(2n/n)(n - (n-2)/n)\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} (2/n + 1)(2/n) + (4/n + 1)(2/n) + \cdots \\
&\quad + (2n/n + 1)(2/n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (2/n)\Big(\big(\frac{2 + 4 + 6 + \cdots + 2n}{n}\big) \\
&\quad + (1 + 1 + 1 + \cdots + 1)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} (4/n^2)(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + \frac{2n}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big((4/n^2)\frac{n(n+1)}{2} + 2\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(2 + \frac{2}{n} + 2\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} (4 + \frac{2}{n}) = 4. \qquad \square
\end{aligned}$$

Sifat-sifat integral tentu.
Jika f dan g dua fungsi yang terintegral pada selang tertutup $[a, b]$, maka berlaku

1. $\int_a^b kf = k\int_a^b$ untuk setiap $k \in \mathbb{R}$.
2. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
3. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ untuk setiap $c \in (a, b)$.
4. Jika $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka $\int_a^b f \geq 0$
5. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Teorema 7.13. *Diberikan f fungsi kontinu pada $[a, b]$. Jika didefinisikan fungsi $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

untuk setiap $x \in [a, b]$, maka F kontinu pada (a, b) dan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (a, b)$.

Bukti. Jika $x \in (a, b)$ dan $x + h \in (a, b)$, dengan menggunakan sifat integral diperoleh

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(t)\ dt\right) - \int_a^x f(t)\ dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\ dt \end{aligned}$$

Jika $h \neq 0$, diperoleh

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt \tag{7.2}$$

Selanjutnya, anggap $h > 0$. Karena f kontinu pada selang $[x, x+h]$, terdapat bilangan u dan v di dalam $[x, x+h]$ sehingga $f(u) = m$ dan $f(v) = M$ dimana m dan M masing-masing merupakan nilai minimum dan nilai maksimum f pada $[x, x+h]$. Berdasarkan sifat integral, diperoleh

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\ dt \leq Mh$$

yakni,

$$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t)\ dt \leq f(v)h$$

Karena $h > 0$, semua ruas ketaksamaan terakhir di atas dibagi dengan h diperoleh

$$f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\ dt \leq f(v)$$

Dengan menggunakan persamaan (7.2), diperoleh

$$f(u) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(v) \tag{7.3}$$

Ketaksamaan (7.3) juga berlaku untuk kasus $h < 0$.
Selanjutnya, dengan mengambil $h \to 0$, maka $u \to x$ dan $v \to x$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x)$$

dan

$$\lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x).$$

Karena f kontinu di x, berdasarkan ketaksamaan (7.3) dan Teorema Apit, diperoleh

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \tag{7.4}$$

Jika $x = a$ atau $x = b$, maka persamaan (7.4) dapat diinterpretasikan sebagai limit sepihak. Hal ini menunjukkan bahwa F kontinu pada $[a, b]$. $\square$

Contoh 7.14. *Tentukan turunan fungsi* $h(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\ dt$

Penyelesaian:
Karena $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ kontinu dimana-mana, oleh karena itu diperoleh

$$h'(x) = \sqrt{1+x^2}. \qquad \square$$

Teorema 7.15. Teorema Dasar Kalkulus *Jika f fungsi kontinu pada $[a, b]$ dan $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ suatu fungsi dengan sifat $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Bukti. Diberikan fungsi

$$G(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

untuk setiap $x \in [a, b]$, yakni G merupakan anti turunan dari f. Jika F sebarang anti turunan dari f pada $[a, b]$, maka

$$F(x) = G(x) + C \tag{7.5}$$

untuk setiap $x \in (a, b)$. Karena F dan G keduanya kontinu pada $[a, b]$, maka dengan mengambil limit kedua ruas persamaan (7.5) (apabila $x \to a^+$ dan $x \to b^-$) persamaan tersebut terpenuhi. Jika diambil $x = a$, diperoleh

$$G(a) = \int_a^a f(t)\ dt = 0.$$

Dengan menggunakan persamaan (7.5) dengan mengambil $x = b$ dan $x = a$, diperoleh

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) = G(b) \\ &= \int_a^b f(t)\ dt. \end{aligned}$$

□

Contoh 7.16. *Hitunglah $\int_0^2 x^2\ dx$*

Penyelesaian:
Karena $f(x) = x^2$ kontinu pada selang $[0, 2]$ dan $F(x) = \frac{x^3}{3}$, diperoleh $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [0, 2]$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2\ dx &= F(2) - F(0) \\ &= \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

□

Contoh 7.17. *Hitunglah* $\int_{-1}^{2} |x| \; dx$

Penyelesaian:
Karena $|x| = -x$ untuk $x < 0$ dan $|x| = x$ untuk $x \geq 0$, berdasarkan sifat (3) integral tentu, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} |x| \; dx &= \int_{-1}^{0} |x| \; dx + \int_{0}^{2} |x| \; dx \\
&= \int_{-1}^{0} -x \; dx + \int_{0}^{2} x \; dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} \\
&= -(0 - \frac{1}{2}) + (2 - 0) = \frac{5}{2} \qquad \square
\end{aligned}$$

7.3 Metode Substitusi

Dalam perhitungan integral, terkadang dijumpai masalah bentuk integral yang sulit diselesaiakan. Salah satu cara untuk menyelesaikannya adalah dengan metode substitusi. Sebagai contoh dalam menghitung integral

$$\int_{0}^{2} x\sqrt{x^2 + 4} \; dx.$$

Untuk menyelesaikan integral tersebut, pertama dimisalkan $u = x^2 + 4$ sehingga diperoleh $du = 2x \; dx$. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x^2 + 4} \; dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2 + 4}(2x \; dx) \\
&= \frac{1}{2}\int u^{1/2} \; du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{3}(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus, diperoleh

$$\int_{0}^{2} x\sqrt{x^2 + 2} \; dx = \frac{1}{3}(x^2 + 4)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{3}8^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}4^{\frac{3}{2}} = \frac{16\sqrt{2} - 8}{3}.$$

Teorema 7.18. *Diberikan g suatu fungsi yang diferensiabel dan diberikan F suatu anti turunan dari f. Jika $u = g(x)$, maka*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)\ du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

Contoh 7.19. *Hitunglah*

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$$

Penyelesaian:
Misalkan $u = \sqrt{x}$. Oleh karena itu, diperoleh $du = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx$. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx &= 2\int \cos\sqrt{x}(\frac{1}{2}x^{-1/2}dx) \\ &= 2\int \cos u\ du \\ &= 2\sin u + C \\ &= 2\sin\sqrt{x} + C \qquad \square \end{aligned}$$

Teorema 7.20. *Jika g suatu fungsi yang mempunyai turunan kontinu pada selang $[a, b]$ dan f fungsi kontinu pada range dari g, maka*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du.$$

Bukti. Diberikan F anti turunan f. Oleh karena itu, diperoleh $F(g(x))$ anti turunan dari $f(g(x))g'(x)$. Dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus, diperoleh

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Kemudian dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus lagi, diperoleh

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Jadi, $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$. $\square$

Teorema 7.21. *Diberikan $a > 0$ dan f fungsi kontinu pada selang $[-a, a]$.*
a. Jika f fungsi genap, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx.$$

b. Jika f fungsi ganjil, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0.$$

Bukti. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\ dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx \\ &= -\int_{0}^{-a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx.\end{aligned}$$

Untuk $\int_{-a}^{0} f(x)\ dx$, dimisalkan $u = -x$. Oleh karena itu, diperoleh $du = -dx$ untuk $x = -a$ berakibat $u = a$. Oleh karena itu

$$-\int_{0}^{-a} f(x)\ dx = -\int_{0}^{a} f(-u)\ (-du) = \int_{0}^{a} f(-u)\ du.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(-u)\ du + \int_{0}^{a} f(x)\ dx.$$

a. Jika f fungsi genap, maka $f(-u) = f(u)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\ dx &= \int_{0}^{a} f(-u)\ du + \int_{0}^{a} f(x)\ dx \\ &= \int_{0}^{a} f(u)\ du + \int_{0}^{a} f(x)\ dx \\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx\end{aligned}$$

b. Jika f fungsi ganjil, maka $f(-u) = -f(u)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\ dx &= \int_{0}^{a} f(-u)\ du + \int_{0}^{a} f(x)\ dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(u)\ du + \int_{0}^{a} f(x)\ dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\square$

Contoh 7.22. *Hitung*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \sin^2 x \ dx$$

Penyelesaian:
Karena $f(x) = x^3 \sin^2 x$ merupakan fungsi ganjil, maka

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \sin^2 x \ dx = 0.$$

7.4 Integral Parsial

Jika f dan g keduanya diferensiabel, maka

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Jika kedua ruas persamaan ini diintegralkan, diperoleh

$$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx = f(x)g(x)$$

atau

$$\int f(x)g'(x) \ dx + \int g(x)f'(x) \ dx = f(x)g(x)$$

Sekarang diperoleh

$$\int f(x)g'(x) \ dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) \ dx \tag{7.6}$$

Persamaan (7.6) disebut **integral parsial**. Agar mudah untuk diingat, diberikan $u = f(x)$ dan $v = g(x)$ sehingga diperoleh $du = f'(x)dx$ dan $dv = g'(x)dx$ dan mensubtitusikan ke persamaan (7.6) diperoleh

$$\int u \ dv = uv - \int v \ du \tag{7.7}$$

Contoh 7.23. *Hitung*

$$\int x \sin x \ dx$$

Penyelesaian:
Misalkan $f(x) = x$ dan $g'(x) = \sin x$, maka diperoleh $f'(x) = 1$ dan $g(x) = -\cos x$. Dengan menggunakan persamaan (7.6), diperoleh

$$\begin{aligned}\int x \sin x \; dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x) \; dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \; dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \qquad \square\end{aligned}$$

Tujuan menggunakan integral parsial adalah untuk mereduksi integral menjadi lebih sederhana dari bentuk integral semula. Dalam contoh 7.23, jika dimisalkan $u = \sin x$ dan $dv = x \; dx$, maka diperoleh $du = \cos x \; dx$ dan $v = x^2/2$, sehingga diperoleh integral

$$\int x \sin x \; dx = (\sin x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x \; dx.$$

Meskipun integral ini benar, namun menghitung $\int x^2 \cos x \; dx$ lebih sulit. Untuk itu, di dalam menyelesaikan integral dengan menggunakan integral parsial harus pandai-pandai mengubah bentuk yang akan dimisalkan.

Contoh 7.24. *Hitung*

$$\int e^x \sin x \; dx$$

Penyelesaian:
Di sini, baik e^x maupun $\sin x$ tidak menjadi lebih sederhana apabila didiferensialkan, namun bisa dicoba untuk memisalkan $u = e^x$ dan $dv = \sin x \; dx$. Oleh karena itu diperoleh $du = e^x dx$ dan $v = -\cos x$. Dengan menggunakan integral parsial, diperoleh

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \; dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \; dx \\ &= -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x \; dx\right) \\ 2\int e^x \sin x \; dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x \\ \int e^x \sin x \; dx &= \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C \qquad \square\end{aligned}$$

Diberikan f dan g fungsi-fungsi dengan f' dan g' keduanya kontinu. Jika rumus integral parsial dikombinasikan dengan Teorema Dasar Kalkulus, diperoleh

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\ dx.$$

7.5 Rangkuman

1. Jika r bilangan rasional dan $r \neq -1$, maka

$$\int x^r\ dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C,$$

   dengan C konstanta sebarang.

2. Jika fungsi f dan g keduanya mempunyai anti turunan dan k suatu bilangan real, maka

   (a) $\int kf\ dx = k \int f\ dx$

   (b) $\int (f+g)\ dx = \int f\ dx + \int g\ dx$

3. Jika f dan g dua fungsi yang terintegral pada selang tertutup $[a,b]$, maka berlaku

   (a) $\int_a^b kf = k \int_a^b$ untuk setiap $k \in \mathbb{R}$.

   (b) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

   (c) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ untuk setiap $c \in (a,b)$.

   (d) Jika $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka $\int_a^b f \geq 0$

   (e) Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

4. Diberikan f fungsi kontinu pada $[a,b]$. Jika didefinisikan fungsi $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dengan

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

   untuk setiap $x \in [a,b]$, maka F kontinu pada (a,b) dan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (a,b)$.

5. Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan sifat $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

6. Diberikan $a > 0$ dan f fungsi kontinu pada selang $[-a, a]$.
(a). Jika f fungsi genap, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx.$$

(b). Jika f fungsi ganjil, maka

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0.$$

7.6 Bahan Diskusi

1. Dengan menggunakan sifat simetri, hitung

$$\int_0^{\pi} \cos x\ dx$$

2. Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan **periodik** dengan periode p jika terdapat bilangan $p > 0$ terkecil sehingga $f(x+p) = f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Jika g fungsi terintegral dan periodik dengan periode p, buktikan

$$\int_a^{a+p} g(x)\ dx = \int_0^p g(x)\ dx.$$

Gunakan hasil tersebut untuk menghitung

$$\int_1^{1+\pi} |\sin x|\ dx$$

3. Dengan menggunakan integral parsial, buktikan rumus reduksi

$$\int \sin^n x\ dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\ dx.$$

Gunakan rumus tersebut untuk menghitung

$$\int \sin^5 x\ dx$$

7.7 Rujukan/Daftar Pustaka

1. Varberg, D., Purcell, E., and Rigdon, S., 2015, *Calculus*, 9th, Wiley Publishing

2. Stewart, J., 2016, *Calculus: Early Transcendentals*, 8th, Belmont: Thomson Higher Education

3. Leithold, L.1996.*The Calculus with Geometry Analytic.* 7th, Boston: Addison-Wesley

4. Apostol, T.M., 2010. *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, New York: John Wiley & Sons

7.8 Latihan Soal-soal

1. Tentukan anti turunan dari fungsi-fungsi berikut:
   (a) $f(x) = 3x + 2$
   (b) $g(x) = 4x^3 - 12x^2 + 7$
   (c) $h(x) = x^{2/3} - x^{-1/3}$
   (d) $f(x) = \frac{12}{x^7} - \frac{3}{\sqrt{x}}$

2. Hitunglah integral-integral tak tentu berikut
   (a) $\int (x^2 - 1)^2 \, dx$
   (b) $\int (2 \sin x - 3 \cos x) \, dx$

3. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut:
   (a) $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1} \, du.$
   (Petunjuk: $\int_{2x}^{3x} f(u) \, du = \int_{2x}^{0} f(u) \, du + \int_{0}^{3x} f(u) \, du$)
   (b) $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sqrt{t} \sin t \, dt.$

4. Hitunglah integral tentu berikut
   (a) $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x) \, dx$
   (b) $\int_{0}^{2} x(2 + x^5) \, dx$
   (c) $\int_{1}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}} \, dx$

(d) $\int_{-1}^{2} |x-3|\ dx$

(e) $\int_{-1}^{2} |2x-1|\ dx$

(f) $\int_{-1}^{2} |x^2-1|\ dx$

(g) $\int_{-2}^{2} f(x)\ dx$, dimana

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ,-2 \leq x \leq 0 \\ 4-x^2 & ,0 < x \leq 2 \end{cases}$$

5. Hitung integral-integral berikut

   (a) $\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\ dx$

   (b) $\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\ dx$

   (c) $\int_{-2}^{2} (x^2+x)\sqrt{4-x^2}\ dx$

6. Hitung

   (a) $\int t^3 \sin t\ dt$

   (b) $\int t^3 \cos t\ dt$

7. Dengan menggunakan sifat simetri, hitung

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^5 + |\sin x|)\ dx$$

8. Hitung integral-integral berikut

   (a) $\int x^2 e^x\ dx$

   (b) $\int \ln^2 x\ dx$

9. Hitunglah

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\ dx$$

Bibliografi

[1] Varberg, D., Purcell, E., and Rigdon, S., 2015, *Calculus*, 9th, Wiley Publishing

[2] Stewart, J., 2016, *Calculus: Early Transcendentals*, 8th, Belmont: Thomson Higher Education

[3] Leithold, L.1996.*The Calculus with Geometry Analytic*. 7th, Boston: Addison-Wesley

[4] Apostol, T.M., 2010. *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, New York: John Wiley & Sons

Indeks