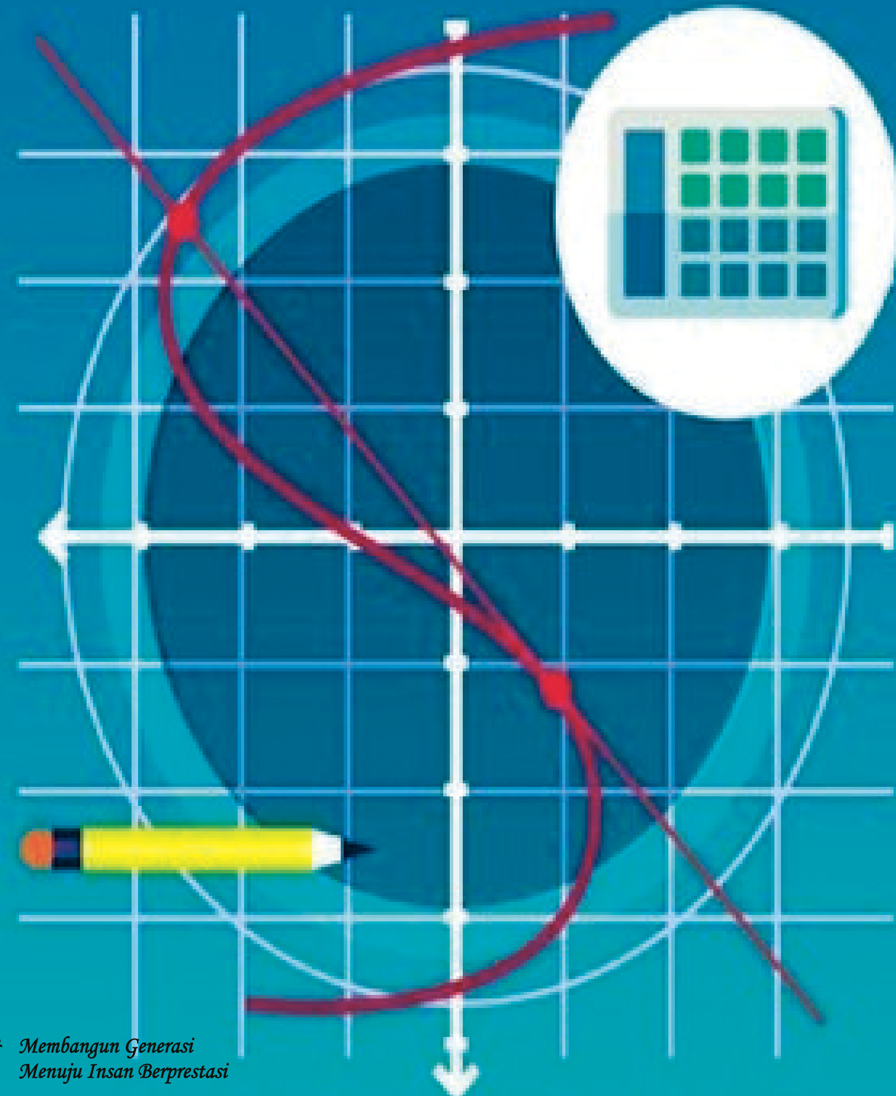
KALKULUS INTEGRAL

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.
Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.



Membangun Generasi
Menuju Insan Berprestasi

KALKULUS INTEGRAL

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., dkk

Anggota APPTI No. 036/KTA/APPT/2015
Anggota IKAPI No. 127/JTI/2011

Jember University Press
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
Telp. 0331-330224, psw. 0319
***E-mail*: upt-penerbitan@unej.ac.id**

KALKULUS INTEGRAL

Penulis:
Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.
Dr. Firdaus Ubaidillah , S.Si., M.Si.
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

UPT PERCETAKAN & PENERBITAN
UNIVERSITAS JEMBER
2019

KALKULUS INTEGRAL

Penulis:
Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.
Dr. Firdaus Ubaidillah , S.Si., M.Si.
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

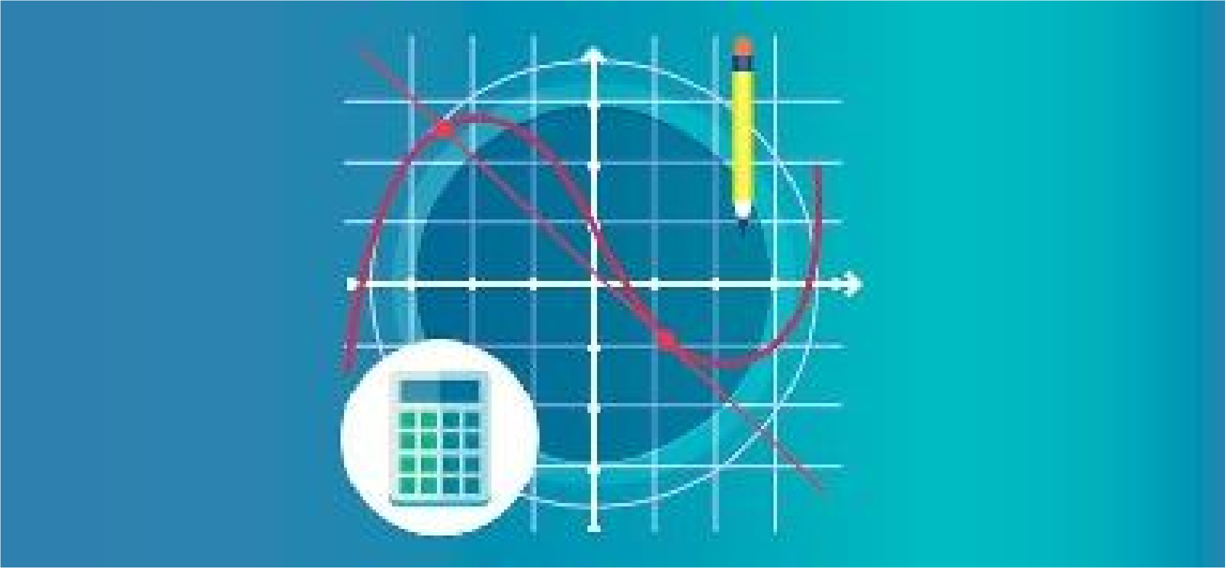
Desain Sampul dan Tata Letak
Fatkhur Rokhim
M. Hosim

ISBN: 978-623-7226-73-4

Penerbit:
UPT Percetakan & Penerbitan Universitas Jember

Redaksi:
Jl. Kalimantan 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip. 00319
e-mail: upt-penerbitan@unej.ac.id

Distributor Tunggal:
UNEJ Press
Jl. Kalimantan 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip. 0319
e-mail: upt-penerbitan@unej.ac.id



Kata Pengantar

Kalkulus Integral: Mengkalkulasi impact dari sebuah perubahan

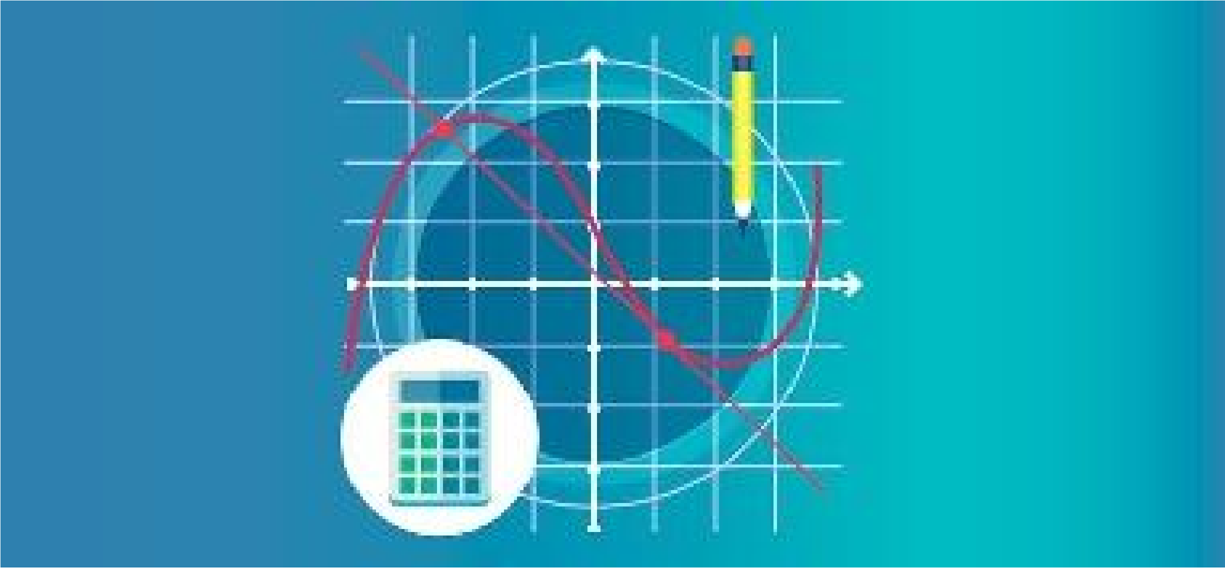
Kalkulus integral, seringkali kita mengenalnya sebagai suatu cabang kalkulus yang berkaitan dengan teori dan aplikasi integral. Secara umum kita mengenal kalkulus dalam dua bagian yaitu kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Sementara, kalkulus diferensial mempelajari tentang bagaimanakah sesuatu berubah, kalkulus integral mempelajari tentang akibat yang ditimbulkan dari perubahan tersebut. Dalam kasus sederhana, kalkulus integral mempelajari mengenai hubungan antara dua buah variabel jika diketahui laju perubahan dari kedua variable tersebut. Kalkulus diferensial berfokus pada tingkat perubahan, seperti kemiringan garis singgung dan kecepatan, sedangkan kalkulus integral berkaitan dengan ukuran atau nilai total, seperti panjang (jarak), luas bidang atau wilayah, juga volume ruang.

Kedua cabang dihubungkan oleh teorema dasar kalkulus, yang menunjukkan bagaimana integral tertentu dihitung dengan menggunakan antiderivatif, dimana fungsi laju perubahannya, atau turunannya, sama dengan fungsi yang diintegrasikan. Sebagai contoh, mengintegrasikan fungsi kecepatan menghasilkan fungsi jarak, yang memungkinkan jarak yang ditempuh dihitung oleh suatu objek selama interval waktu tertentu. Beberapa kalkulus integral berkaitan dengan derivasi formula untuk menemukan antiderivatif. Kemanfaatan kalkulus intergral yang luas berasal dari penggunaannya dalam menyelesaikan persamaan diferensial.

Buku ajar yang ada di tangan Anda ini, hendak mengajak kita memasuki wilayah dan ruang itu. Saya mengenal ketiga penulis sebagai kolega yang memiliki dedikasi tinggi, dan kecintaan mendalam pada matematika. Ketulusan ini membuat pengajaran matematika mendarat mulus dalam hati kita, para mahasiswa. Dengan kecintaannya pada pengajaran matematika dan kedalaman kelimuan yang dimiliki, ketiga penulis buku ajar ini akan memandu kita para pengajar kalkulus untuk merasakan keluasan ruang matematika kalkulus dalam mengajarkan kalkulasi impact dari sebuah perubahan itu.

Perubahan memang senantiasa menyertai kehidupan kita, tapi tidaklah perlu khawatir karena matematika kalkulus menemani kita dalam setiap perubahan itu. Oleh karenanya, kepada ketiga penulis, saya ucapkan selamat atas terbitnya buku ini. . . .! "Don't let the world change, without the change of the way we teach. . . " Buat Anda adik-adik mahasiswa yang saya cintai, saya ucapkan selamat memasuki ruang imajinasi kalkulus yang indah. "Temukan keindahan ruang imajinasi Kalkulus melalui sajian hebat para penulis yang tulus. . . "

Alfian Futuhul Hadi



Prakata

Puji syukur dihaturkan hanya kepada Alloh Tuhan yang Mahaesa. Atas rahmatNya jua buku ini sampai ke tangan pembaca. Semoga semua ikhtiar ini menjadi bagian dari kontribusi Tim Penulis untuk memajukan dan memahamkan matematika di bumi pertiwi tercinta.

Turunan dan integral adalah sebagian dari konsep dasar penting untuk memahami fenomena sains di sekeliling kita. Banyak fenomena yang dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial, sehingga karenanya dibutuhkan pemahaman terhadap konsep dasar turunan. Demikian juga, pemahaman terhadap konsep integral dibutuhkan untuk menentukan solusi persamaan diferensial tersebut, sekaligus untuk menginterpretasikan solusi tersebut dalam masalah terkait.

Buku yang ada di tangan pembaca ini memuat beberapa penerapan konsep integral sebagai kelanjutan dari konsep turunan. Penentuan luas daerah, volume benda dengan bentuk yang memenuhi aturan tertentu, panjang kurva, serta luas permukaan putar suatu benda adalah sebagian contoh penerapan integral yang akan diuraikan. Dalam hal ini fungsi-fungsi yang digunakan dipilih yang relatif sederhana, sehingga bisa diselesaikan dengan menggunakan teknik pengintegralan yang dibahas juga di dalam buku ini.

Untuk keperluan aplikasi di bidang teknik, dibahas juga beberapa bentuk fungsi transenden, diantaranya adalah fungsi logaritma asli dan fungsi eksponensial asli sebagai inversnya. Fungsi-fungsi ini diperlukan untuk menyelesaikan bentuk persamaan diferensial sederhana yang muncul dalam model pertumbuhan populasi eksponensial maupun logistik. Pemahaman terhadap sifat-sifat fungsi logaritma dan eksponensial (yang asli maupun umum) akan banyak membantu dalam menjelaskan solusi persamaan diferensial terkait.

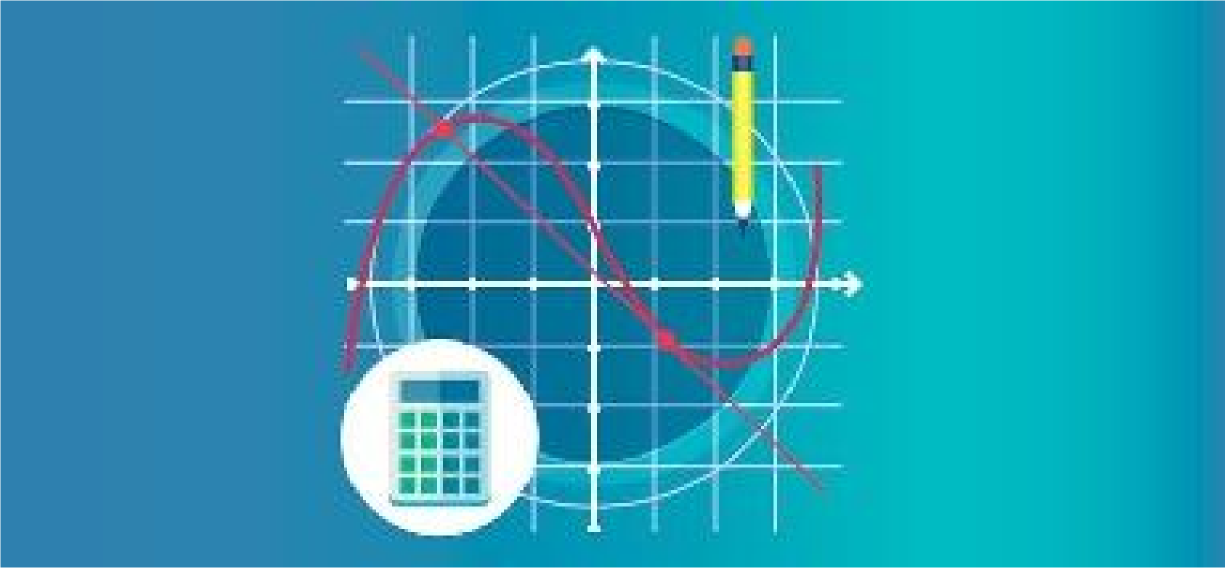
Mahasiswa juga perlu dibekali kemampuan menyelesaikan beberapa bentuk integral tertentu yang sering muncul dalam aplikasi. Oleh karenanya, beberapa teknik pengintegralan dasar harus dikuasainya. Saat ini sudah dikembangkan berbagai software matematika yang dapat digunakan menyelesaikan berbagai bentuk integral dari fungsi yang rumit. Namun demikian, tetap saja diperlukan ketrampilan untuk menyelesaikan berbagai bentuk integral secara manual. Tentu saja, hal tersebut terbatas pada fungsi yang dapat diselesaikan dengan teknik-teknik pengintegralan yang diberikan.

Pada akhirnya akan dikenalkan berbagai bentuk integral tak-wajar yang juga banyak ditemui dalam aplikasi di lapangan. Konsep kekonvergenan limit dari suatu fungsi juga dibutuhkan dalam menentukan nilai integral tak-wajar tersebut. Oleh karenanya, pembahasan tentang ini akan didahului dengan identifikasi bentuk-bentuk tak-tentu sebagaimana disyaratkan dalam menyelesaikan bentuk limit terkait.

Akhirnya, selamat menikmati buku sederhana ini. Secara khusus, bagi mahasiswa semoga anda dapat mengambil pelajaran dari buku ini dan memanfaatkannya untuk memperkuat pondasi matematika. Sekecil apa pun pelajaran tersebut akan membahagiakan kami sebagai tim penulis. Semoga menjadi amal jariyah bagi kami dan semua pihak terkait.

Jember, Desember 2019

Tim Penulis



Contents

1 Penggunaan Integral 15

1.1 Luas Daerah Bidang Rata 16

1.1.1 Luas Daerah di Atas Sumbu x 16
1.1.2 Luas Daerah di Antara Dua Kurva 19
1.1.3 Daerah di Bawah Sumbu x 21
1.1.4 Jarak dan Perpindahan 23

1.2 Volume Benda dalam Bidang 26

1.2.1 Metode Cakram 26
1.2.2 Metode Cincin 33

1.3 Volume Benda Putar: Kulit Tabung 39

1.4 Panjang Kurva pada Bidang (Kurva Rata) 45

1.5 Luas Permukaan Putar 52

1.5.1 Luas Permukaan Benda Putar, Sumbu Putar Sumbu X 52

1.6 Rangkuman 54

2 Fungsi Transenden 57

2.1 Fungsi Logaritma Asli 58
2.1.1 Fungsi Logaritma 58
2.1.2 Sifat-sifat Fungsi Logaritma Natural 59
2.1.3 Turunan Fungsi Logaritma Natural 60
2.1.4 Sketsa Grafik Fungsi Logaritma Natural 64
2.1.5 Diferensial Logaritmik 64
2.1.6 Integral yang Menghasilkan Fungsi Logaritma Natural 65

2.2 Integral Fungsi Logaritma dan Eksponen 68
2.2.1 Latihan soal 73

2.3 Fungsi Invers dan Turunannya 74

2.4 Fungsi Eksponen Asli 80

2.5 Fungsi Eksponen Umum dan Fungsi Logaritma Umum 87

2.6 Pertumbuhan dan Peluluhan Eksponen 92

2.7 Fungsi Trigonometri Invers 101
2.7.1 Fungsi Invers Sin dan Cos 101
2.7.2 Fungsi inverse tan 105
2.7.3 Fungsi invers Sec 108
2.7.4 Empat Pemakaian Kesamaan 108

2.8 Turunan Fungsi Trigonometri 111

2.9 Fungsi Hiperbola dan Inversnya 117
2.9.1 Fungsi Hiperbola 117

2.10 Rangkuman 127

3 Teknik Pengintegralan 131

3.1 Pengintegralan dengan Subtitusi 132

3.2 Beberapa Integral Trigonometri 136

3.3 Subtitusi yang Merasionalkan 143

3.4 Pengintegralan Parsial 148

3.5 Rangkuman 153

4 Bentuk Tak-Tentu dan Integral-Tak-Wajar 157

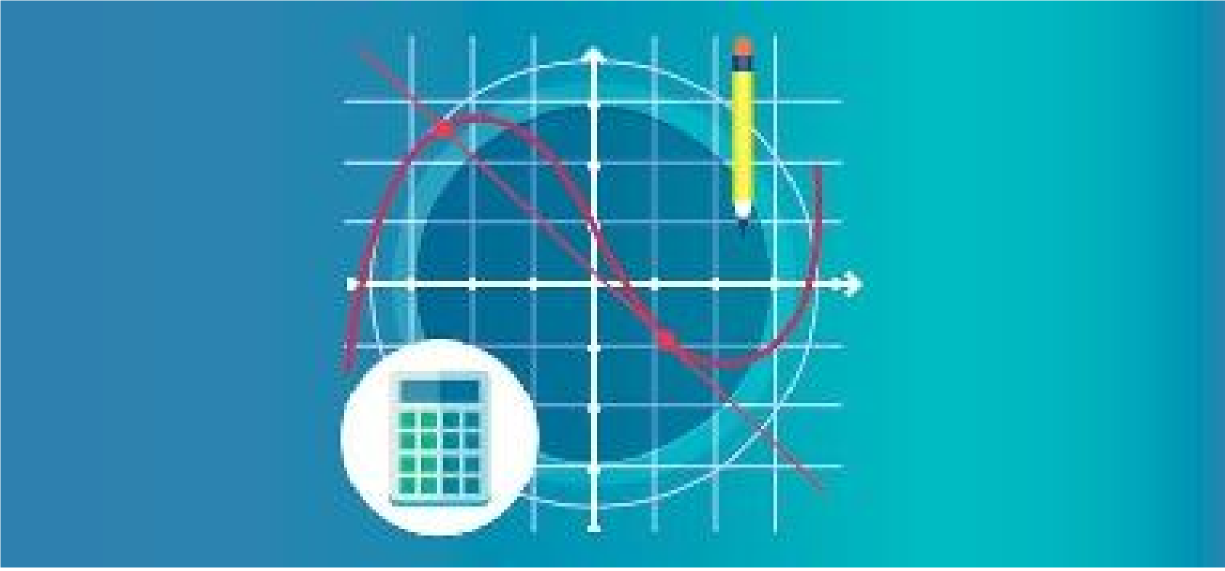
4.1 Bentuk Tak-Tentu Jenis 0/0 158

4.2 Bentuk Tak-Tentu yang Lain 159

4.3 Integral Tak-Wajar: Batas Tak-Terhingga 161

4.4 Integral Tak-Wajar: Integran Tak-Terhingga 168

4.5 Rangkuman 171



Tinjauan Mata Kuliah

Kalkulus Integral, sesuai dengan namanya, berisi tentang sejumlah teori integral dan mengilustrasikan bagaimana teori tersebut dapat diimplementasikan pada beberap arumusan yang lebih praktis. Di dalam kalkulus, teori integral selalu didahului dengan pembahasan tentang turunan (derivatives). Karena, memang integral tak-tentu didefinisikan sebagai anti-turunan. Demikian juga, konsep integral tentu yang didefinisikan dari limit jumlah Riemann tetap membutuhkan integral sebagai anti-turunan pada saat menghitung nilai integralnya. Oleh karena itu, buku ini tidak dapat dipisahkan dari topik Kalkulus Diferensial yang seharusnya.

Buku ajar ini merupakan penunjang untuk mata kuliah Kalkulus yang diberikan di Jurusan Matematika dan jurusan lainnya di lingkungan FMIPA Universitas Jember. Banyak mata kuliah yang membutuhkan prasyarat topik integral yang dibahas di dalam buku ini. Diantaranya, di Jurusan Matematika topik ini dibutuhkan untuk memahami mata kuliah Persamaan Diferensial Biasa, Kalkulus Peubah Banyak, Kalkulus Vektor, dan Statistika Matematika. Di lingkungan FMIPA di Jurusan Fisika, Kimia, Biologi, topik integral juga diberikan dalam bentuk mata kuliah Kalkulus. Topik integral juga dibutuhkan untuk menunjang mata kuliah Matematika Teknik yang diajarkan di jurusan-jurusan berbasis keteknikan (*engineering*).

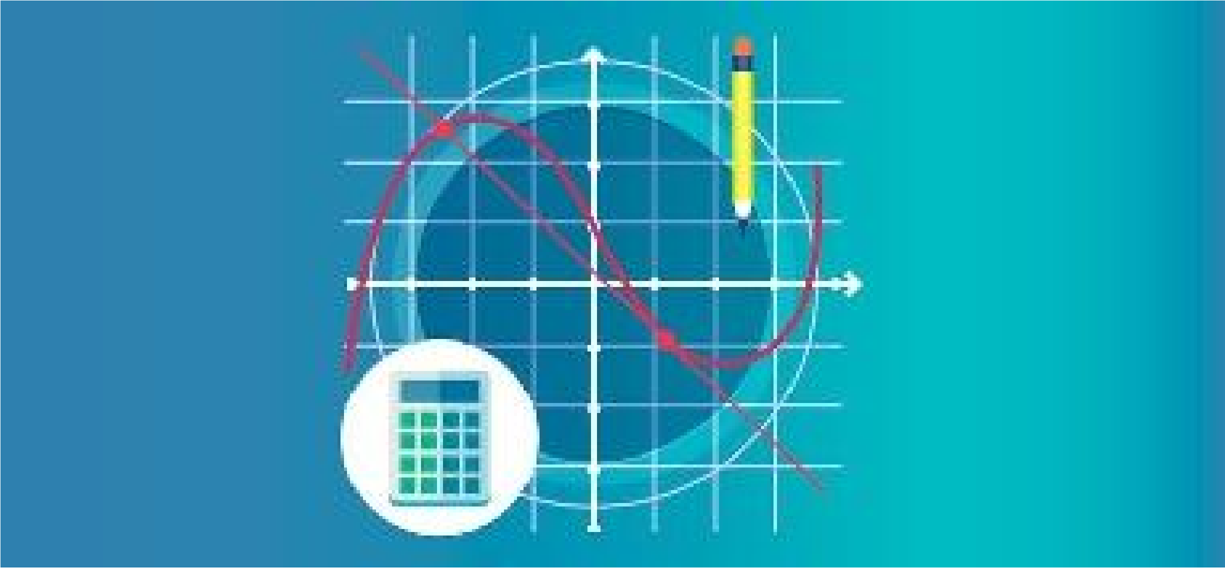
Untuk memahami topik-topik yang ditulis dalam buku ajar ini, pembaca harus sudah mempunyai bekal pemahaman terkait limit, kekontinuan, turunan, serta konsep dasar integral yang membahas hubungan turunan dan integral. Jika pemahaman tersebut dirasakan masih kurang, maka pembaca harus mereview kembali topik-topik terkait.

Secara umum topik-topik dalam buku ajar ini disampaikan dalam mata kuliah Kalkulus atau Kalkulus Lanjut. Dengan mengasumsikan bahwa definisi dan pengertian dasar integral sudah difahami, di dalam Bab 1 dibahas tentang penggunaan integral dalam bentuk paling sederhana, yaitu luas daerah. Topik ini mengajak pembaca untuk memahami makna geometris integral sebagai luasan suatu daerah. Selanjutnya akan dibahas tentang volume benda putar, yaitu bagaimana seandainya sebuah daerah diputar mengelilingi sumbu tertentu. Di dalam bab ini juga akan dibahas tentang panjang kurva yang dinyatakan dalam bentuk fungsi parametrik. Potongan kurva tersebut jika diputar pada sumbu tertentu akan membentuk luas permukaan dari suatu benda putar.

Selanjutnya, untuk kepentingan aplikasi yang melibatkan fungsi yang lebih rumit, di dalam Bab 2 dibahas berbagai bentuk fungsi transenden. Fungsi trigonometri, hiperbolik, beserta inversnya akan dibahas. Dalam hal ini dibahas juga turunan dan integral fungsi-fungsi tersebut. Kemudian untuk aplikasi di bidang teknik, akan dibahas fungsi logaritma asli dan umum beserta inversnya, yaitu eksponensial asli dan umum. Pembahasan fungsi-fungsi ini juga akan dikaitkan dengan turunan dan integralnya. Materi dalam Bab 3 dimaksudkan untuk memperdalam pemahaman tentang teknik pengintegralan dari berbagai fungsi aljabar dan transenden. Sebenarnya sudah cukup banyak software matematika yang dapat digunakan untuk membantu menyelesaikan berbagai bentuk integral. Namun demikian, dalam proses belajar, pembaca perlu mempunyai pengalaman langsung menelusuri prosedur penyelesaian manual untuk menyelesaikannya.

Pada akhirnya di dalam Bab 4 akan dikenal berbagai bentuk integral tak-wajar yang mempunyai batas pengintegralan atau nilai fungsi integran tak hingga. Bentuk integral semacam ini dapat diselesaikan dengan bantuan limit dari bentuk-bentuk tak-tentu. Oleh karena itu, di awal bab akan dibahas tentang berbagai bentuk tak-tentu untuk membantu penyelesaian integral tak-wajar.

Pada akhir setiap bab dalam buku ajar ini disediakan beberapa pengertian penting yang dirangkum dalam ringkasan. Oleh karena itu, pembaca hendaknya memastikan bahwa pengertian-pengertian tersebut sudah difahami dengan baik sebelum membaca bab selanjutnya. Latihan soal dan bahan diskusi juga diberikan agar didapatkan pemahaman yang lebih mendalam. Penulis menyarankan ini dibahas dalam diskusi kelompok agar pembaca mendapatkan pemahaman yang lebih komprehensif.



1. Penggunaan Integral

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami penggunaan integral dalam menyelesaikan masalah sehari-hari;
2. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
3. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusu mahasiswa mampu

1. menentukan luas daerah bidang rata;
2. menentukan volume benda dalam bidang dengan metode cakram dan cincin;
3. menentukan volume benda putar;
4. menentukan luas permukaan benda putar.

1.1 Luas Daerah Bidang Rata

Salah satu aplikasi integral adalah untuk menghitung luas bidang datar yang dibentuk oleh persamaan-persamaan garis atau kurva. Luas bidang datar yang bentuknya beraturan dapat dihitung dengan mudah dengan menggunakan rumus-rumus yang sudah tersedia. Namun, apabila suatu daerah dibatasi oleh batas yang melengkung, masalah penentuan luas menjadi lebih sukar. Menurut Archimedes, pandang satu barisan polygon dalam yang menghampiri daerah melengkung dengan kecermatan yang semakin besar. Menghitung luas suatu bidang yang dibatasi oleh sebuah kurva yaitu dengan mencari integral tentu dari daerah antara kurva dan sumbu koordinat atau kurva pertama dengan kurva kedua.

1.1.1 Luas Daerah di Atas Sumbu x

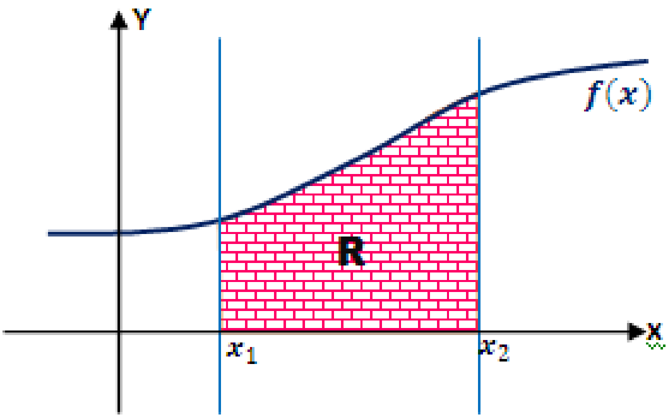


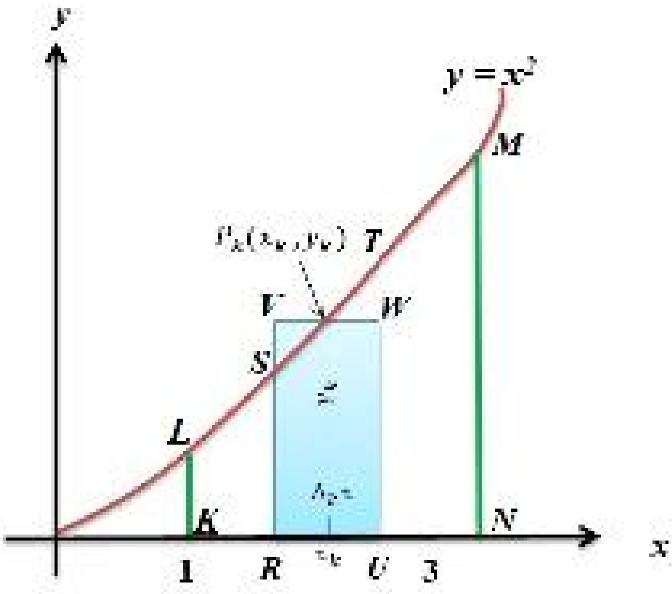
Figure 1.1: Sebuah daerah R

Andaikan $f(x)$ menentukan persamaan sebuah kurva pada bidang xy dan andaikan f kontinu dan tak negative pada selang (interval) $x_1 \leq x \leq x_2$. Tinjaulah daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik dari $f(x)$, $x = x_1$, $x = x_2$, dan $y = 0$. Kita mengacu R sebagai daerah di bawah $f(x)$ antara $x = x_1$ dan $x = x_2$. Luasnya $A(R)$, ditentukan oleh :

$$A(R) = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]dx$$

Contoh 1

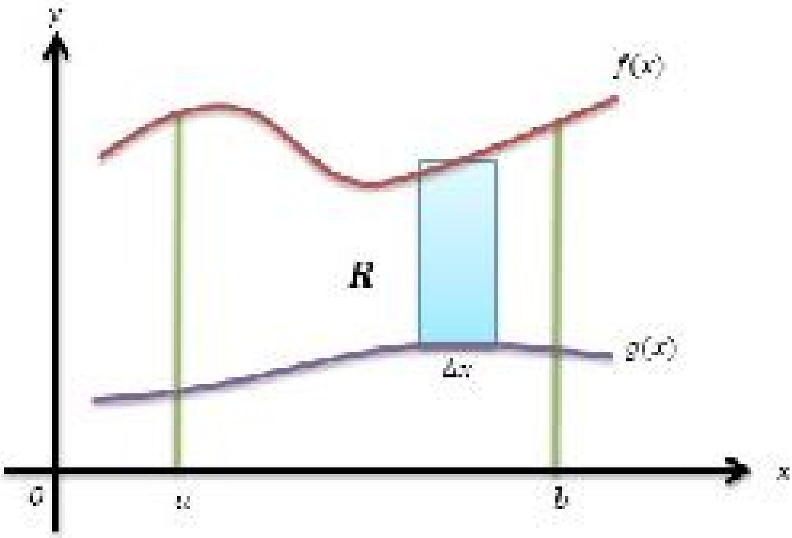
Cari luas yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu x dan ordinat $x = 1$ dan $x = 3$.



Gambar di atas menunjukkan luas KLMN yang dicari, wakil pita RSTU, dan persegi panjang yang didekati RVWU. Untuk persegi panjang alas adalah Δx, tingginya $y_k = f_{(xk)} = x^{2k}$ dan luas adalah ${x_k}^2\Delta x$, maka :

$$
\begin{aligned}
A &= LimA \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x\,\Delta_k x \\
&= \frac{x^3}{3}\,\Big|_1^3 \\
&= 9 - \frac{1}{3} \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}
$$

1.1.2 Luas Daerah di Antara Dua Kurva

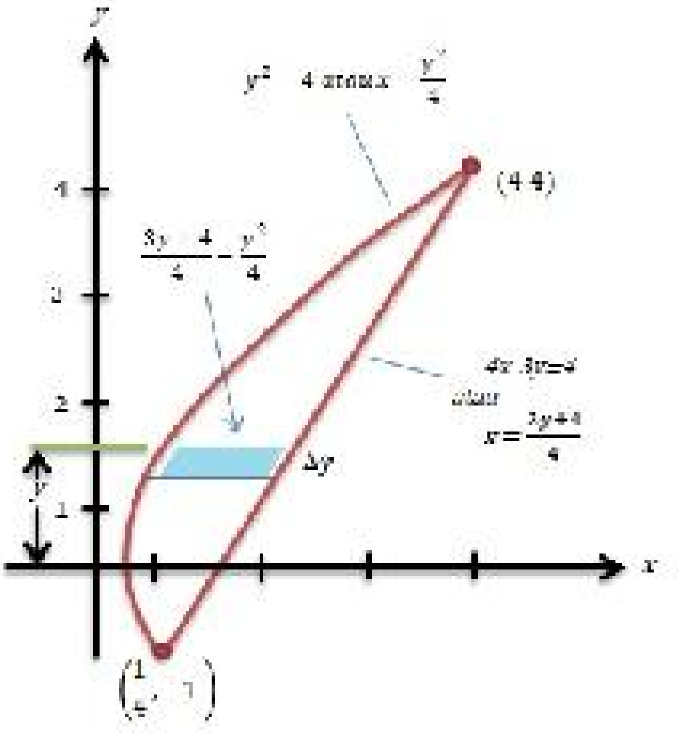


Misalnya, jika diketahui luas suatu bidang datar yang dibatasi oleh kurva $f(x)$ dan $g(x)$ pada rentang [a,b] di sumbu x, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Interval $a \leq x \leq b$ dibagi dalam n sub interval dengan lebar yang sama (Δx).
2. Dari setiap sub interval dibuat suatu segiempat (pias) yang lebarnya Δx dan panjangnya antara dua kurva $f(x)$ dan $g(x)$ sehingga panjangnya menjadi $[f(x) - g(x)]$. Sehingga luas segi empat yang bersangkutan menjadi $[f(x) - g(x)]\ \Delta x$.
3. Luas daerah yang dicari akan mendekati jumlah luas segi empat dari semua sub interval, yaitu $A \approx \sum_{i=1}^{n} [f(x) - g(x)]\ \Delta x$.
4. Jika subintervalnya dibuat sekecil mungkin sampai $\Delta x \to 0$ untuk semua i sedemikian hingga $n \to \infty$, maka luas bidang datar yang dicari adalah $A = \lim_{n\to\infty} [f(x) - g(x)]\ \Delta x$.
5. Sehingga luas bidang datar yang dibatasi oleh kurva $y = e^x$ dan

$y = x$ pada rentan [a,b] di sumbu x adalah $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\Delta x$.

Contoh 2
Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh parabol $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$.



Daerah ini kita potong-potong menjadi jalur-jalur secara horizontal. Dalam hal ini kita menggunakan y sebagai variabel dalam integral, dan bukan x. Perhatikan gambar di atas, pada gambar terlihat bahwa jalur-jalur yang datar itu selalu bermula pada parabol (di sebelah kiri) dan berakhir pada garis (di sebelah kanan). Sehingga luasnya menjadi
:

$$A = \int_{-1}^{4} \left[\frac{3y + 4 - y^2}{4} \right] dy$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{4} (3y + 4 - y^2)\, dy \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{4} (3y + 4 - y^2)\, dy \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{3y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{4} \\ &= \frac{1}{4} \left[(24 + 16 - \frac{64}{3}) - (\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3}) \right] \\ &= \frac{125}{24} \approx 5,21 \end{aligned}$$

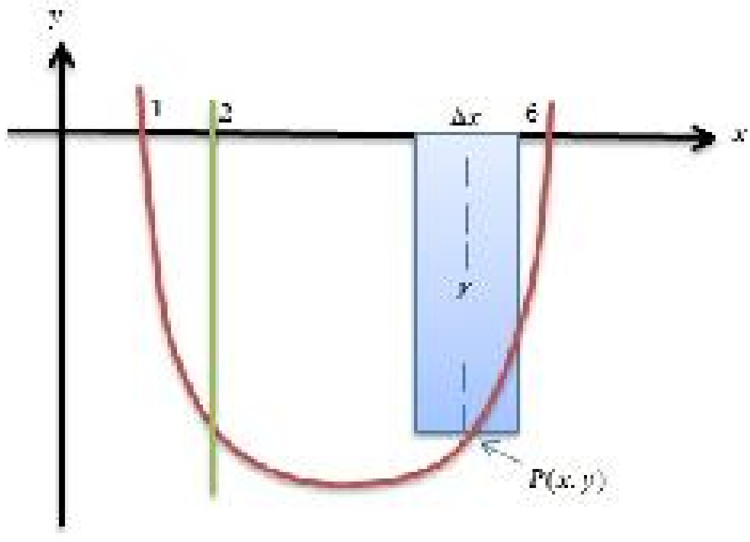
1.1.3 Daerah di Bawah Sumbu x

Luas dinyatakan oleh bilangan yang tak negatif. Apabila grafik $y = f(x)$ terletak di bawah sumbu x maka $\int_a^b f(x)\, dx$ adalah bilangan negatif, sehingga tidak dapat melukiskan suatu luas. Akan tetapi bilangan itu adalah negatif untuk luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan $y = 0$.

Contoh 3
Cari luas parabola yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 - 7x + 6$, sumbu x dan garis-garis $x = 2$ dan $x = 6$.

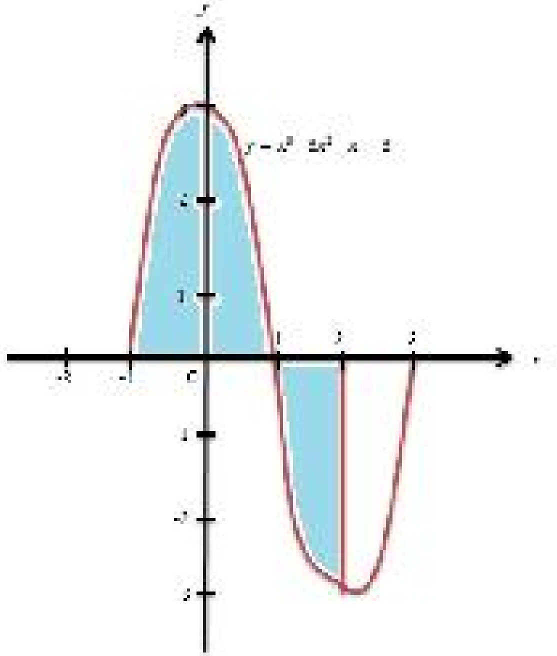
Jawab
Untuk persegi panjang yang didekati yang ditunjukkan dalam gambar, lebar adalah Δx, tinggi adalah $-y = (x^2 - 7x + 6)$ dan luas adalah $-(x^2 - 7x + 6)\, \Delta x$. Luas yang ditanyakan adalah :

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{2}^{6} -(x^2+7x-6)\,\Delta x \\
&= -(\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+6x)]_2^6
\end{aligned}
$$



Contoh 4
Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, ruas sumbu $x = -1$ dan $x = 2$, dan oleh garis $x = 2$.

Jawab
Daerah R adalah daerah yang diarsir pada gambar. Perhatikan bahwa ada sebagian di atas sumbu x dan ada yang di bawah sumbu x. Luas



masing-masing bagian ini harus dihitung secara terpisah. Mudah dihitung bahwa kurva di atas memotong sumbu x di -1, 1, dan 3 sehingga :

$$
\begin{aligned}
A(R) &= \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2} \\
&= 4 - \left(-\frac{7}{4}\right) = 23
\end{aligned}
$$

1.1.4 Jarak dan Perpindahan

Pandang suatu benda yang bergerak sepanjang garis lurus dengan kecepatan v(t) pada saat t. Bila $v(t) \geq 0$, maka $\int_{a}^{b} v(t)\, dt$ menyatakan jarak yang ditempuh dalam selang waktu $a \leq t \leq b$. Namun, v(t) dapat pula bernilai negatif (yang berarti bahwa benda itu bergerak dalam arah sebaliknya), maka:

$$\int_a^b v(t)\ dt = s(b) - s(a)$$

Menyatakan **perpindahan** benda itu, yang berarti, jarak lurus dari tempat berangkat $s(a)$ ke tempat akhir $s(b)$. Untuk mendapat **jarak keseluruhan** yang ditempuh benda selama $a \leq t \leq b$, kita harus menghitung $i\int_a^b |v(t)|\ dt$, luas daerah anatara kurva kecepatan dan sumbu-t.

Contoh 5

Sebuah benda bergerak di sepanjang suatu garis lurus sedemikian rupa sehingga kecepatannya pada saat t adalah $v(t) = 3t^2 - 24t + 36$ kaki per detik. Carilah perpindahan yang ditempuh benda itu untuk $-1 \leq t \leq 9$.

Jawab

$$\begin{aligned} Perpindahan &= \int_{-1}^{9} (3t^2 - 24t + 36)\ dt \\ &= t^3 + 12t^2 + 36t|_{-1}^{9} \\ &= (729 - 972 + 324) - (-1 - 12 - 36) \\ &= 130 \end{aligned}$$

SOAL-SOAL

1. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = 6 - 3x$ dan parabola $y = 12 - 3x^2$.
2. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x^2$, $y = 0$ dan ordinat $x = 2$ dan $x = 5$.
3. Gambarlah daerah R yang dibatasi oleh $y = x + 6$, $y = x^3$ dan $2y + x = 0$, kemudian hitunglah luasnya.
4. Tentukan luas yang dibatasi oleh garis $y = -x + 2$ dan $y = x^2$.
5. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4x - x^2$ dan garis $x = 6$, sumbu x dan sumbu y.
6. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 2x - 3$ dan garis $x = 1$, $x = 4$, sumbu x dan sumbu y.

7. Luas daerah yang dibatasi oleh $y = 2x^2 - 8x + 6$, $y = 2x - 2$, $x = -1$ dan $x = 4$.
8. Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = cosx$ dan sumbu x dalam interval $x = 0$ dan $x = \pi$.
9. Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 3x^2 + 6x - 9$ dan sumbu x.
10. Tentukana luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x˘2$ dan $y = ˘3x + 2$ dalam interval $x = ˘2$ dan $x = 3$.

1.2 Volume Benda dalam Bidang

Sebuah benda pejal hasil putaran diperoleh dengan memutar suatu daerah dalam bidang mengelilingi garis yang tidak memotong daerah tersebut. Garis dimana rotasi berlangsung disebut sumbu putaran. Terdapat tiga benda yang dapat dihitung volumenya dengan menggunakan integral yaitu lempengan, cakram, dan cincin.

Benda putar dapat didefinisikan sebagai berikut, apabila diambil suatu fungsi yaitu $y = f(x)$ dan fungsi tersebut kontinu tak negatif pada suatu interval [a,b] (seperti pada gambar 1.2). Ketika daerah antara sumbu x dan kurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, diputar terhadap sumbu x, maka akan diperoleh daerah tiga dimensi yang dinamakan dengan **benda putaran**. Pada kasus tersebut, sumbu putarnya adalah sumbu x.

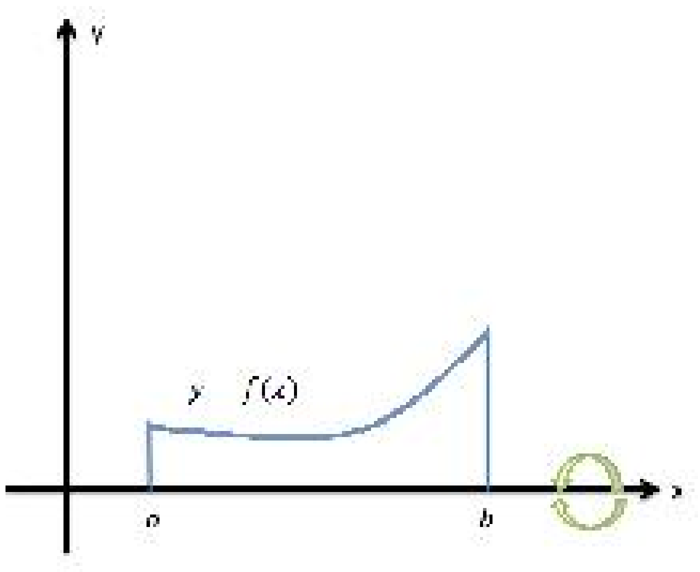


Figure 1.2: Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$

1.2.1 Metode Cakram

Pada gambar 1.3, terlihat bahwa untuk menemukan volume dari benda putar kita harus mencari volume di setiap interval yang setiap bagiannya didekati oleh suatu bidang yang berpotongan secara tegak lurus dengan sumbu putarnya. Pada gambar tersebut, bidang potongnya

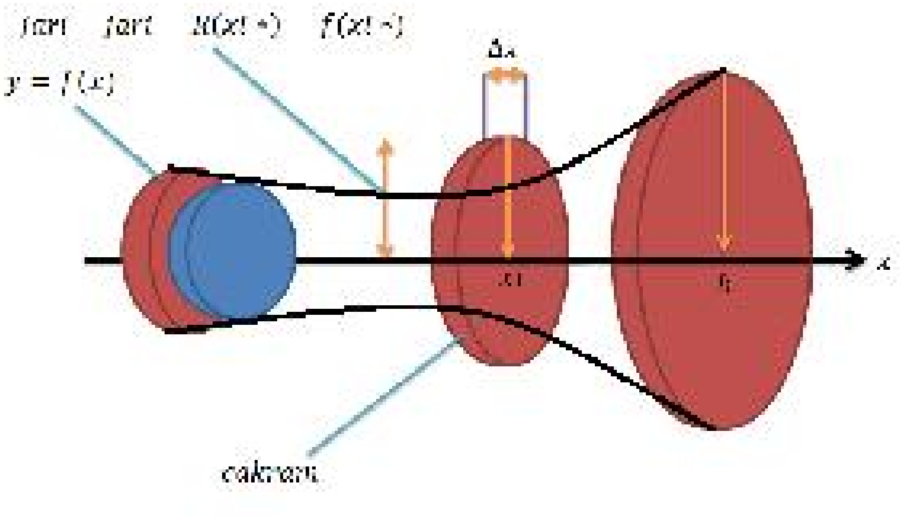


Figure 1.3: Daerah diputar mengelilingi sumbu x

merupakan sebuah cakram.

Misal, pada interval $[a,b]$ diambil interval sejauh n bagian dengan memiliki lebar Δx dan terdapat satu titik x dalam setiap intervalnya. Kita amati bahwa setiap cakram pada interval tersebut berbentuk sebuah silinder dengan memiliki jari-jari $R(x) = f(x)$ dan memiliki tinggi Δx, sehingga volume setiap cakramnya yaitu :

$$\Delta V = \pi\ [R(x)]^2\ \Delta x = \pi\ [f(x)]^2\ \Delta x$$

Maka didapatkan volume eksak dengan benda putaran yaitu :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\ dx$$

Kemudian, untuk mendapatkan volume suatu benda yang memiliki putaran dengan menghasilkan suatu bidang datar diantara sumbu y pada suatu kurva $x = F(y) \geq 0$, $c \leq y \leq d$, dan diputar terhadap sumbu y, volume dapat dihitung menggunakan metode penyelesaian yang sama seperti sebelumnya. Dalam kasus ini, cukup menukar variabel

x dengan y pada rumus sebelumnya. Sehingga didapat rumus seperti berikut ini :

Rumus Cakram untuk perputaran terhadap sumbu x
Volume benda putaran yang dihasilkan oleh perputaran bidang datar antara kurva kontinu tak negatif dan sumbu x yaitu $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, yang diputar dimana sumbu x sebagai porosnya:

$$V = \pi \int_a^b (jari - jari\ cakram)^2\ dx = \pi \int_a^b [f(x)^2]\ dx$$

Contoh 1
Tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu x dan garis $x = 4$. Apabila R diputar mengelilingi sumbu x.

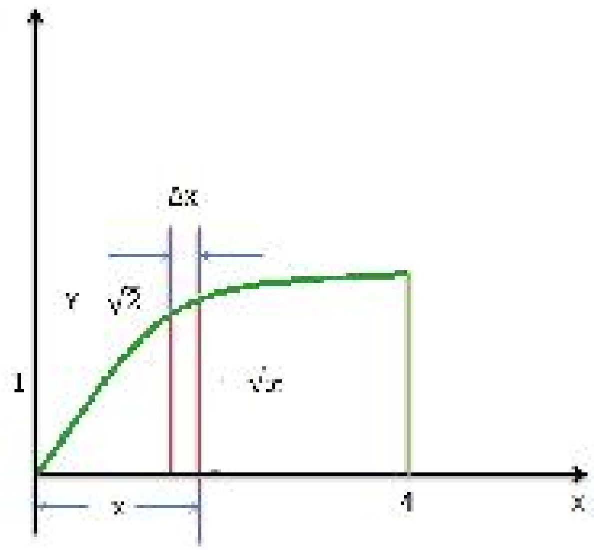


Figure 1.4: Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu x dan garis $x = 4$

Jawab
Pada gambar 1.5 dilihat daerah dengan sebuah jalur pemotongan. Apa-

bila R diputar mengelilingi sumbu x, daerah ini akan membentuk sebuah benda putar dan jalur tersebut membentuk sebuah cakram yang volumenya ΔV dapat diapkroksimasi dengan volume sebuah tabung dengan tinggi Δx dan dengan jari-jari alas $\Delta V \approx \pi(\sqrt{x})^2 \Delta x$, volume tabung ini adalah $\pi r^2 h$. Apabila volume tabung-tabung ini dijumlahkan kemudian diintegralkan, maka:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^4 x\,dx \\
&= \pi \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^4 \\
&= \pi \frac{16}{2} \\
&= 8\pi \approx 25.13
\end{aligned}
$$

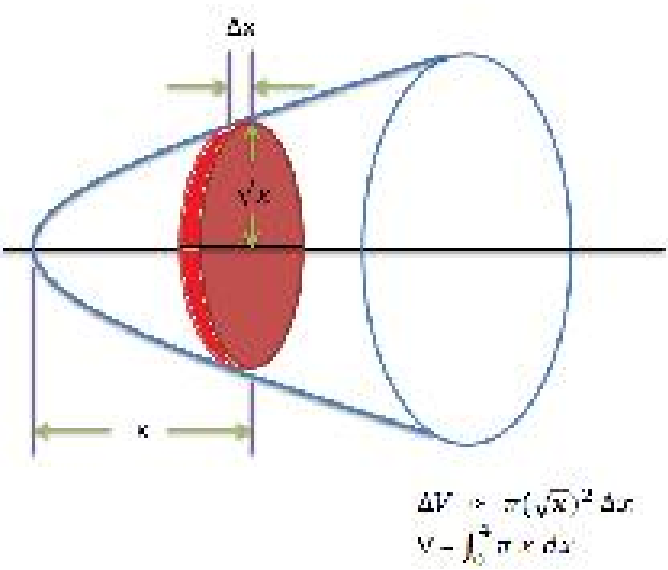


Figure 1.5: Daerah diputar mengelilingi sumbu x

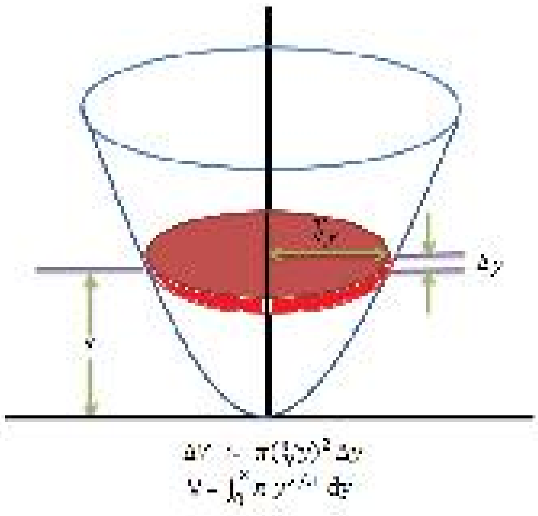


Figure 1.6: Daerah diputar mengelilingi sumbu y

Rumus Cakram untuk perputaran terhadap sumbu y
Volume benda putaran yang dihasilkan oleh perputaran bidang datar antara kurva dan sumbu y kontinu tak negatif $x = F(y)$, $c \leq y \leq d$, terhadap sumbu y yaitu:

$$V = \pi \int_{c}^{d} (jari - jari\ cakram)^2\, dy = \pi \int_{c}^{d} [F(y)^2]\, dy$$

Contoh 2
Tentukan volume suatu benda yang diputar apabila daerah hasilnya terbatas antara kurva $y = x^3$, sumbu y, dan garis $y = 3$ yang diputar terhadap sumbu y sebagai porosnya. (Gambar 1.7 dan Gambar 1.6)

Jawab
Dalam kasus ini, lebih mudah y dijadikan sebagai variabel pengintegralan. Perhatikan bahwa $y = x^3$ setara dengan $x = (\sqrt[3]{y})^2$ dan $\Delta V \approx (\sqrt[3]{y})^2\, \Delta y$, maka:

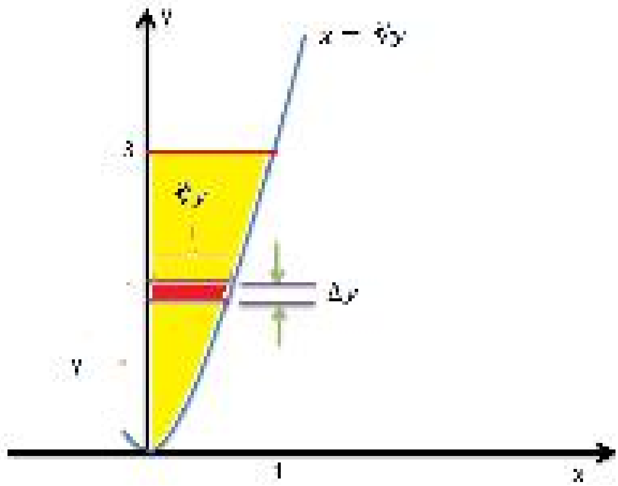


Figure 1.7: Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu y, dan garis $y = 3$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_3^0 y^{\frac{2}{3}}\, dy \\ &= \pi \left[\frac{3}{5}\, y^{\frac{5}{3}} \right]_3^0 \\ &= \pi \frac{9\sqrt[3]{9}}{5} \approx 11.76 \end{aligned}$$

Ketika sumbu putar sejajar dengan suatu sumbu koordinat, tetapi bidang datar masih terbatas pada sumbu putar, rumus yang digunakan adalah sebagai berikut :

Rumus Cakram untuk perputaran terhadap suatu garis tegak atau datar

1. (**Sumbu Putar adalah Garis Datar**)
   Volume benda putar yang dihasilkan oleh perputaran bidang datar antara garis datar $y = K$ dan kurva kontinu tak negatif $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ terhadap garis datar $y = K$ yaitu :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b (jarak\ y\ antara\ kurva\ dan\ sumbu)^2\ dx \\ &= \pi \int_a^b [f(x) - K]^2\ dx \end{aligned}$$

2. (**Sumbu Putar adalah Garis Tegak**)
   Volume benda putar yang dihasilkan oleh perputaran bidang datar antara garis tegak $x = L$ dan kurva kontinu tak negatif $x = F(y)$, $c \le y \le d$ terhadap garis datar $x = L$ yaitu :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d (jarak\ x\ antara\ kurva\ dan\ sumbu)^2\ dy \\ &= \pi \int_a^b [F(y) - L]^2\ dx \end{aligned}$$

Contoh 3
Tentukan volume dari suatu benda yang diputar terhadap garis $y = 1$ dengan bidang yang dibatasi oleh garis $y = \sqrt{x}$ serta dua garis $y = 1, x = 4$.

Jawab
Gambar 1.8 merupakan ilustrasi dari bidang datar serta benda putar yang dihasilkan.

Dalam kasus ini, jari-jari cakram searah dengan sumbu y. Jari-jari dirumuskan sebagai jarak y antara kurva dan sumbu putar:

$$\begin{aligned} R(x) &= |\ y\ kurva - y\ sumbu\ | \\ &= |\ \sqrt{x} - 1\ | \end{aligned}$$

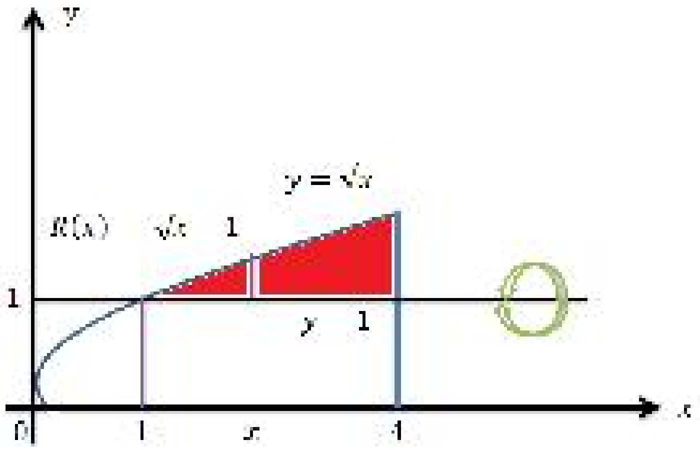


Figure 1.8: Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$ dan garis-garis $y = 1$, $x = 4$

Jadi, volume benda putaran yaitu:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 [R(x)]^2 \, dx \\ &= \pi \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 \, dx \\ &= \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) \, dx \\ &= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + x \right]_1^4 \\ &= \frac{7}{6}\pi \end{aligned}$$

1.2.2 Metode Cincin

Ada kalanya pengirisan suatu benda putar menghasilkan cakram-cakram dengan lubang di tengahnya, daerah yang demikian disebut cincin. Li-

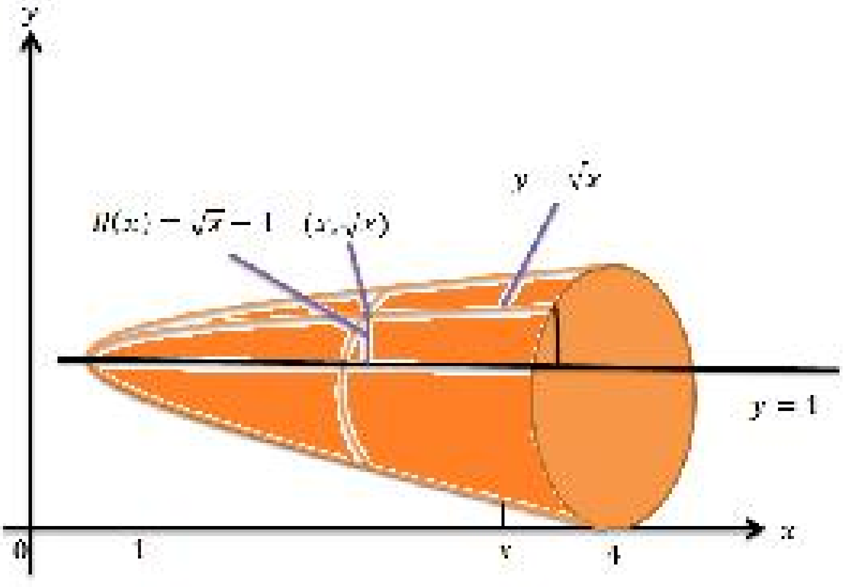


Figure 1.9: Daerah diputar mengelilingi sumbu x

hat pada gambar berikut:

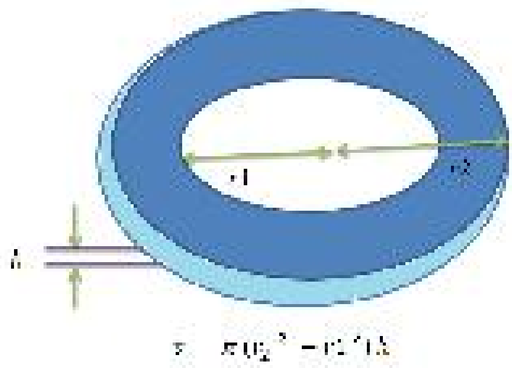


Figure 1.10: Volume benda putar dengan metode cincin

Contoh 4

Tentukan volume suatu benda yang diputar apabila daerahnya dibatasi oleh parabol-parabol $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ yang diputar terhadap sumbu x sebagai porosnya.

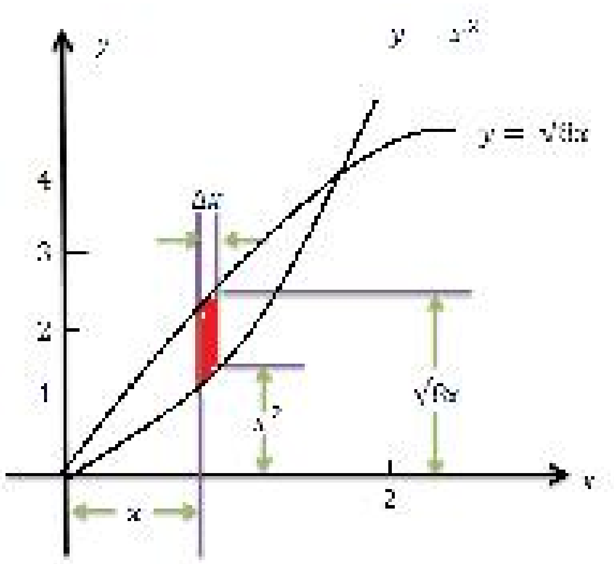


Figure 1.11: Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$

Jawab

Dalam kasus ini, metode yang digunakan yaitu dengan metode cincin. Pertama diaproksimasi seperti pada gambar dan diintegralkan.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (8x - x^4)\, dx \\ &= \pi \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right] s_0^2 \\ &= \frac{48\pi}{5} \approx 30.16 \end{aligned}$$

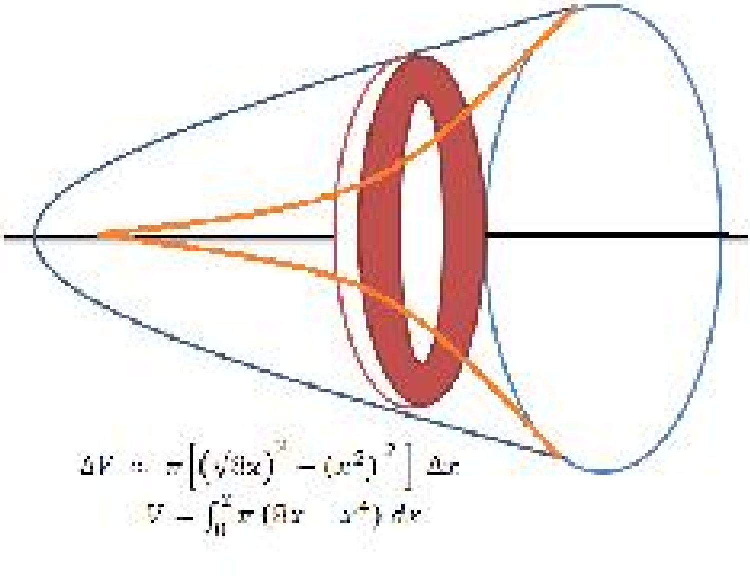


Figure 1.12: Daerah diputar mengelilingi sumbu x

Rumus Cincin untuk Perputaran Terhadap Garis Datar atau Datar

1. (**Sumbu Putar adalah Garis Datar**)
   Volume benda putaran yang dihasilkan oleh perputaran bidang datar antara kurva-kurava kontinu $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ atas interval $[a,b]$, dimana $K < g(x) \leq f(x)$, terhadap garis datar $y = K$ yaitu:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [(jari - jari\ luar)^2 - (jari - jari\ dalam)^2\ dx \\ &= \pi \int_a^b ([f(x) - K]^2 - [g(x) - K]^2\ dx \end{aligned}$$

2. (**Sumbu Putar adalah Garis Tegak**)
   Volume benda putaran yang dihasilkan oleh perputaran bidang datar antara kurva-kurava kontinu $x = F(y)$ dan $x = G(y)$ atas interval $[c,d]$, dimana $L < G(y) \leq F(y)$, terhadap garis datar

$x = L$ yaitu:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d [(jari - jari\ luar)^2 - (jari - jari\ dalam)^2\ dy \\ &= \pi \int_c^d ([F(y) - L]^2 - [G(y) - L]^2\ dy \end{aligned}$$

Contoh 5
Bidang datar yang terbatas antara parabola $y = x^2 + 1$ dan garis $y = -x + 3$ yang diputar terhadap sumbu x sebagai porosnya untuk menghasilkan suatu benda putaran. Tentukan volume benda putaran tersebut.

Jawab
Gambar bidang datar yang diberikan dan suatu ruas garis yang memotong bidang datar serta tegak lurus terhadap sumbu putar $y = 0$ (sumbu x). Daerah terbatas dan pelabelan untuk metode cincin adalah seperti berikut :

Jari-jari untuk cincin yang ditentukan oleh ruas garis yaitu :

jari-jari luar $= (-x + 3) - 0 = -x + 3$

jari-jari dalam $= (x^2 + 1) - 0 = x^2 + 1$

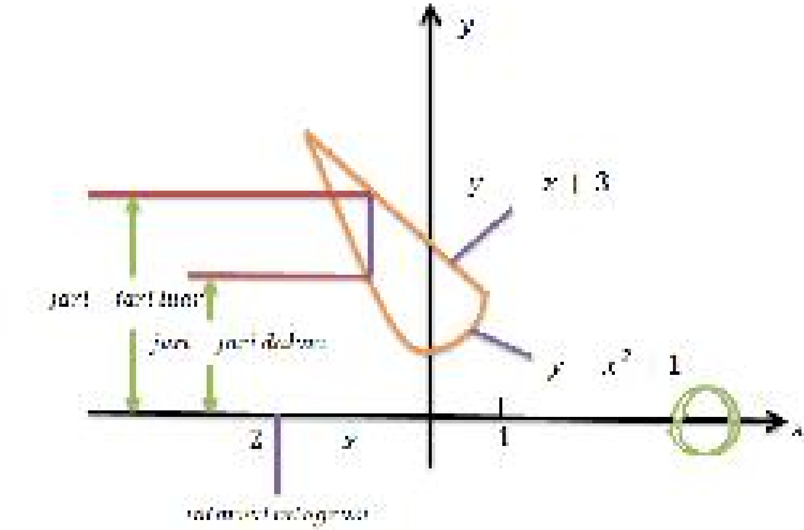


Figure 1.13: Daerah yang dibatasi parabola $y = x^2 + 1$ dan garis $y = -x + 3$

Volume benda putaran yaitu :

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-2}^{1} \left[(-x+3)^2 \; - \; (x^2+1)^2)\right] \; dx \\
&= \pi \int_{-2}^{1} (8 - 6x - x^2 - x^4) \; dx \\
&= \pi \left[8x - 3x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 c \right]_{-2}^{1} \\
&= \frac{117}{5}\pi
\end{aligned}
$$

SOAL-SOAL

1. Cari volume benda putaran yang dihasilkan ketika bidang datar yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ dan sumbu x diputar terhadap sumbu x.
2. Tentukan volume benda pejal yang terbentuk apabila daerah yang

dibatasi dengan kurva $y = x^3$ dan garis $x = 2$ diputar mengelilingi sumbu x.

3. Cari volume benda putaran yang dihasilkan ketika bidang datar antara sumbu y dan kurva $x = \frac{2}{y}$, $1 \leq y \leq 4$ diputar terhadap sumbu y.
4. Tentukan volume benda putaran yang dihasilkan ketika bidang datar antara parabola $x = y^2 + 1$ dan garis $x = 3$ diputar terhadap garis $x = 3$.
5. Tentukan volume benda pejal yang diperoleh dengan memutar daerah dalam kuadran pertama yang dibatasi di atas oleh parabola $y = 2 - x^2$ dan di bawah oleh parabola $y = x^2$ mengelilingi sumbu y.
6. Suatu daerah R yang dibatasi oleh parabola $y = 4x^2$, garis $x = 0$ dan $y = 16$. Tentukan volume benda pejal yang diperoleh degan memutar daerah R mengelilingi garis $y = -2$.
7. Tentukan volume benda pejal yang diperoleh dengan memutar daerah di kuadran pertama di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, dan antara $y = a$ dan $y = r$ (dimana $0 < a < r$) mengelilingi sumbu y.
8. Daerah dalam kuadran I terbatas atas oleh parabola $y = x^2$, terbatas bawah oleh sumbu x, dan terbatas kanan oleh garis $x = 2$. Tentukan volume benda putaran yang dihasilkan ketika daerah tersebut diputar terhadap sumbu y.
9. Hitunglah volume benda putaran yang dihasilkan ketika bidang datar yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 1$ dan $y = x + 3$ diputar terhadap sumbu x.
10. Hitunglah volume benda putaran yang dihasilkanketika bidang datar yang dibatasi oleh kurva-kurva $y = x$ dan $y = x^2$ atas interval $[0, 1]$ diputar terhadap garis $x = -1$.

1.3 Volume Benda Putar: Kulit Tabung

Benda putar dibentuk dengan memutar suatu bidang datar sekeliling sebuah garis, disebut sumbu putar pada bidang datar. Metode yang dapat digunakan untuk menentukan volume benda yang terbentuk yang diakibatkan oleh suatu daerah R yang diputar terhadap sumbu putar adalah metode sel silinder. Benda yang dihasilkan akan berbentuk sel silinder. Sel silinder merupakan suatu benda pejal yang termuat antara dua silinder dengan pusat dan sumbu yang sama, dengan jari-jari luar serta jari-jari dalam.

$$
\begin{aligned}
h &= tinggi\ silinder \\
r_1 &= jari - jari\ lingkaran\ dalam \\
r_2 &= jari - jari\ lingkaran\ luar \\
r &= rata - rata\ jari\ silinder\ antara\ lingkaran\ dalam\ dan\ luar \\
v &= volume\ silinder
\end{aligned}
$$

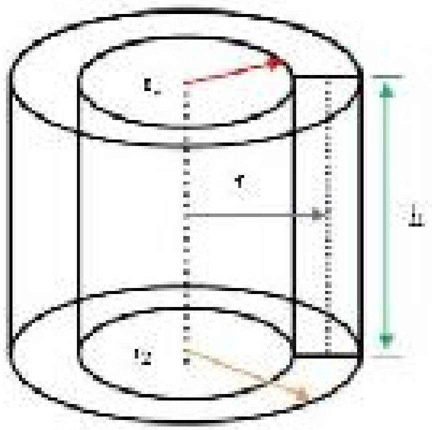


Figure 1.14: Sel Silinder

Maka volume sel silinder adalah

$$
\begin{aligned}
V &= (luas\ alas) \times (tinggi) \\
&= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \\
&= \pi (r_2^2 - r_1^2) h \\
&= \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) h \\
&= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h (r_2 - r_1)
\end{aligned}
$$

Dari rumus diatas, dapat dihasilkan suatu pendekatan untuk menghitung volume benda putar dengan metode sel silindris:

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= 2\pi \times (rata - rata\ jari - jari) \times (tinggi) \times (tebal) \\
&= 2\pi r h \Delta r
\end{aligned}
$$

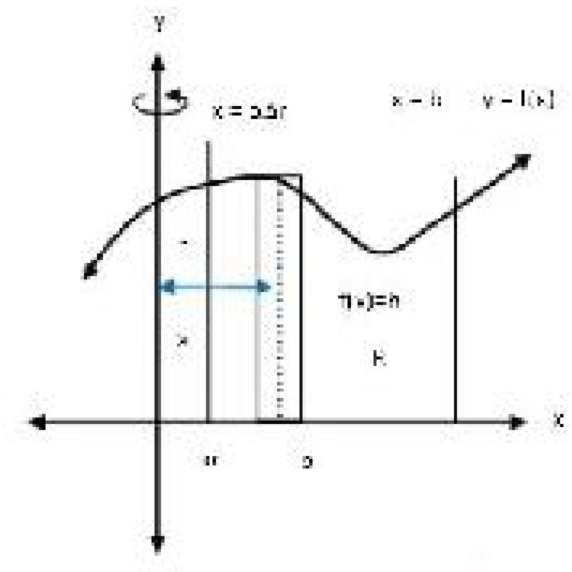


Figure 1.15: Kurva

Dengan pendekatan volume sel silinder dihasilkan $\Delta V = 2\pi rh\Delta r = 2\pi xf(x)\Delta x$, dimana x terletak pada $a \leqslant x \leqslant b$. Jadi volume benda putarnya diberikan oleh $V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.
Untuk menentukan volume benda putar dengan metode kulit tabung,meng gunakan rumus sesuai sumbunya.
Sumbu putar horizontal

$$V = 2\pi \int_c^d [p(y)t(y)]dy$$

Sumbu putar vertikal

$$V = 2\pi \int_a^b [p(x)t(x)]dx$$

Contoh 1
Tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh putaran daerah yang

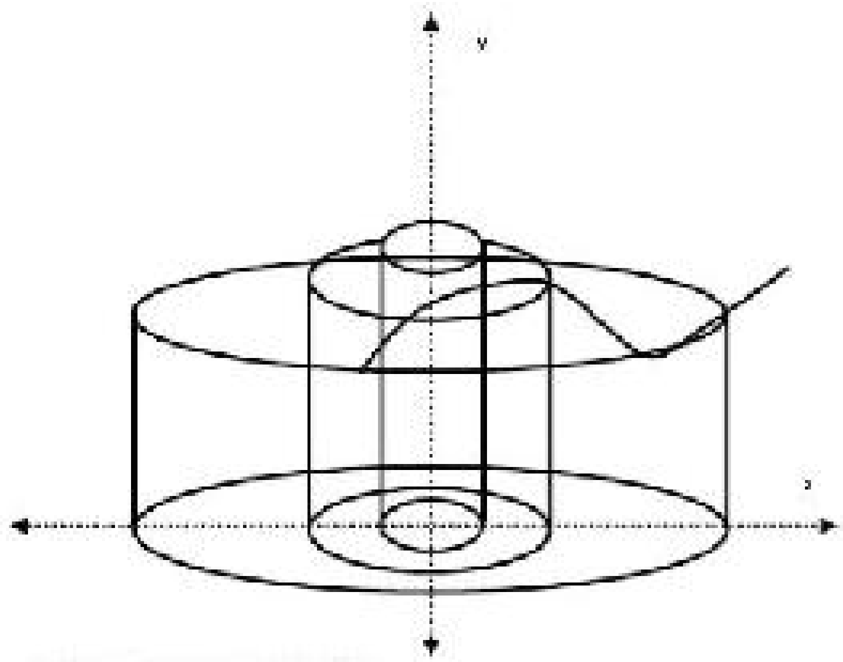


Figure 1.16: Sel Silinder

dibatasi oleh $y = x - x^3$ dan sumbu x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ dengan sumbu putar adalah sumbu y.

Jawab

Karena sumbu putarnya vertikal, gunakan persegi panjang vertikal, seperti yang ditunjukkan oleh gambar di bawah.

Ketebalan mengindikasikan bahwa x merupakan variabel dalam proses integrasi yang akan dilakukan. Jarak antara pusat persegi panjang dengan sumbu putaran adalah $p(x) = x$, dan tingginya adalah $h(x) = x - x^3$. Karena rangenya antara 0 sampai 1, maka volume benda putar yang terbentuk dapat ditentukan sebagai berikut.

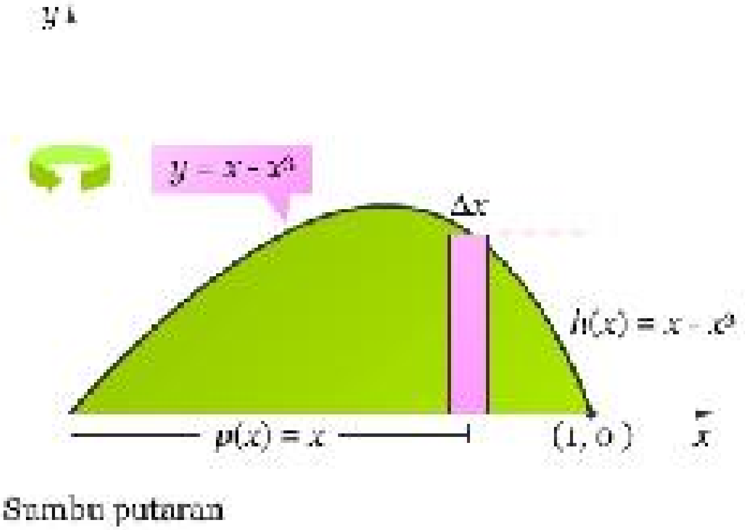
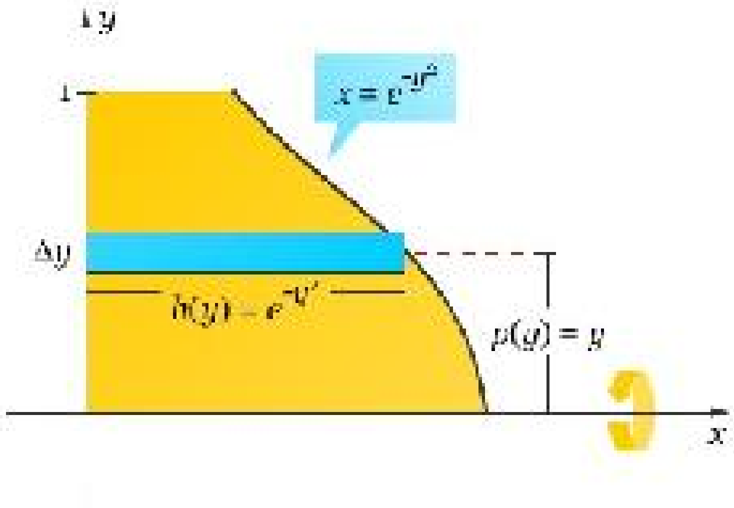


Figure 1.17: Fungsi Satu Variabel

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_a^b p(x)h(x)dx = 2\pi \int_0^1 x(x-x^3)dx \\
&= 2\pi \int_0^1 x^2 - x^4 dx \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\
&= \frac{4\pi}{15}
\end{aligned}
$$

Contoh 2
Tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh putaran daerah yang dibatasi oleh $x = e^{(}-y^2)$ dan sumbu $y = (0 \leqslant y \leqslant 1)$ dengan sumbu x sebagai sumbu putarnya.

Jawab
Karena sumbu putarannya horizontal, gunakanlah persegi panjang



horizontal, seperti yang ditunjukkan gambar di atas. Jarak antara pusat persegi panjang dan sumbu putarannya adalah $p(y) = y$, dan panjang dari persegi panjangnya adalah

$$h(y) = e^{(-y^2)}$$

Karena range dari y dari 0 sampai 1, maka volume benda putarnya dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_c^d p(y)h(y)dy \\ &= 2\pi \int_0^1 y(e^- y^2)dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= -\pi \left[e^- y^2\right]_0^1 \\ &= \pi[1 - \frac{1}{e}] \\ &\approx 1,986 \end{aligned}$$

SOAL-SOAL

Tentukan volume suatu benda yang diputar ketika daerahnya dibatasi oleh garis dan kurva yang diputar terhadap sumbu y sebagai porosnya.

1. $y = 2 - x^2,\ y = x^2,\ x = 0.$
2. $y = x,\ y = \frac{-1}{2}x,\ x = 2.$
3. $y = 2x,\ y = \frac{1}{2}x,\ x = 1.$
4. $y = 2x - 1,\ y = 3 - 2x,\ x = 0,\ x = 2.$
5. $y = x^2 - 5x + 6,\ y = 0.$

Tentukan volume suatu benda yang diputar ketika daerahnya dibatasi oleh garis dan kurva yang diputar terhadap sumbu x sebagai porosnya.

6. $x = \sqrt{y},\ x = -y,\ y = 2.$
7. $x = 2y - y^2,\ x = y.$
8. $y = x,\ y = 2x,\ y = 2.$
9. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ y = 2 - x.$
10. $xy = 4,\ x + y = 5.$
11. Tentukan volume suatu benda yang diputar oleh perputaran daerah di kuadran I yang dibatasi oleh garis $x = 0$ dan kurva $x = 12(y^2 - y^3)$ terhadap :
    a. Sumbu x.
    b. Garis $y = 1$.
    c. Garis $y = \frac{8}{5}$.
    d. Garis $y = -\frac{2}{5}$.

1.4 Panjang Kurva pada Bidang (Kurva Rata)

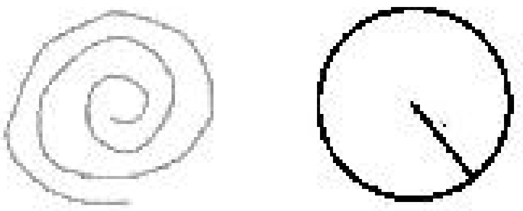


Figure 1.18: Sel Silinder

Kurva Rata adalah kurva yang terletak seluruhnya pada sebuah bidang. Jika diketahui sebuah kurva dengan persamaan parameter *x = f(t)* dan *y = g(t)*, untuk $x = a$ sampai $x = b$ dengan interval $a \leqslant t \leqslant b$ dibagi menjadi n subinterval. Mula-mula pandang satu subinterval, karena subintervalnya sangat kecil maka potongan kurva (Δs) dapat dianggap sebagai suatu garis lurus (Δw) sedemikian hingga $\Delta s \approx \Delta w$, dari hal tersebut menghasilkan suatu partisi pada selang $[a,b]$ menjadi n selang bagian dengan titik - titik

$$a = t_0 \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n = b$$

Andaikan pula,

$$\Delta x_{i-1} = x_{i-1} - x_i - |\Delta x_i| < |\Delta|$$

adalah panjang partisi δ untuk setiap i. Selanjutnya misalkan titik $(x_i, 0)$ pada sumbu x berkaitan dengan titik $p_i(x_i, y_i)$ pada kurva mulus seperti pada gambar.

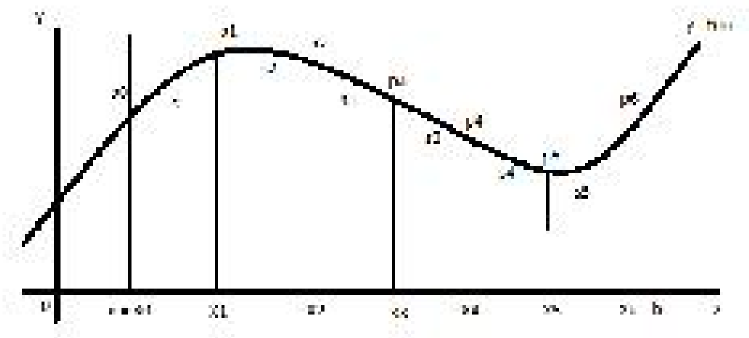


Figure 1.19: Kurva Rata

Sebuah kurva rata disebut mulus apabila kurva itu ditentukan oleh persamaan-persamaan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, dengan ketentuan bahwa turunan-turunan f' dan g' adalah kontinu pada [a,b] sedangkan $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak bersama-sama nol diselang (a,b). Menurut rumus Phytagoras jarak antara dua titik, panjang busur didefinisikan sebagai

$$|p_1, p_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$atau$$

$$\Delta w_1 = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Pembagian kurva mengakibatkan kurva tersebut terbagi oleh titik-titik $Q_0, Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}, Q_n$, seperti diperlihatkan pada gambar berikut.

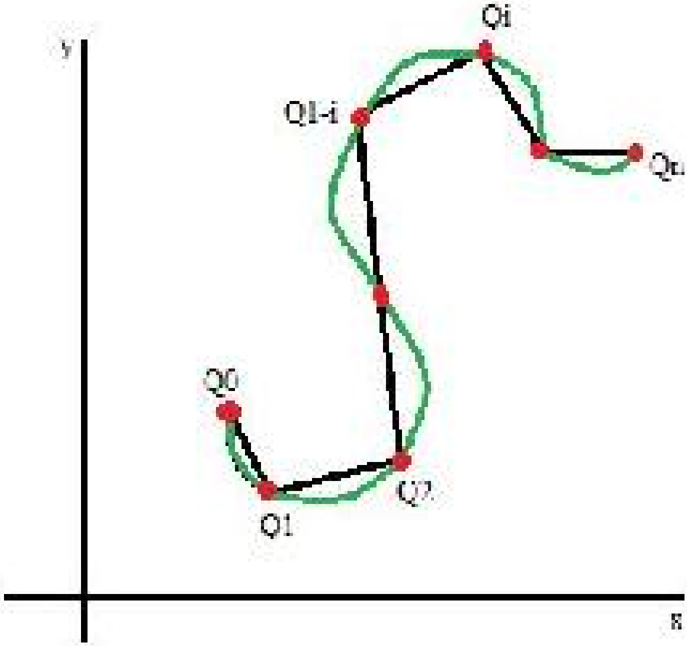


Figure 1.20: Pembagian Kurva

Kemudian kurva diaproksimasi dengan segi banyak, dihitung panjangnya dan ditarik limitnya apabila norma partisi menuju nol. Khususnya diaproksimasi "Panjang" Δs_i tertentu pada kurva (Gambar 1.20) oleh

$$\begin{aligned}\Delta w_1 &= \sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}\\ &= \sqrt{[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2+[g(t_i)-g(t_{i-1})]^2}\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata untuk turunan, kita mengetahui adanya titik t_i dan t_i adalah (t_{i-1},t_i) sehingga

$$\begin{aligned}f(t_i)-f(t_{i-1}) &= f'(t_i)\Delta(t_i)\\ g(t_i)-g(t_{i-1}) &= g'(t_i)\Delta(t_i)\end{aligned}$$

dengan $\delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Maka

$$\Delta w_i = \sqrt{[f'(t_i)\Delta t_i]^2+[g'(t_i)\Delta t_i]^2}$$

$$atau$$

$$\Delta w_i = \sqrt{[f'(t_i)]^2+[g'(t_i)]^2}\Delta t_i$$

dan panjang dari segi banyak adalah

$$\sum_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t_i)]^2+[g'(t_i)]^2}\Delta t_i$$

Jumlah di ruas kanan ini, serupa dengan jumlah Riemann, kesulitan yang dialami adalah bahwa t_i dan t_i tidak melukiskan titik yang sama. Akan tetapi dapat dibuktikan bahwa hal tersebut tidak mempengaruhi hasil apabila ditarik limitnya. Sehingga dapat didefinisikan panjang L kurva sebagai limit bentuk di atas, apabila norma partisi mendekati nol.

$$\begin{aligned}L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}dt\\ &= \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt\end{aligned}$$

Ada dua kasus yang menarik perhatian, apabila persamaan kurva itu adalah $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, maka bentuk terakhir menjadi x_i yang terletak pada interval $a \leq x_i \leq b$. Sehingga, bilamana partisinya mendekati nol dihasilkan,

$$\lim_{|\Delta|n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{\Delta dy}{\Delta dx})^2} dx$$

Integral tentu dikenal untuk menghitung panjang busur. Jadi, jika L menyatakan panjang busur f dari a sampai b, maka

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{\Delta dy}{\Delta dx})^2} dx$$

Pendekatan lain, untuk menghitung panjang busur adalah busur adalah bila diberikan oleh persamaan $x = g(y)$ dengan $c \leq y \leq d$,maka panjang busur L dari titik c ke d diberikan oleh,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{\Delta dx}{\Delta dy})^2} dy$$

Contoh 1
Tentukan keliling lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$.

Jawab
Persamaan Lingkaran kita tulis dalam bentuk parameter:

$$x = a\ cos\ t,$$

$$y = a\ sin\ t,$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Sehingga,

$$\frac{dx}{dt} = -a\ sin\ t,$$

$$\frac{dy}{dt} = a\ cos\ t.$$

Dengan menggunakan rumus yang pertama kita peroleh

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 sin^2 t + a^2 cos^2 t} dt \\
&= \int_0^{2\pi} a dt \\
&= [at]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi a
\end{aligned}
$$

Contoh 2
Carilah panjang busur kurva, $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$ dari $y = 1$ ke $y = 2$.

Jawab
Dari

$$
x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2},
$$

dihasilkan

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y^3 - \frac{1}{4y^3} \\
&= \frac{4y^6 - 1}{4y^3} \\
1 + (\frac{dx}{dy})^2 &= 1 + (\frac{4y^6 - 1}{4y^3})^2 \\
&= \frac{16y^6 + (16y^{12} - 8y^6 + 1)}{16y^6} \\
&= \frac{16y^{12} + 8y^6 + 1}{16y^6} \\
&= \frac{4y^6 + 1}{(4y^3)^2} \\
&= (\frac{4y^6 + 1}{4y^3})^2
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, panjang busurnya diberikan oleh,

$$
\begin{aligned}
L &= \int_1^2 \sqrt{(\frac{4y^6+1}{4y^3})^2} dy \\
&= \int_1^2 \frac{4y^6+1}{4y^3} dy \\
&= \int_1^2 (y^3 + \frac{1}{4} y^{-3}) dy \\
&= [\frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{8} y^{-2}]_1^2 \\
&= [\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{8}(2)^-2)] - [\frac{1}{4}(1)^4 - \frac{1}{8}(1)^-2] \\
&= [\frac{1}{4}(1)^4 - \frac{1}{8}(1)^{-2}] \\
&= \frac{15}{4} + \frac{3}{32} \\
&= \frac{123}{32}
\end{aligned}
$$

Jadi, panjang busurnya adalah $\frac{123}{32}$ satuan.

Soal-Soal

Tentukanlah panjang busurnya.

1. $y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ antara $x = 0$ ke $x = 3$.
2. $y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ antara $x = 1$ ke $x = 4$.
3. $y = \frac{2}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}$ antara $x = 5$ ke $x = 8$.
4. $y = \frac{2}{3}(4 - x\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}$ antara $x = 1$ ke $x = 8$.
5. $6xy = y^4 + 3$ antara $y = 1$ ke $y = 4$.
6. $30xy^3 - y^8 = 15$ antara $y = 1$ ke $y = 2$.
7. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ dari $x = 1$ ke $x = 3$.
8. $(y+1)^2 = 4x^3$ dari $x = 0$ ke $x = 1$.
9. $y = \frac{x^4+3}{6x}$ dari $x = 1$ ke $x = 4$.
10. $y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2}$ dari $x = 1$ ke $x = 2$.

1.5 Luas Permukaan Putar

Jika sebuah busur AB diputar terhadap garis yang sebidang, maka akan terbentuk sebuah benda putar. Misalkan busur AB adalah busur dari lengkung $y = f(x)$ yang kontinu pada interval [a,b], dan memenuhi $f(x) \geq 0$ dalam interval tersebut. Jika $f(x)$ diputar terhadap sumbu x, maka akan terbentuk suatu benda putar.

Luas permukaan putar merupakan luas dari suatu permukaan benda putar yang dibentuk oleh kurva yang terletak pada sebuah bidang diputar mengelilingi garis pada bidang tersebut. Pertama-tama kita akan mencari rumus untuk luas permukaan **kerucut terpancung**. Sebuah kerucut terpancung merupakan bagian permukaan kerucut yang terletak antara dua bidang yang tegak lurus pada sumbu kerucut. Apabila jari-jari lingkaran alasnya adalah r_1 dan jari-jari lingkaran adalah r_2 sedangkan panjang ruas garis l dalam menkonstruksi kerucut antara dua lingkaran tersebut (rusuk kerucut terpancung), maka luas selimut kerucut terpancungnya adalah

$$A = 2\pi \left[\frac{r1 + r2}{2} \right] l = 2phi(jari - jari\ rata)(rusuk)$$

Rumus ini dapat ditentukan dengan menggunakan luas daerah lingkaran.

1.5.1 Luas Permukaan Benda Putar, Sumbu Putar Sumbu X

Misalkan $y = f(x)$ adalah persamaan kurva mulus pada kuadran pertama (dan kedua) di bidang yang terdefinisi pada interval $[a,b]$. Pada interval $[a,b]$ kita buat partisi dengan cara membagi interval menjadi n interval bagian dengan batas interval adalah titik-titik $a = x_o < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, akibatnya pada kurva mulus akan terbagi menjadi n kurva bagian. Andaikan $\triangle_{s_i}$ panjang kurva bagian ke i dan andaikan y_1, koordinat y sebuah titik pada bagian ini.

Apabila kurva diputar mengelilingi sumbu x sebagai porosnya, akan terbentuk suatu permukaan dan bagian $\triangle_{s_i}$ itu akan membentuk suatu permukaan bagian padanya. Luas dari bagian ini dapat ditentukan dengan nilai aproksimasi dari luas sebuah kerucut terpancung, yaitu $2\pi_{y_i} \triangle_{s_i}$.

Apabila luasan tersebut kita tambahkan semua dan kemudian menarik limitnya dengan membuat norma partisi menuju nol akan diperoleh hasil atau nilai dari luas permukaan putar itu. Hal tersebut dapat dilihat dari rumus di dalam persegi panjang.

Contoh 1
Tentukan luas permukaan dari suatu benda yang diputar yang dibangun dari permutaran kurva $y = \sqrt{x};\ 0 \leq x \leq 4$ mengelilingi sumbu x.

Jawab

$$
\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx \\
&= 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1+\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]^2}\ dx \\
&= 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1+\left[\frac{1}{4x}\right]}\ dx \\
&= \pi \int_0^4 \sqrt{4x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\ dx \\
&= \pi \int_0^4 \sqrt{4x+1}\ dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{4}.\frac{2}{3}.(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 \\
&= \frac{\pi}{6}\left[17^{\frac{2}{3}} - 1^{\frac{2}{3}}\right]
\end{aligned}
$$

Apabila persamaan kurva diatas merupakan kurva dalam bentuk parameter $x = f(t),\ y = g(t),\ a \leq t \leq b$, maka rumus untuk permukaan menjadi

$$A = 2\pi \int_*^{**} y\, ds\ = 2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\ dt$$

1.6 Rangkuman

1. Andaikan $f(x)$ dan $g(x)$ menentukan persamaan-persamaan kurva pada bidang xy dan andaikan f dan g kontinu dan keduanya tak negatif dengan $g(x) \leq f(x)$ pada selang $x_1 \leq x \leq x_2$. Jika daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik dari $f(x)$, $x = x_1$, $x = x_2$, dan $g(x)$, maka luas daerah R, ditulis $A(R)$, ditentukan oleh :

$$A(R) = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\ dx$$

2. Misal, pada interval $[a,b]$ diambil interval sejauh n bagian dengan memiliki lebar Δx dan terdapat satu titik x dalam setiap intervalnya. Kita amati bahwa setiap cakram pada interval tersebut berbentuk sebuah silinder dengan memiliki jari-jari $R(x) = f(x)$ dan memiliki tinggi Δx, sehingga volume setiap cakramnya yaitu :

$$\Delta V = \pi\ [R(x)]^2\ \Delta x = \pi\ [f(x)]^2\ \Delta x$$

Maka didapatkan volume eksak dengan benda putaran yaitu :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\ dx$$

3. Volume benda putaran yang dihasilkan oleh perputaran bidang datar antara kurva-kurava kontinu $x = F(y)$ dan $x = G(y)$ atas interval $[c,d]$, dimana $L < G(y) \leq F(y)$, terhadap garis datar $x = L$ yaitu:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_c^d [(jari - jari\ luar)^2 - (jari - jari\ dalam)^2\ dy \\ &= \pi \int_c^d ([F(y) - L]^2 - [G(y) - L]^2\ dy \end{aligned}$$

4. jika L menyatakan panjang kurva fungsi f dari $x = a$ sampai $x = b$, maka

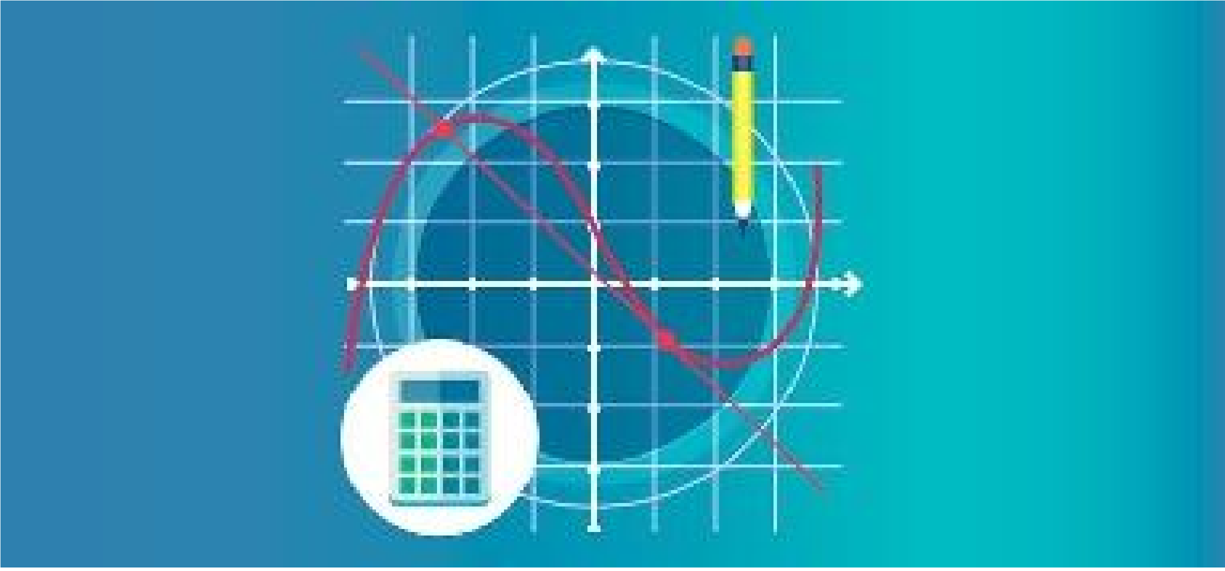
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{\Delta dy}{\Delta dx})^2} dx$$

Pendekatan lain, untuk menghitung panjang busur adalah bila diberikan oleh persamaan $x = g(y)$ dengan $c \leq y \leq d$, maka panjang busur L dari titik $y = c$ ke $y = d$ diberikan oleh,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{\Delta dx}{\Delta dy})^2} dy$$

Bahan Diskusi Bab 1:

1. Misalkan daerah R dibatasi kurva $y = f(x)$, $y = g(x)$, garis $x = a$ serta $x = b$ dimana $f(x) > g(x) > 0$ pada interval $a < x < b$, maka rumus luas daerah R adalah $\int_a^b f(x) - g(x)$. Apakah rumus tersebut tetap dapat digunakan jika pada interval tersebut $f(x) > 0 > g(x)$? Bagaimana juga seandainya $0 > f(x) > g(x)$? Diskusikan dengan teman anda dalam kelompok kerja.
2. Dengan konsep benda putar, tentukan volume dan luas permukaan kerucut lingkaran terpancung dengan tinggi h, jari-jari alas R, dan jari-jari tutup r. Perhatikan bahwa anda harus menentukan terlebih dahulu daerah dan potongan kurva yang akan diputar serta persamaan garis sumbu putarnya.
3. Sumbu putar yang telah dijelaskan berbentuk garis mendatar atau tegak, Bagaimana seandainya sumbu putar tersebut berupa garis miring, misalkan $y = x$?



2. Fungsi Transenden

Setelah membaca dan memperlajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami pengertian fungsi transenden;
2. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
3. mempunyai kemampuan dan kreativitas dengan logis dan sistematis;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menentukan fungsi logaritma dan turunannnya;
2. memahami sifat - sifat fungsi logaritma natural;
3. menentukan fungsi invers dan turunannya;
4. menentukan fungsi eksponen asli;
5. menentukan fungsi eksponen umum dan fungsi logaritma umum;
6. menentukan fungsi trigonometri inverse;
7. menentukan turunan fungsi trigonometri;
8. menentukan fungsi hiperbola dan inversnya.

2.1 Fungsi Logaritma Asli

2.1.1 Fungsi Logaritma

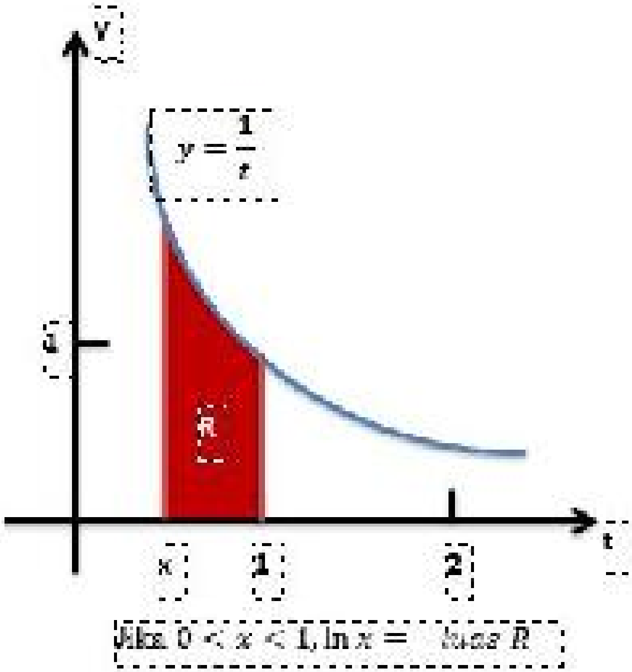
Fungsi logaritma didefinisikan pada eksponensial. Sifat logaritma dibuktikan dari sifat-sifat eksponensial. Berdasarkan definisi eksponensial, diperoleh

$$a^x = y$$

Persamaan diatas berlaku saat a bilangan bulat positif dengan $a \neq 1$ dan y adalah bilangan positif sembarang. Bentuk eksponensial diatas dapat diubah menjadi bentuk logaritma, yaitu

$$x =^a \log y$$

Akan tetapi mendefinisikan logaritma dari eksponensial memiliki kelemahan saat a adalah bilangan irrasional. Pada sisi lain, definisi logaritma harus berlaku bilamana a bilangan positif sembarang dan x bilangan riil. Oleh karena itu perlu didefinisikan fungsi logaritma yang didasarkan pada kalkulus.



Dari integral tak tentu telah diperoleh rumus, yaitu

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Rumus ini berlaku jika $n \neq 1$, sehingga untuk menghitung integral tak tentu $\int x^n dx$ untuk $n = -1$, diperlukan fungsi yang turunannya adalah $\frac{1}{x}$, dan menerapkan teorema dasar kalkulus

$$\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x}$$

Dari teorema dasar kalkulus diperoleh $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ menyatakan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \frac{i}{t}$ dan diatas sumbu x pada interval tertutup $1 \leq t \leq x$. Integral tentu $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ ini digunakan untuk mendefinisikan fungsi logaritma asli. Fungsi logaritma natural dari x ditulis dengan "lnx". Fungsi logaritma natural ditulis ln adalah fungsi yang didefinisikan oleh

$$ln\, x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$$

"$ln\ x$" dibaca logaritma natural dari x. Berdasarkan definisi diatas, daerah asal fungsi logaritma natural adalah himpunan semua bilang riil positif. Dengan menerapkan teorema dasar kalkulus dihasilkan

$$\frac{d}{dx}(ln\, x) = \frac{d}{dx} \int_1^x dt = \frac{1}{x}$$

Hal ini menunjukkan bahwa fungsi logaritma natural adalah diferensiabel.

2.1.2 Sifat-sifat Fungsi Logaritma Natural

Apabila a dan b adalah bilangan-bilangan positif dan r sebuah bilangan rasional, maka :

1. $ln\ 1 = 0$

2. $ln\ ab = ln\ a + ln\ b$
3. $ln\frac{a}{b} = ln\ a - ln\ b$
4. $ln\ a^r = r\ ln\ a$

nomor 1 dapat dibuktikan menggunakan definisi fungsi logaritma natutal

$$ln\ 1 = \int_q^x \frac{1}{t} dt = 0$$

Bukti dari nomor 2

$$ln\ (ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^{a} \frac{1}{t} dt + \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt = ln\ a + \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt$$

Suku kedua di ruas kanan, dihitung dengan cara subtitusikan $t = au$, maka diperoleh $dt = adu$, $u = 1$, bila $t = a$, dan $u = b$, bila $t = ab$. Dengan demikian

$$ln\ (ab) = ln\ a + \int_1^{ab} \frac{1}{t} + ln\ a + \int_1^{ab} \frac{1}{u} du = ln\ a + ln\ b$$

Nomor 3 dan 4 dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

2.1.3 Turunan Fungsi Logaritma Natural

Hasil definisi dan penerapan teorema dasar kalkulus menghasilkan pernyataan bahwa fungsi logaritma natural adalah diferensiabel. Pernyataan tersebut dapat dikembangkan menjadi rumus turunan yang lebih umum pada teorema berikut ini:

Jika u fungsi dari x yang diferensiabel dan $u(x) > 0$, maka
$\frac{d}{dx}(ln\ u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

Contoh 1
Carilah $\frac{dy}{dx}$ jika $y = ln(x^2 + 4x + 5)$!

Jawab

$$y = ln\ u$$

$$dan$$

$$u = x^2 + 4x + 5$$

Menurut aturan rantai diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{u}\frac{dy}{dx}(x^2 + 4x + 5) \\
&= \frac{1}{(x^2 + 4x + 5}(2x + 4) \\
&= \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5}
\end{aligned}$$

Contoh 2
Carilah $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \ln(1 + x^2)(1 + x^3)$!

Jawab
Cara pertama.
Andaikan

$$y = ln\ u$$

$$dan$$

$$u = (1 + x^2)(1 + x^3)$$

Dengan menerapkan Aturan Rantai dihasilkan,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= [(1 + x^2)(1 + x^3)] \\
&= \frac{1}{(1 + x^2)(1 + x^3)}[(2x)(1 + x^3) + (1 + x^2)(3x^2)] \\
&= \frac{5x^4 + 3x^2 + 2x}{(1 + x^2)(1 + x^3)}
\end{aligned}$$

Cara kedua.
Dengan menerapkan sifat fungsi logaritma natural, fungsi dapat ditulis menjadi,

$$y = ln(1 + x^2)(1 + x^3) = ln(1 + x^2) + ln(1 + x^3)$$

Selanjutnya dengan menerapkan rumus Aturan Rantai diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}\frac{d}{dx}(1+x^2+\frac{1}{1+x^3})\frac{d}{dx}(1+x^3) \\
&= \frac{2x}{1+x^2}+\frac{3x^2}{1+x^3} \\
&= \frac{2x^2(1+x^3)+3X^2(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x^3)} \\
&= \frac{5x^4+3x^2+2x}{(1+x^2)(1+x^3)}
\end{aligned}$$

Contoh 3
Carilah $\frac{dy}{dx}$ jika $y = ln\frac{(x^2-1)^3}{(x^2+1)^4}$

Jawab
Menentukan turunannya lebih mudah fungsinya disederhanakan dengan menggunakan sifat logaritma selanjutnya baru ditentukan turunannya. Dengan menggunakan sifat logaritma natural, fungsi diatas dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
y &= ln\frac{(x^2-1)^3}{(x^2+1)^4} \\
&= ln(x^2-1)^3 - ln(x^2+1)^4 \\
&= 3ln(x^2-1) - 4ln(x^2+1)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menerapkan rumus Aturan Rantai diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 3\frac{1}{x^2-1}\frac{d}{dx}(x^2-1) - \frac{1}{x^2+1}\frac{d}{dx}(x^2+1) \\
&= 3\frac{2x}{x^2-1} - 4\frac{2x}{x^2+1} \\
&= \frac{6x(x^2+1)-8x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} \\
&= \frac{14x-2x^3}{(x^2-1)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

Contoh 4
Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$, dari $y = ln^2(x+sin\ x)$

Jawab
Misalkan,

$$y = u^2,$$

$$u = lnv,$$

dan

$$v = x + \ sin\, x,$$

Menurut Aturan Rantai diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \\
&= 2u\frac{1}{v}(1 + cos\, x) \\
&= 2\ ln\ v\frac{1}{x + sin}(1 + cos\, x) \\
&= 2\frac{1 + cos\, x}{x + sin\, x}\ ln(x + sin\, x)
\end{aligned}$$

Contoh 5
Tentukanlah turunan kedua dan ketiga dari $y = x^4\ ln\, x$.

Jawab
Dengan menerapkan rumus hasil kali secara berturut-turut sebanyak tiga kali dihasilkan,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 4x^3\ ln\, x + x^4\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= x^3(4\ ln\, x + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= 3x^2(4\ ln\, x + 1) + x^3\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= x^2(12\ ln\, x + 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3y}{dx^3} &= 2x(12\ ln\, x + 4) + x^2\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= x(24\ ln\, x + 9)
\end{aligned}$$

2.1.4 Sketsa Grafik Fungsi Logaritma Natural

Pembuatan sketsa grafik fungsi logaritma natural dapat dilakukan dengan menerapkan penggunaan turunan dan menggunakan sifat-sifat fungsi logaritma . Menurut definisi, fungsi logaritma natural yaitu

$$f(x) = ln\, x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt, x > 0$$

Berdasarkan definisi diatas, dapat diperoleh sifat-sifat fungsi logaritma natural, yaitu

1. Daerah asal fungsi adalah himpunan semua bilangan riil positif;
2. Daerah nilai fungsi adalah himpunan semua bilangan riil;
3. Fungsi kontinu semua bilangan riil yang terletak pada daerah asa;
4. Grafik fungsinya naik pada seluruh daerah asal, karena $f(x) = \frac{1}{x}$ selalu positif atau lebih besar dari 0 untuk setiap titik pada daerah asal;
5. Grafik fungsinya cekung terbuka kebawah untuk semua titik pada daerah asal karena $f"(x) = -\frac{1}{x^2}$ selalu negatif atau lebih kecil dari 0 untuk semua titik pada daerah asal;
6. Asimtot grafik adalah sumbu y negatif, dan grafik fungsinya terletak pada kuadran keempat, karena limit x mendekati $0^+ f(x)$ = - tak hingga.

2.1.5 Diferensial Logaritmik

Pendiferensial logaritmik adalah salah satu manfaat dari sifat fungsi logaritma natural untuk menentukan turunan fungsi yang bersangkutan dengan turunan hasil kali, hasil bagi, hasil pangkatnya dan dapat disederhanakan dengan menarik nilai logaritmanya.

Contoh 1
Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$, dari $y = x^3\ cos^4 x\ sin^5 x$

Jawab
Dengan menarik logaritma natural dari y dan menerapkan sifat-sifat fungsi logaritma natural diperoleh,

$$\begin{aligned} ln\, y &= ln(x^3\, cos^4 x\, sin^5 x) \\ &= ln\, x^3 + ln\, cos^4 x + ln\, sin^5 x \\ &= 3\, ln\, x + 4\, ln\, cos\, x + 5\, ln\, sin\, x \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menurunkan secara implisit terhadap x, dihasilkan

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 3\frac{1}{x} + 4\frac{1}{cos\, x}\frac{d}{dx}(cos\, x) + 5\frac{1}{sin\, x}\frac{d}{dx}(sin\, x) \\ &= \frac{3}{x} - \frac{4\, sin\, x}{cos\, x} + \frac{5\, cos\, x}{sin\, x} \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{3}{x} - \frac{4\, sin\, x}{cos\, x} + \frac{5\, cos\, x}{sin\, x}\right) \\ &= x^3\, cos^4 x\, sin^5 x\left(\frac{3}{x} - \frac{4\, sin\, x}{cos\, x} + \frac{5\, cos\, x}{sin\, x}\right) \\ &= 3x^2\, cos^4 x\, sin^5 x\; - \; 4x^3\, cos^3 x\, sin^6 x + 5x^3\, cos^5 x\, sin^4 x \end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$, dari $y = \frac{x^4\sqrt[3]{(x-1)}}{(x+1)^2}$.

Jawab

Dengan menarik logaritma natural dari y dan menerapkan sifat-sifat fungsi logaritma natural diperoleh,

$$ln\, y = ln\frac{x^4\sqrt[3]{(x-1)}}{(x+1)^2}$$

2.1.6 Integral yang Menghasilkan Fungsi Logaritma Natural

Menentukan rumus integral yang menghasilkan fungsi logaritma, diperlukan rumus diferensial dari $\frac{d}{dx}ln\, x$, dan untuk itu ditinjau bilamana $x > 0$ dan $x < 0$.

$$Jika\ x > 0,\ |x| = x\ sehingga\ \frac{dx}{dy} ln|x| = \frac{d}{dx} ln\ x = \frac{1}{x}$$

$$Jika\ x > 0,\ |x| = -x\ sehingga\ \frac{dx}{dy} ln|x| = \frac{d}{dx} ln(-x) = -\frac{1}{x}(-1)\frac{1}{x}$$

Dengan demikian diperoleh rumus bahwa $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$.

$$Bilamana\ u\ fungsi\ dari\ x\ yang\ diferensiabel,\ maka\ \int_1 udu = ln|u| + c$$

Dari teorema diatas dihasilkan rumus baru untuk integral fungsi x^n untuk sembarang bilangan riil n yaitu

$$\int u^n du = \begin{cases} \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1, \\ ln|u| + c,\ n = -1 \end{cases}$$

Contoh 1
Hitunglah $\int \frac{3(x^2+1)}{x^3+3x}\ dx$.

Jawab
Andaikan $u = x^3 + 3x$, maka $du = 3(x^2 + 1)dx$. Jadi,

$$\begin{aligned} \int \frac{3(x^2+1)}{x^3+3x}\ dx &= \int \frac{1}{u} \\ &= ln\ u + c = ln(x^3 + 3x) + C \end{aligned}$$

Contoh 2
Hitunglah $\int \frac{1}{x\ ln\ x}\ dx$

Jawab
Misalkan, $u = ln\ x$, maka $du = \frac{1}{x}\ dx$. Sehingga,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\ ln\ x}\ dx &= \int \frac{1}{u}\ du \\ &= ln\ u + c = ln|ln\ x| + C \end{aligned}$$

Pada Bab Integral, belum ada rumus integral tak tentu dari fungsi tangen, cotangen, secan, dan cosecan. Hal ini dikarenakan untuk menentukan anti turunannya diperlukan fungsi logaritma natural. Teorema dibawah ini memberikan rumus-rumus anti turunan fungsi-fungsi tersebut.

Teorema : Andaikan u fungsi dari x yang diferensiabel, maka

1. $\int tan\ u\ du = ln\ |sec\ u| + c$
2. $\int cot\ u\ du = ln\ |sin\ u| + c$
3. $\int sec\ u\ du = ln\ |sec\ u + tan\ u| + c$
4. $\int csc\ u\ du = ln\ |csc\ u - cot\ u| + c$

Pembuktian teorema diatas, diambil kasus tangen dan secan, karena kasus yang lainnya identik. Untuk kasus tangen,

$$\int tan\ u\ du = \int \frac{sin\ u}{cos\ u}\ du = \ -ln|cos\ u| + c = ln|sec\ u| + c$$

Sedangkan untuk secan, kalikanlah integran dengan satu yang merupakan pecahan dimana pembilang dan penyebut berbentuk $(sec\ u + tan\ u)$, dan diperoleh,

$$\int sec\ u\ du = \int \frac{sec\ u(sec\ u + tan\ u)}{sec\ u + tan\ u}\ du = \int \frac{(sec^2\ u + sec\ u\ tan\ u)}{sec\ u + tan\ u}\ du$$

Misalkan, $v = sec\ u + tan\ u$, maka $dv = (sec\ u\ tan\ u + sec^2 u)\ du$. Sehingga diperoleh,

$$\int sec\ u\ du = \int \frac{1}{v}\ dv = ln|v| + c = ln|sec\ u + tan\ u| + c$$

Sedangkan bukti untuk fungsi lainnya dapat ditempuh dengan cara seperti diatas.

Contoh 3

Hitunglah $\int \frac{tan(ln\ x)}{x}\ dx$.

Jawab

Misalkan $u = ln\ x$, maka $du = (\frac{1}{x})\ dx$, sehingga diperoleh

$$\int \frac{tan(ln\, x)}{x}\, dx = du = ln\, |sec\, u| + c$$
$$= ln\, |sec(ln\, x)| + c$$

2.2 Integral Fungsi Logaritma dan Eksponen

Dari rumus $\frac{d}{dx}(ln\, |x|) = \frac{1}{x}$ dan $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$, diperoleh rumus integral berikut.

a. $\int \frac{dx}{x} = ln\, |x| + C.$

b. $\int e^x dx = e^x + C.$

Penggunaan rumus integral di atas dalam teknik pengintegralan diperlihatkan pada contoh berikut.

Contoh 1

Hitunglah

(a) $\int \frac{x}{x-1} dx,$

(b) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} dx.$

Jawab

(a)

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x-1} dx &= \int \frac{(x-1)+1}{x-1} dx \\ &= \int dx + \int \frac{d(x-1)}{x-1} \\ &= x + ln\, |x-1| + C \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= 2\int \frac{d(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \\ &= 2\, ln(\sqrt{x}+1) + C. \end{aligned}$$

Contoh 2
Hitunglah
(a) $\int \frac{dx}{1+e^x}$,
(b) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx$.

Jawab
(a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+e^x} &= \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx \\
&= \int dx - \int \frac{d(1+e^x)}{e^{-x}+1} \\
&= -ln(e^{-x}+1)+C,
\end{aligned}$$

Cara lain

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+e^x} &= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx \\
&= -\int \frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1} \\
&= -ln(e^{-x}+1)+C,
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx &= \int \frac{(1-e^x)+2e^x}{1-e^x}dx \\
&= \int dx - 2\int \frac{d(1-e^x)}{1-e^x} \\
&= x-2ln|1-e^x|+C \\
&= x-ln(1-e^x)^2+C.
\end{aligned}$$

Catatan
Selain cara ini, soal diatas dapat diselesaikan dengan memaksimalkan $t=1+t$ untuk Contoh 2(a) dan $t=1-e^x$ untuk Contoh 2(b). Nyatakan semua komponen yang terlibat dalam t, kemudian uraikan fungsinya atas pecahan bagian dan selesaikan.

Contoh 3
Hitunglah
(a) $\int \frac{lnx}{x} dx$,
(b) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$.

Jawab
(a)

$$\begin{aligned} \int \frac{lnx}{x} dx &= \int (lnx) d(lnx) \\ &= \frac{1}{2} ln^2 x + C \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx &= -\int e^{\frac{1}{x}} d(\frac{1}{x}) \\ &= e^{\frac{1}{x}} + C \end{aligned}$$

Contoh 4
Hitunglah
(a) $\int ln\ x\ dx$,
(b) $\int x^2 ln\ x\ dx$.

Jawab
(a) Dengan rumus integral parsial, misalkan

$$u = ln\ x$$

dan

$$dv = dx,$$

maka

$$du = \frac{dx}{x}$$

dan

$$v = x.$$

Jadi integralnya adalah

$$\begin{aligned}\int ln\,x\,dx &= x\,ln\,x - \int dx \\ &= x\,ln\,x - x + C \\ &= x(ln\,x - 1) + C.\end{aligned}$$

(b) Dengan rumus integral parsial, misalkan

$$u = lnx$$

dan

$$dv = x^2 dx,$$

maka

$$du = \frac{dx}{x}$$

dan

$$v = \frac{1}{3}x^3.$$

Jadi integralnya adalah

$$\begin{aligned}\int x^2 lnxdx &= \frac{1}{3}x^3 lnx - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 lnx - \frac{1}{9}x^3 + C.\end{aligned}$$

Contoh 5
Hitunglah
(a) $\int xe^x dx$,
(b) $\int x^{\sqrt{x}} dx$.

Jawab
(a) Dengan rumus integral parsial, misalkan

$$u = x$$

dan

$$dv = dx,$$

maka
$$du = dx$$
dan
$$v = e^x.$$

Jadi integralnya adalah

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= e^x(x-1) + C\end{aligned}$$

(b) Misalkan
$$t = \sqrt{x},$$
maka
$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx,$$
sehingga
$$dx = 2\sqrt{x}\, dt = 2t\ dt.$$
Dengan penggantian ini dan hasil Contoh 5(a) diperoleh

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}} dx &= \int e^t .2t dt \\ &= 2\int t\ e\ e^t\ dt \\ &= 2e^t(t-1) + C \\ &= 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C.\end{aligned}$$

Untuk $a \geq 0$, kita mempunyai rumus turunan dari $y = a^x$, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(a^x) &= \frac{d}{dx}(e^{x\ ln\ a}).\ ln\ a \\ &= a^x\ ln\ a.\end{aligned}$$

Berdasarkan hal tersebut diperoleh rumus integral sebagai berikut.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\ a} + C,\ a \geq 0\ dan\ a \neq 1.$$

Penggunaan rumus di atas dalam teknik pengintegralan diperlihatkan pada contoh berikut.

Contoh 6

Hitunglah $\int_1^e \frac{2^{-ln\ x}}{x} dx$.

Jawab

Misalkan $u = ln\ x$, maka $du = \frac{dx}{x}$, $x = e \iff u = 1$, dan $x = 1 \iff u = 0$. Jadi integralnya adalah

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{2^{-ln\ x}}{x} dx &= \int_0^1 2^{-u} du \\
&= -\int_0^1 2^{-u} d(-u) \\
&= \left(-\frac{2^{-u}}{ln\ 2}\right)_0^1 \\
&= -\frac{1}{ln\ 2}(2^{-1} - 1) \\
&= \frac{1}{2\ ln\ 2}.
\end{aligned}$$

2.2.1 Latihan soal

1. Tentukan turunan fungsi berikut $y = ln(x^2 - x + 1)$.
2. Tentikan nilai x yang memenuhi persamaan $ln^2 x - 5ln\ x + 6 = 0$.
3. Tentukan nilai dari $\int \frac{2}{x}\ dx$.
4. Tentukan nilai dari $\int \frac{1}{4x-1}$.
5. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \frac{x}{x^2+1}$, sumbu x dan barisan $x = 3$.
6. Turunan pertama dari $f(x) = ln(x + \sqrt{x^2 + 1}$ adalah
7. Tentukan turunan dari $f(x) =^5 log(2x + 3)$.
8. Gambarlah grafik fungsi $y = ln\ cos\ x + ln\ sec\ x$ pada selang $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
9. Tentukan nilai semua nilai ekstrim lokal fungsi $f(x) = 2x^2\ ln\ x - x^2$.

10. Hitunglah x dari $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{x} \frac{1}{t}\, dt = 2\int\limits_{1}^{x} \frac{1}{t}\, dt$.

2.3 Fungsi Invers dan Turunannya

Jika f dan g adalah invers satu sama lain lalu $f(g(x)) = x$ jika kedua f dan g terdiferensiasi, lalu dengan mengaplikasikan teorema dalam diferensiasi dari fungsi gabungan, kita mendapatkan $f'(g(x))g'(x) = 1$, dan karenanya:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Rumus ini menunjukkan bagaimana untuk menemukan turunan dari fungsi invers dengan disimpulkan berdasarkan asumsi jika kedua fungsi terdiferensiasi, namun itu cukup untuk mengasumsikan bahwa hanya salah satunya saja.

Teorema (Diferensiasi dari Fungsi Invers)
Jika a fungsi f kontinu dan meningkat (atau menurun) pada interval (a,b) dan bahkan memiliki perbedaan turunan dari 0 pada point elemen a,b lalu fungsi invers g memiliki turunan pada poin $x = f(t)$ dan turunan ini diberikan sebagai bukti $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$. Mari kita tunjukkan dengan t_0 titik di mana fungsi f memiliki turunan yang berbeda dari 0 dan menganggap bahwa $x_0 = f(t_0)$.

Suatu fungsi f mengambil suatu nilai x dari daerah asalnya D dan memadankannya dengan nilai tunggal y dan daerah hasilnya R. kita dapat secara pasti mendapatkan nilai x. Fungsi baru ini, yang mengambil y dan memadankannya dengan x, dinyatakan dengan f^{-1}.
Perhatikan bahwa daerah asal f^{-1} adalah R dan daerah hasilnya adalah D. Disini kita menggunakan tikatas (indeks atas) dalam suatu cara baru. lambang f^{-1} bukan berarti $\frac{1}{f}$. Sebuah rumus untuk f^{-1}. Jika $y = f(x) = 2x$, maka $x = f^{-1}, (y) = \frac{1}{2y}$ (lihat Gambar 2.1). Menyelesaikan persamaan yang menentukan f untuk x dalam bentuk y. Hasilnya adalah $x = f^{-1}(y)$. Tidak semua fungsi dapat dibalik secara pasti.
Perhatikan, misalnya $y = f(x) = x^2$ untuk nilai y tertentu terdapat dua nilai x yang berpadanan dengan gambar 2.2.

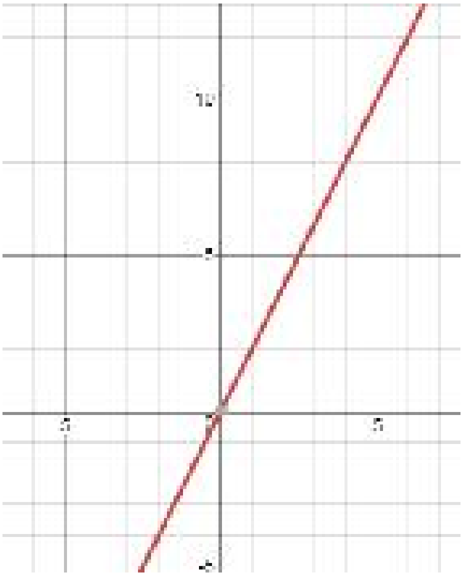


Figure 2.1: Fungsi satu variabel

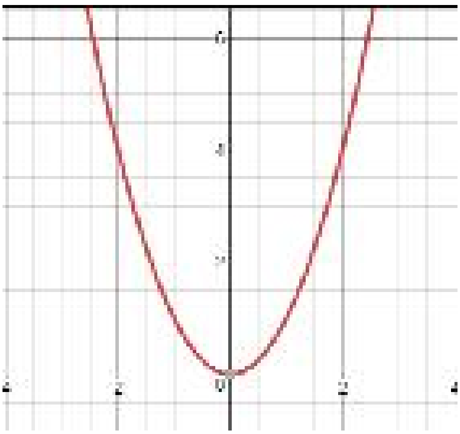


Figure 2.2: Tidak ada fungsi balikan

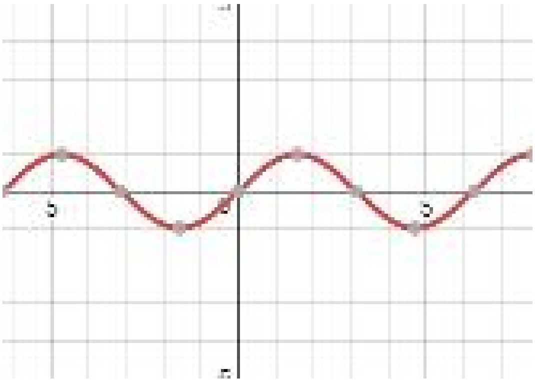


Figure 2.3: tak ada fungsi balikan

Fungsi $y = g(x) = sin\ (x)$ lebih buruk lagi. Untuk setiap nilai y terdapat terhingga nilainya x yang berpadanan dengannya gambar 2.3. Fungsi-fungsi yang demikian tidak memiliki balikan; paling tidak fungsi-fungsi itu tidak memiliki balikan kecuali kalau kita membatasi himpunan nilai-nilai x-nya suatu pokok yang akan dibahas kelak.Keberadaan fungsi balikan salah satu kriteria bahwa fungsi itu adalah sata-satu yakni $x_1 \neq x_2$ mengakibatkan $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ini setara dengan persyaratan geometri bahwa setiap garis datar memotong grafik $y = f(x)$ paling banyak satu titik akan tetapi dalam suatu keadaan tertentu. Kriteria ini mungkin agak sulit diterapkan sebab menuntut bahwa kita harus mengetahui pengetahuan lengkap tentang grafik. Kriteria yang lebih praktis yang mencakup kebanyakan contoh sehingga fungsi tersebut harus monoton murni.

Teorema A

Jika f monoton murni pada daerah asalnya, maka f memiliki invers.

Contoh 1
Perhatikan bahwa $f(x) = x^5 + 2x + 1$, memiliki invers.

Jawab

$$f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$$
$$untuk\ semua\ x.$$

Jadi f naik pada seluruh garis real sehingga f memiliki invers disana. Terdapat cara untuk fungsi yang tidak memiliki invers dalam daerah asal, membatasi daerah asalnya pada suatu himpunan sehingga fungsi $y = x^5 + 2x + 1$ pada daerah yang baru akan turun atau akan naik saja.

Jadi, untuk $y = f(x) = x^2$ dibatasi daerah asalnya pada $x \leq 0$ atau $x \geq 0$. Untuk $y = g(x) = sin\ x$ dibatasi daerah asalnya pada selang $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Maka, kedua fungsi memiliki invers (gambar 2.4). Jika f memilki invers f^{-1} maka f^{-1} memiliki invers yakni f, jadi kita boleh menyebut f dan f^{-1} merupakan pasangan fungsi invers.

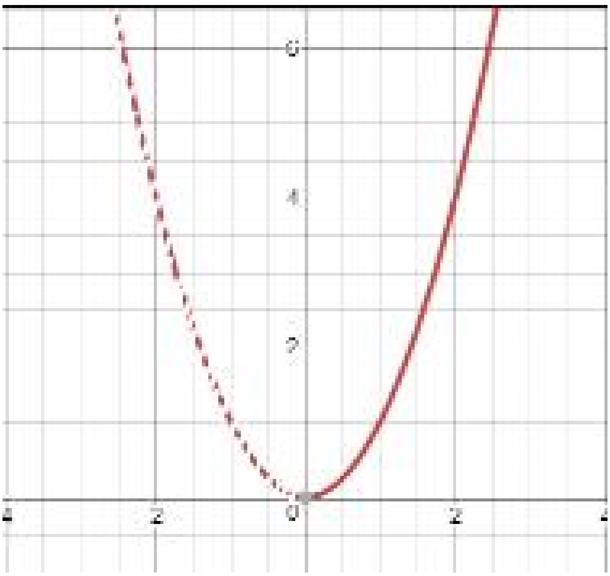


Figure 2.4: Daerah atas terbatas atas $x > 0$

Contoh 2
Perhatikan bahwa $f(x) = 2x + 6$ memiliki invers, carilah $f^{-1}(y)$.

Jawab
f fungsi naik, maka mempunyai invers. Untuk mencari $f^{-1}(y)$, selesaikan $y = 2x + 6$ untuk x, yang memberikan $x = \frac{(y-6)}{2} = f^{(y)}$. Se-

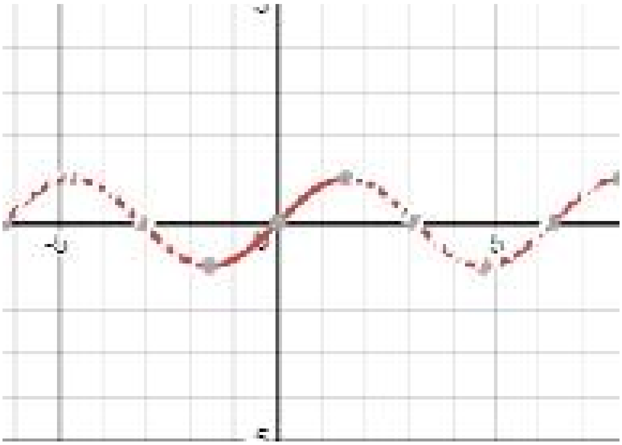


Figure 2.5: Daerah asal terbatas

hingga

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+6) = \frac{((2x+6)-6)}{2} = x$$

dan

$$f(f^{-1}(y)) = f(\frac{(y-6)}{2}) = 2(\frac{(y-6)}{2}) + 6 = y.$$

Grafik $y = f^{-}1(x)$ andaikan f memiliki invers, maka

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

Akibatnya, $y = f(x)$ dan $x = f^{-}1(x)$ menentukan pasangan bilangan (x,y) yang sama, sehingga mempunyai grafik yang identik. Grafik $y = f^{-1}(y)$. Menukar x dan y pada grafik adalah mencerminkan grafik terhadap garis $y = x$. Jadi grafik $y = f^{-1}(x)$ adalah gambar cermin grafik $y = f(x)$ terhadap garis $y = x$.

Hal yang berkaitan adalah pencarian rumus untuk $f^{-1}(x)$ untuk melakukan itu, kita tentukan terlebih dahulu $f^{-1}(y)$, kemudian kita menukarkan x dan y dalam rumus yang dihasilkan.

Jadi, diusulkan untuk melakukan proses tiga langkah berikut untuk pencarian f^{-1}.

$$\begin{aligned}
&Langkah\ 1 &:\ & Selesaikan\ persamaan\ y = f(x)\ untuk\ x\ dalam\ bentuk\ y\\
&Langkah\ 2 &:\ & Gunakan\ f^{-1}(y)\ untuk\ menamai\ ungkapan\ yang\ dihasilkan\\
& & & dalam\ y\\
&Langkah\ 3 &:\ & Gantilah\ y\ dengan\ x\ untuk\ mendapatkan\ rumus\ f^{-1}(x)
\end{aligned}$$

Sebelum mencoba proses tiga langkah pada suatu fungsi khusus f, anda mungkin terlebih dahulu berpikir bahwa kita seharusnya memeriksa kebernaran bahwa f memiliki balikan. Namun, kita dapat menjalankan langkah langkah pertama dan mendapatkan satu x tunggal untuk masing-masing y maka $f^{-}1$ memang ada. (Perhatikan untuk $y = f(x) = x^2$ sehingga $x = \sqrt{y}$.

Contoh 3
Carilah rumus untuk $f^{-}1(x)$, Jika $y = f(x) = \frac{x}{(1-x)}$.

Jawab
Penyelesaian berikut adalah proses tiga langkah untuk contoh ini.

$$\begin{aligned}
Langkah\ 1 \quad : \qquad y &= \frac{x}{(1-x)}\\
(1-x)y &= x\\
y - xy &= x\\
x + xy &= y\\
x(1+y) &= y\\
x &= \frac{y}{(1+y)}\\
Langkah\ 2 \qquad : f^{-1}(y) &= \frac{y}{(1+y)}\\
Langkah\ 3 \qquad : f^{-1}(x) &= \frac{x}{(1+x)}
\end{aligned}$$

Turunan fungsi invers disimpulkan dengan menyelidiki hubungan antara turunan fungsi dan turunan invers. perhatikan dulu apa yang akan terjadi pada garis l_1, bilamana dicerminkan terhadap $y = x$, i_1 dicerminkan i_2 dengan kemiringannya m_1 dan m_2 dikaitkan dengan

$m_2 = \frac{1}{m_1}$, asalkan $m_1 \neq 0$. Jika l_1 merupakan garis singgung terhadap grafik f di titik (c,d) maka l_2 adalah garis singgung terhadap f^{-1} di titik (d,c). Kita dibawa ke kesimpulan bahwa

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(d) &= m_2 \\ &= \frac{1}{m_1} \\ &= \frac{1}{(f'(c))}\end{aligned}$$

Teorema B Teorema Fungsi Balikan
Andaikan f terdiferensiasi dan monoton murni pada selang I. Juga $f'(x) \neq 0$ di suatu x tertentu dalam I, maka f^{-1} terdiferensiasi di titik yang berpadanan $y = f(x)$ dalam daerah hasil f dan

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f'(x))}.$$

Kesimpulan Teorema B sering kali dituliskan dengan lambang sebagai

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(\frac{dy}{dx})}$$

Contoh 4
Andaikan $y = f(x) = x^5 + 2x + 1$, seperti dalam contoh 1. Carilah $(f-1)'(4)$.

Jawab
Walaupun kita tidak dapat mencari rumus untuk f^{-1} pada kasus ini, kita perhatikan bahwa $y = 4$ berpadanan dengan $x = 1$, karena

$$f'(x) = 5x^4 + 2$$

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{(f'(1))} = \frac{1}{(5+2)} = \frac{1}{7}$$

2.4 Fungsi Eksponen Asli

Nilai dari e merupakan suatu bilangan irrasional yang nilainya tidak dapat dipastikan, yakni $e \approx 2,718281828459045$.

Definisi
Konstanta e merupakan bilangan dalam daerah asal fungsi logaritma alami yang memenuhi

$$ln\ e = \int_1^e \frac{1}{x}\ dx = 1$$

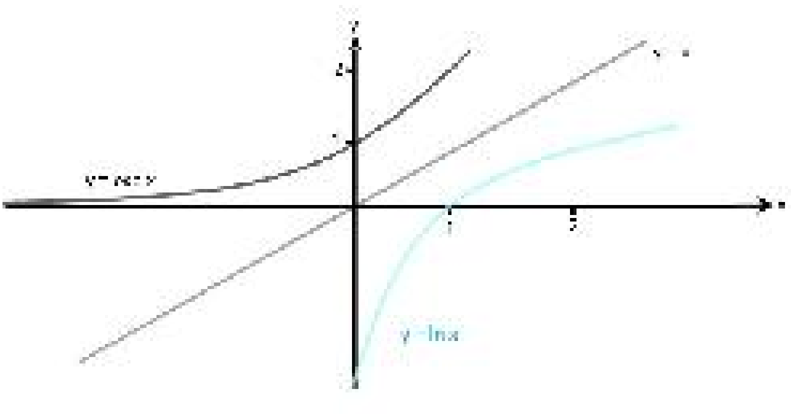


Figure 2.6: Grafik logaritma natural dan eksponensial

Teorema
Konstanta irrasional e didefinisikan sebagai limit dari $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ketika $x \to 0$, yaitu

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Definisi Fungsi Eksponensial Asli
Invers dari ln disebut sebagai fungsi eksponensial asli dan dinotasikan dengan exp, memenuhi

$$x\ =\ exp\ y \iff y\ =\ In\ x$$

Berdasarkan definisi tersebut, dapat diperoleh:

1. $exp\ (In\ x) = x, x > 0$
2. $In\ (exp\ y) = y$, untuk semua y

Oleh karena exp dan In adalah fungsi saling invers, grafik $y = exp\ x$ adalah grafik $y = In\ x$ dicerminkan terhadap garis $y = x$.

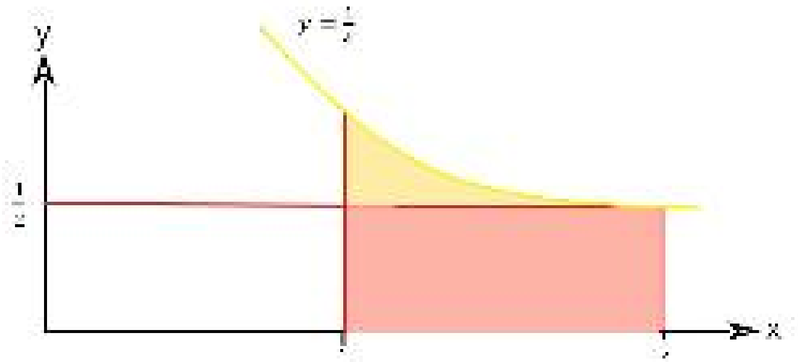


Figure 2.7: Grafik Fungsi $y = \frac{1}{x}$

Definisi Sifat-Sifat Fungsi Eksponen
Huruf e menyatakan bilangan real positif unik demikian sehingga $In\ e = 1$.

Teorema
Jika a dan b bilangan positif dan r bilangan rasional, maka

(i) $ln\ 1 = 0$
(ii) $ln\ ab = ln\ a + ln\ b$
(iii) $ln\ \frac{a}{b} = ln\ a - ln\ b$
(iv) $ln\ a^r = r\ ln\ a$

Sekarang kita melakukan pengamatan kritis, yang hanya bergantung pada fakta-fakta yang telah diperagakan. Jika r adalah bilangan rasional

$$e^r = exp(ln\ e^r) = exp(r\ ln\ e) = exp\ r$$

Untuk r rasional, $exp\ r$ adalah identik dengan e^r. Berpedoman pada yang telah dipelajari di atas, maka dapat mendefinisikan e^x secara sederhana untuk semua nilai x (rasional maupun irrasional) sebagai

$$e^x = exp\, x$$

Perhatikan bahwa (1) dan (2) pada awal sekarang berbentuk:
(1)' $e^l n\, x = x,\ x > 0$
(2)' $In(e^y) = y$, untuk semua y

Catat bahwa (1)' mengatakan bahwa $ln\, x$ adalah eksponen yang diperlukan untuk diletakkan pada e agar memperoleh x.

Teorema
Misalkan a dan b bilangan real sebarang, maka $e^a e^b = e^a + b$ dan $e^a/e^b = e^a - b$.

Bukti
Untuk membuktikan bagian yang pertama, dapat dituliskan.

$$\begin{aligned} e^a e^b &= exp(ln\, e^a e^b) \\ &= exp(ln\, e^a + ln\, e^b) \\ &= exp(a+b) \\ &= e^a + b \end{aligned}$$

Bagian kedua dapat dibuktikan dengan cara serupa.

$$\begin{aligned} \frac{e^a}{e^b} &= exp(ln\, \frac{e^a}{e^b}) \\ &= exp(ln\, e^a - ln\, e^b) \\ &= exp(a-b) \\ &= e^a - b \end{aligned}$$

Teorema Teorema Fungsi Invers
Misalkan f terdiferensiasikan dan monoton murni pada interval I. Jika $f'(x) \neq 0$ di suatu x tertentu dalam I, maka f^{-1} dapat didiferensiasikan di titik yang berpadanan $y = f(x)$ dalam daerah hasil f.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Kesimpulan Teorema di atas seringkali dituliskan dalam lambang sebagai

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

Oleh karena exp dan ln adalah fungsi yang saling invers, maka menurut teorema di atas, fungsi $exp\ x = e^x$ terdiferensiasikan. Untuk menemukan rumus untuk $D_x e^x$ dapat menggunakan teorema di atas. Cara lain, misalkan $y = e^x$, maka

$$x = In\ y$$

Sekarang diferensiasikan kedua ruas terhadap x. Dengan menggunakan Aturan Rantai

$$1 = \frac{1}{y}\, D_x y$$

Sehingga

$$D_x y = y = e^x$$

Telah terbukti bahwa e^x adalah turunannya sendiri, yakni

$$D_x e^x = e^x$$

Jadi, $y = e^x$ adalah penyelesaian dari persamaan diferensial $y' = y$. Jika $u = f(x)$ terdiferensiasikan, maka Aturan Rantai menghasilkan

$$D_x e^u = e^u\, D_x u$$

Contoh 1
Carilah $D_e e^{\sqrt{x}}$.

Jawab
Dengan menggunakan $u = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned} D_x e^{\sqrt{x}} &= e^{\sqrt{x}}\, D_x \sqrt{x} \\ &= e^{\sqrt{x}}.\frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Contoh 2
Carilah $D_x e^{x^2\, ln\, x}$.

Jawab

$$\begin{aligned} D_x e^{x^2\, In\, x} &= e^{x^2\, In\, x}\, D_x(x^2\, In\, x) \\ &= e^{x^2\, In\, x}\, (x^2 \,.\, \frac{1}{x} + 2x\, In\, x) \\ &= x e^{x^2\, In\, x}\, (1 + In\, x^2) \end{aligned}$$

Contoh 3
Hitunglah $\int e^{-4x}\, dx$.

Jawab
Misalkan $u = -4x$, sehingga $du = -4\, dx$,

$$\begin{aligned} \int e^{-4x}\, dx &= -\frac{1}{4}\int e^{-4x} -4\; dx \\ &= -\frac{1}{4}\int e^{u}\, du \\ &= -\frac{1}{4} e^{u} + C \\ &= -\frac{1}{4} + C \end{aligned}$$

Contoh 4
Hitunglah $\int x^2 e^{-x^3}\, dx$.

Jawab
Misalkan $u = -x^3$, maka $du = -3x^2\, dx$,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x^3} &= -\frac{1}{3}\int e^{-x^3}(-3x\, dx) \\ &= -\frac{1}{3}\int e^{u}\, du \\ &= -\frac{1}{3} e^{u} + C \\ &= -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C \end{aligned}$$

Contoh 5
Hitunglah $\int_1^3 xe^{-3x^2}\,dx$.

Jawab
Misalkan $u=-3x^2$, maka $du=-6x\,dx$,

$$\begin{aligned}\int xe^{-3x^2}dx &= -\frac{1}{6}\int e^{-3x^2}(-6xdx)\\ &= -\frac{1}{6}\int e^u du\\ &= -\frac{1}{6}e^u+C\\ &= -\frac{1}{6}e^{-3x^2}+C\end{aligned}$$

Contoh 6
Hitunglah $\int \frac{6e^{\frac{1}{x}}x^2}{d}x$.

Jawab
Pikirkan $\int e^u\,du$. Misalkan $u=\frac{1}{x}$ maka $du=(-\frac{1}{x^2})dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{6e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx &= -6\int e^{\frac{1}{x}}(\frac{-1}{x^2}\,dx)\\ &= -6\int e^u\,du\\ &= -6e^{\frac{1}{x}}+C\end{aligned}$$

SOAL-SOAL
Dalam soal 1 dan 2, carilah D_xy.

1. $y=e^{\sqrt{x+2}}$.
2. $y=e^{2\ In\ x}$.
3. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.
4. $\int xe^{-3x^2}$.
5. $D_xe^{\frac{1}{x^2}}$.
6. $D_xe^{\sqrt{x}}$.
7. $\int \frac{e^{3/x}}{x^2}dx$.
8. $\int \frac{dx}{e^x+1}$

9. $\int e^{3x+1}$
10. $\int xe^{x^2-3}$

2.5 Fungsi Eksponen Umum dan Fungsi Logaritma Umum

Fungsi eksponensial kita kesampingkan dasar 1 dari definisi karena $f(x) = 1^x$ itu tetap sama dengan fungsi $f(x) = 1$. Nol tidak digunakan sebagai dasar karena $0^x = 0$ untuk setiap x positif dan negatif dari nol tidak terdefinisi. Angka negatif tidak digunakan sebagai dasar karena, ekspresi sebagai berikut $(-4)^x$ adalah bukan bilangan asli jika $x = \frac{1}{2}$.

Contoh 1

$f(x) = 2^x,\ g(x) = (\frac{1}{4})^1 - x$, dan $h(x) = -3^x$. Tentukan :

a. $f(3/2)$
b. $f(-3)$
c. $g(3)$
d. $h(2)$

Jawab

a.

$$\begin{aligned} f(\frac{3}{2}) &= 2\frac{3}{2} \\ &= \sqrt{2^3} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} f(-3) &= 2^{-3} \\ &= \frac{1}{2}^3 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} g(3) &= (\frac{1}{4})^{1}-3 \\ &= (\frac{1}{4})^{-2} \\ &= 4^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} h(2) &= -3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

catatan

$$-(3)^2 = (-3)^2$$

Untuk semua penerapan fungsi eksponensial kita gunakan basis 10 basis lain yang disebut e. Bilangan e adalah sebagai bilangan irrasional yaitu sekitar 2.718. Basis 10 akan digunakan di sub bab selanjutnya. Basis 10 disebut basis umum, dan basis e disebut basis asli.

Contoh 2
$f(x) = 10^x$ dan $g(x) = e^x$.

Definisi
Misalkan a bilangan positive bukan 1,maka :

$$y = a\ log\ x\ jika\ dan\ hanya\ jika\ x = a^y$$

Basis yang paling umum diguakan adalah 10 dan logaritma yang dihasilkan dinmakan logaritma biasa. Tetapi dalam kalkulus dan semua matematika lanjutan basis yang penting adalah e. $log\ e$ yang merupakan invers $f(x) = e^x$.

$$ln\, x \ = \ y * ln\, a$$

dari sini kita simpulkan bahwa

$$jikay = a\ log\ x = \ ln\, x\, ln\, a$$

Dari ini,ndiperoleh bahwa $a\ log$ memenuhi sifat-sifat yang dihubungkan dengan logaritma juga,

$$D_x^a\ a\ log\ x = \frac{1}{x\ ln\ a}$$

Teorema A Sifat-Sifat Eksponen
Jika $a \geq 0$, $b \geq 0$, dan x dan y adalah bilangan-bilangan real, maka :
(i) $a^x a^y = a^x + y$
(ii) $(a^x)^y = a^x y$
(iii) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$
(iv) $\frac{a^x}{a^y} = a^x - y$
(v) $(ab)^x = a^x b^x$

Teorema B Aturan-Aturan Fungsi Eksponensial

$$\begin{aligned} Dx\ a^x &= a^x lna \\ \int a^x dx &= (\frac{1}{ln\ a}) * a^x + C\ a \neq 1 \end{aligned}$$

Contoh 1
Apabila $y = (x^2+1)^{sin\ x}$, tentukan dy/dx.

Jawab

$$\begin{aligned} ln\ y &= sin\ x\ ln(x^{2+1}) \\ \frac{1}{y} * \frac{dy}{dx} &= (sin\ x)\ 2\ \frac{x}{(x^{2+1})} + (cos\ x)\ ln(x^{2+1}) \\ \frac{dy}{dx} &= (x^2+1)^{sin\ x}\ 2\ x\ sin\ \frac{x}{x^2} + 1 + (cos\ x\ ln(x^2+1) \end{aligned}$$

Contoh 2
Apabila $y = (x^2+1)^{\pi} + \pi^{sin\ x}$, tentukan dy/dx.

Jawab

$$\frac{dy}{dx} = \pi(x^2+1)^{\pi-1}(2x) + \pi^{sin\ x}\ ln\ \pi\ cos\ x$$

Definisi Logaritma
Misalkan a bilangan positive bukan 1, maka:

$$y = a\ log\ x\ jika\ dan\ hanya\ jika\ x = a^y$$

Kita tahu bahwa apabila $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$. Fungsi yang menurun, apabila $a > 1$, f tersebut fungsi yang naik; sifat-sifat tersebut dapat dibuktikan dengan mempelajari turunan f. dalam dua kasus itu f memiliki invers.

Basis yang paling umum diguakan adalah 10 dan logaritma yang dihasilkan dinamakan logaritma biasa. Tetapi dalam kalkulus dan semua matematika lanjutan basis yang penting adalah e. $log\ e$ yang merupakan invers $f(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} log\, x &= ln\, x \\ ln\, x &= y\, ln\, a \end{aligned}$$

dari sini kita simpulkan bahwa

$$jika\ y = a\ log\ x = \frac{ln\ x}{ln\ a}.$$

Diperoleh bahwa $a\ log$ memenuhi sifat-sifat yang dihubungkan dengan logaritma juga,

$$D_x a\ a\ log\ x = \frac{1}{x\ ln\ a}$$

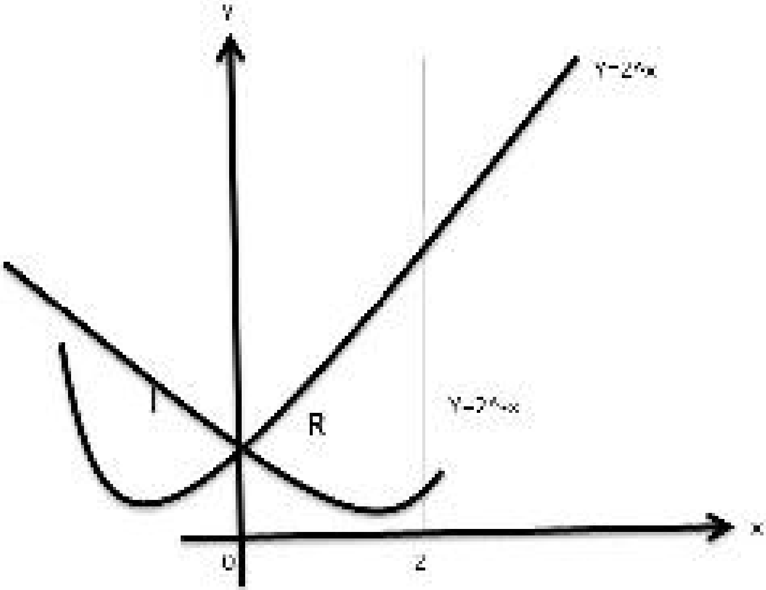


Figure 2.8: Grafik Fungsi $y = 2^x$ dan 2^{-x}

SOAL-SOAL

1. $3\ log\ 9 = \ x$
2. $x\ log\ 81 = 4$
3. $4\ log(\frac{1}{x})\ =\ 3$
4. $Y = sin^2 x\ +\ 2^{sin\ x}$, tentukan $\frac{dy}{dx}$
5. $Y = (ln\ x^2)^{2x} + 3$, tentukan $\frac{dy}{dx}$
6. $y = \frac{ln(x^2-1)^4}{\sqrt{(s^2+1)}}$
7. $y = ln(3x-2)^6(2x^3+5)^4$
8. $y = ln(x^2 + tan^2 x)$
9. $\int (8^{3x+1})dx$
10. Carilah persamaan garis singgung kurva, $y = x^{(ln\ x)}$, di titik (e,x)

2.6 Pertumbuhan dan Peluluhan Eksponen

Pada permulaan tahun 2004, penduduk dunia diperkirakan sebanyak 6,4 milyar. Dikatakan bahwa pada tahun 2020, penduduk akan mencapai 7,9 milyar. Bagaimanakah prakiraan yang demikian dibuat? Untuk menyelesaikan persoalan ini secara matematis, misalkan $y = f(t)$ menyatakan ukuran populasi pada saat t, dengan t banyaknya tahun setelah tahun 2004. Sebenarnya $f(t)$ berupa bliangan bulat dan grafiknya "meloncat" apabila ada seseorang lahit atau meninggal dunia. Namun, untuk populasi besar, locatan-loncatan ini demikian kecil relatif terhadap total populasi bahwasannya kita tidak akan terlalu salah jika menganggap bahwa f berupa suatu fungsi terdefinisiasikan yang manis.

Nampaknya beralasan untuk mengandaikan bahwa pertambahan populasi δy (kelahiran dikurangi kematian) dalam jangka waktu pendek δt sebanding terhadap ukuran populasi pada awal periode dan panjangnya periode tersebut. Jadi $\delta y = k\ y\ \delta t$, atau

$$\frac{\delta y}{\delta t} = ky$$

Dalam bentuk limit, ini memberikan persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Jika $k > 0$ populasi tumbuh, jika $k < 0$ populasi berkurang. Untuk populasi dunia, sejarah menunjukkan bahwa k sekitar 0,0132 (dengan anggapan bahwa t diukur dalam tahun), walaupun beberapa instansi melaporkan angka yang berbeda.

Menyelesaikan Persamaan Diferensial
Kita memulai kajian kita tentang persamaan diferensial, dan anda dapat melihat subbab tersebut sekarang. Kita ingin menyelesaikan $\frac{dy}{dt} = ky$ dengan syarat $y = y_0$ ketika $t = 0$. Dengan memisahkan variabel dan

mengintegrasikan, kita memperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= k\,dt \\ \int \frac{dy}{y} &= \int k\,dt \\ ln\,y &= k\,t + C \end{aligned}$$

Syarat $y = y_0$ pada $t = 0$ memberikan $C = ln\,y_0$. Sehingga

$$ln\,y - ln\,y_0 = k\,t$$

atau

$$ln\,\frac{y}{y_0} = k\,t$$

Perubahan ke bentuk eksponen menghasilkan

$$\frac{y}{y_0} = e^{k\,t}$$

atau, akhirnya

$$y = y_0\,e^{k\,t}$$

Ketika $k > 0$, tipe pertumbuhan ini disebut **pertumbuhan eksponensial**, dan ketika $k < 0$, dia disebut **peluruhan eksponensial**.

Kembali ke masalah populasi dunia, kita memilih untuk mengukur t dalam tahun setelah 1 Januari 2004, dan y dalam milyar orang. Jadi $y_0 = 6,4$ dan oleh karena $k = 0,0132$,

$$y = 6,4_e^{0,0132t}$$

Tahun 2020, ketika $t = 16$, kita dapat meramalkan bahwa y akan bernilai sekitar

$$y = 6,4_e^{0,0132(16)} = 7,4\;milyar$$

Contoh 1
Dengan anggapan di atas, setelah beberapa lamakah, populasi dunia akan menjadi dua kali lipat?

Jawab
Pertanyaan tersebut setara dengan menanyakan "Berapa tahunkah sesudah 2004, penduduk dunia mencapai 12,8 milyar?" Kita perlu menyelesaikan untuk t,

$$12,8 = 64_e^{0,0132t}$$
$$2 = e^{0,0132t}$$

Dengan menarik algoritma dari kedua ruas menghasilkan.

$$ln 2 = 0,0132t$$

$$t = \frac{ln\ 2}{0,0132} = 53\ tahun$$

Jika populasi dunia akan dua kali lipat dalam 53 tahun pertama setelah tahun 2004, populasi tersebut akan dua kali lipat dalam sebarang periode 53 tahun; sehingga misalnya populasi akan berlipat empat dalam 106 tahun. Secara lebih umum, jika suatu besaran yang tumbuh secara eksponen berlipat dua mulai dari y_0 ke $2y_0$ dalam suatu interval awal panjang T, maka ia akan berlipat dua dalam *sebarang* interval yang panjangnya T, karena

$$\frac{y(t+T)}{y(t)} = \frac{y_0^{e^{k(t+T)}}}{y_0^{e^{k\ t}}} = 2$$

Kita sebut bilangan T sebagai **waktu pengganda** *(double time).*
Contoh 2
Banyaknya bakteri dalam suatu kultur yang tumbuh secara cepat ditaksir sebesar 10.000 pada tengah hari dan sebesar 40.000 setelah dua jam. Prakirkan berapah banyak bakteri akan terdapat pada pukul 17.00?

Jawab
Kita anggap bahwa persamaan diferensial $\frac{dy}{dt} = k\ y$ dapat digunakan, sehingga $y = y_0^{e^{k\ t}}$. Sekarang kita mempunyai dua syarat ($y_0 = 10.000$ dan $y = 40.000$ pada $t = 2$), sehingga dapat kita simpulkan bahwa

$$40.000 = 10.000_e^{k(2)}$$

atau

$$4 = e^{2k}$$

Dengan melogaritmakan, kita memperoleh

$$ln\,4 = 2k$$

atau

$$k = \frac{1}{2}\,ln\,4 = ln\sqrt{4} = ln2$$

Jadi,

$$y = 10.000_e^{(ln2)t}$$

dan pada $t = 5$, ini memberikan

$$y = 10.000_e^{0,693(5)} = 320.000$$

Model eksponensial $y = y_0^{e^{kt}}$, untuk pertumbuhan populasi bercacat karena memproyeksikan pertumbuhan yang semakin cepat secara tak terhingga jauh ke masa depan. Paada kebanyakan kasus (termasuk kasus populasi dunia), keterbatasan ruang dan sumber daya pada akhirnya akan memaksa laju pertumbuhan yang lebih lambat. Ini menyarankan model pertumbuhan populasi yang lain, disebut **model logistik**. Dalam model ini kita menganggap bahwa laju pertumbuhan sebanding baik terhadap besarnya populasi y maupun terhadap selisih $L-y$, dengan L adalah populasi maksimum yang dapat ditunjang. Ini menuju ke persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} = k\,y(L-y)$$

Perhatikan bahwa untuk nilai y kecil, $\frac{dy}{dt} = k\,L\,y$ yang menyarankan pertumbuhan tipe eksponensial. Tetapi ketika y mendekati L, pertumbuhan terbatasi dan $\frac{dy}{dt}$ menjadi semakin kecil, menghasilkan kurva pertumbuhan.

Peluruhan Radioaktif

Tidak segala sesuatu tumbuh, beberapa berkurang menurut waktu. Khususnya, zat-zat radioaktif mengalami *peluruhan (decay)*, dan berlangsung pada laju yang sebanding dengan banyaknya zat yang ada. Sehingga laju perubahannya juga memenuhi persamaan diferensial.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Tetapi sekarang k negatif. Adalah tetap benar bahwa $y = y_0^{kt}$ merupakan penyelesaian terhadap persamaan ini.

Contoh 3
Karbon 14, salah satu isotop karbon, adalah zat radioaktif dan meluruh dengan laju yang sebanding dengan banyaknya zat yang ada.

Waktu Paruh nya adalah 5730 tahun; artinya dalam waktu 5730 tahun, karbon 14 akan meluruh hingga menjadi setengah massa awalnya. Jika pada saat awal teradapat 10 gram, berapakah yang akan tersisa setelah 2000 tahun?

Jawab
Dari waktu-paruhnya, 5730 tahun, kita dapat menentukan k,

$$\frac{1}{2} = 1_e^{k(5730)}$$

atau, setelah mengambil logaritma

$$-ln\,2 = 5730k$$

$$k = \frac{-ln\,2}{5730} = -0,000121$$

Jadi,

$$y = 10_e^{-0,000121_t}$$

Pada $t = 2000$, ini menghasilkan

$$y = 10_e^{-0,000121(2000)} = 7,85\ gram$$

Perhatikan bagaimana Contoh 3 dapat digunakan untuk menentukan umur fosil dan makhluk hidup di permukan bumi ini.

Hukum Newton tentang Pendinginan
Hukum Newton tentang Pendinginan mengatakan bahwa laju sebuah benda mendingin (atau memanas) berbanding lurus dengan selisih suhu di antara benda tersebut dengan medium sekelilingnya. Secara suhunya adalah T_1. Jika $T(t)$ menyatakan suhu benda pada waktu t, maka Hukum Newton tentang Pendinginan mengatakan bahwa

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_1)$$

Persamaan diferensial ini dapat dipisahkan dan dipecahkan seperti masalah pertumbuhan dan peluruhan dalam subbab ini.

Contoh 4
Sebuah benda diambil dari alat pemanas pada 350^oF dan dibiarkan mendingin dalam ruangan pada 70^oF. Jika suhu jatuh ke 250^oF dalam satu jam, akan beberapa suhunya tiga jam setelah diambil dari alat pemanas?

Jawab
Persamaan diferensial dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= k(T-70) \\ \frac{dT}{T-70} &= k\,dt \\ \int \frac{dT}{T-70} &= \int k\,dt \\ ln|T-70| &= k\,t + C \end{aligned}$$

Karena suhu awal lebih besar daripada 70, nampaknya masuk akal bahwa suhu benda akan menurun kearah 70, sehingga $T-70$ akan positif dan tidak diperlukan nilai mutlak. Ini menuju ke

$$T - 70 = e^{k\,t+C}$$

$$T = 70 + C_1 e^{k-0}$$

Di mana $C_1 = e^c$. Sekarang kita terapkan syarat awal, $T(0) = 350$ untuk mencari C_1:

$$350 = T(0) = 70 + C_1 e^{k-0}$$

$$280 + C_1$$

Jadi penyelesaian persamaan diferensial adalah

$$T(t) = 70 + 280_e^{k\,t}$$

Untuk mencari k kita terapkan syarat bahwa pada waktu $t = 1$ suhu adalah $T(1) = 250$.

$$250 = T(1) = 70 = 280_e^{k1}$$

$$280_e^k = 180$$

$$e^k = \frac{180}{280}$$

$$k = ln\frac{180}{280} = -0,44183$$

Ini memberikan

$$T(t) = 70 + 280_e^{-0,44183t}$$

Lihat gambar 4. Setelah 3 jam, suhu adalah

$$T(3) = 70 + 280_e^{-0,44183.3} = 144,4^oF$$

Bunga Majemuk

Jika kita menyimpan 100 di bank dengan bunga majemuk $\frac{12}{100}$ secara bulanan, maka tabungan kita bernilai $100(1,01)^2$ pada akhir bulan pertama, bernilai $100(1,01)^2$ pada akhir bulan kedua, dan bernilai $100(1,01)^{12}$ pada akhir bulan kedua belas, atau 1 tahun. Secara lebih umum, jika kita menyimpan A_0 dollar di bank dengan bungan majemuk 100r persen secara majemuk sebanyak n kali setiap tahun, maka modal itu bernilai $A(t)$ dollar pada akhir t tahun, dengan

$$A(t) = A_0(1+\frac{r}{n})^{n\ t}$$

Contoh 5

Andaikan Dono menyimpan 500 di bank dengan bunga majemuk harian sebesar 4. Akan menjadi berapakah nilainya pada akhir tahun ketiga?

Jawab

Di sini $r = 0.04$ dan $n = 365$, sehingga

$$A = 500(1+\frac{0,04}{365})^{365(3)} = 563,74$$

Perhatikan sekarang apa yang terjadi apabila **bunga majemuk dijalankan secara kontinu**, yaitu ketika n, bilangan yang menunjukkan periode kemajemukan dalam setahun, cederung menuju ke tak-terhingga. Maka kita nyatakan bahwa

$$A(t) = \lim_{x\to\infty} A_0(1+\frac{r}{n})^{n\,t} = A_0$$

Di sini $\frac{r}{n}$ kita gantikan dengan h dan memperhattikan bahwa $n \to \infty$ berpadanan dengan $h \to 0$, tetapi langkah besar adalah dengan mengetahui bahwa ekspresi dalam kurung siku adalah bilangan e. Hasil ini cukup penting untuk disebut sebuah teorema.

Teorema A

$$\lim_{h\to\ 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

Bukti Pertama ingat kembali bahwa jika $f(x)$, maka $f'(x) = \frac{1}{x}$ dan khususnya $f(1) = 1$, Kemudian dari definisi turunan dan sifat sifat in kita peroleh

$$\begin{aligned}
1 &= f'(x) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-ln\,1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}ln(1+h) \\
&= \lim_{h\to 0}\ ln(1+h)^{\frac{1}{h}}
\end{aligned}$$

Jadi $\lim_{h\to 0}\ ln(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1$, hasil yang akan kita gunakan sebentar lagi. Sekarang, $g(x) = e^x = exp\,x$ adalah fungsi yang kontinu, ini berarti kita dapat melewati limit kedalam eksponen dalam argumentasi berikut.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{h\to 0} exp\ [ln(1+h)^{\frac{1}{h}}] \\
&= exp\ [\lim_{h\to 0} ln(1+h)^{\frac{1}{h}}] \\
&= exp\ 1 \\
&= e
\end{aligned}$$

Contoh 6
Andaikan bank pada contoh 5 memberi bunga majemuk yang kontinu, akan menjadi berapakah uang dono pada akhir tahun ketiga?

Jawab

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 e^{r\,t} \\ &= 500e^{(0,04)(3)} \\ &= 563,75 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, walaupun beberapa bank mencoba mendekatkan promosi iklan dengan menawarkan bunga majemuk kontinu, perbedaan dalam hasil antara bunga majemuk secara kontinu dan yang secara harian (yang ditawarkan banya bank) ternyata sangat kecil. Berikut pendekatan lain terhadap masalah pemajemukan bunga secara kontinu. misalkan A adalah nilai pada saat r dari uang sebesar A_0 dollar yang diinvestasikan dengan suku bunga r. mengatakan bahawa bunga majemuk secara kontinu berarti bahwa laju perubaan sesaat dari A terhadap waktu adalah rA: yakni,

$$\frac{dA}{dt} = rA$$

persamaan diferensial ini diselesaikan pada bagian awal subbab ini. Penyelesaiannya adalah $A = A_0 e\ r\,t$.

SOAL-SOAL

1. Suatu populasi bakteri berkembang pada laju yang sebanding dengan ukurannya. pada awalnya ada 10000 dan setelah 10 hari terdiri atas 20000 bakteri. berapakah populasi bakteri setelah 25 hari? Lihat Contoh 2.
2. Massa tumor tumbuh pada laju yang sebanding terhadap akarnya. pengukuran pertama menghasilkan ukuran 4,0 gram empat bulan kemudian massanyaadalah 6,76 gram. berapa bodot empat bulan sebelum pengukuran pertama? jika alat dapat mendeteksi tumor bermassa 1 gram atau lebih besar, apakah tumor sendut telah terdeksi pada waktu itu?
3. Sebuah benda awalnya pada 26 F diletakkan dalam air 90 C. Jika suhu benda meninggi 70 C dalam 5 menit, akan berapakah suhunya setelah 10 menit?

4. Persamaan untuk pertumbuhan logistik adalah

$$\frac{dy}{dt} = ky(L-y)$$

Perlihatkan bahwa persamaan diferensial ini mempunyai penyelesaian

$$y = \frac{Ly_0}{y_0 + (L-y_0)e^{-L\,k\,t}}$$

Petunjuk:

$$\frac{1}{y(L-y)} = \frac{1}{Ly} + \frac{1}{L(L-y)}.$$

5. Sketsakan grafik penyelesaian Soal 34 jika $y_0 = 6,4$, $L = 16$, $K = 0,00186$ *(model logistik* untuk popuplasi dunia; lihat pembahawan pada awal subbab ini). Perhatikan pula bahwa

$$\lim_{t\to\infty} y = 16.$$

2.7 Fungsi Trigonometri Invers

Fungsi trigonometri invers adalah fungsi invers suatu fungsi *sin*, *cos*, *tan*, *cotan*, *sec* dan *csc*, yang digunakan untuk mencari suatu sudut dari rasio trigonometri sudut yang lain. Jika membahas tentang fungsi invers trigonometri maka harus membatasi batas domainnya. Pada bagian ini akan mempelajari metode standar untuk melakukan operasi pembatasan dengan fungsi trigonometri .

2.7.1 Fungsi Invers Sin dan Cos

Pertimbangan fungsi sinus dengan doamain terbatas dengan interval $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Gunakan notasi $sin\ x$ untuk menunjukan fungsi terbatas. dapat dilihat bahwa,

$$\frac{d}{dx} sin\ x = cos\ x > 0$$

Pada interval $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pada titik akhir interval fungsi $sinx$ mengambil nilai [-1,1]. Karena itu $sin\ x$ bertambah pada seluruh domain. Fungsi *sin* mengasumsikan setiap nilai dalam interval [-1,1]. Jadi $sin\ x\ [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$ adalah satu persatu, oleh karena itu dapat ditulis $f(x) = sin\ x$ adalah fungsi tidak dapat dibalik.

Kita dapat memperoleh grafik sin^{-1} dengan prinsip refleksi dibaris $y = x$. fungsi sin^{-1}:$[-1,1] \longrightarrow [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ semakin meningkat satu persatu. Perhatikan grafik berikut yang merupakan invers dari fungsi sin.

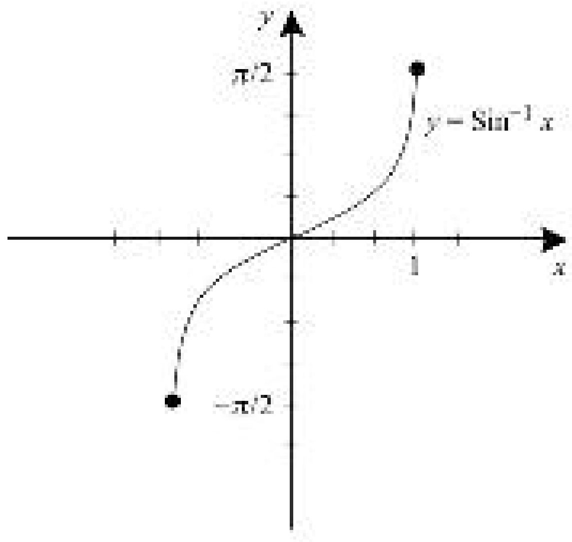


Figure 2.9: Grafik sin^{-1}

$$Jika\ x = sin^{-1}y,$$
$$y = sin\ x\ dimana\ [\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}]$$

Pada interval $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tepat di titik akhir interval dan hanya fungsi $sin\ x$ mengambil nilai -1 dan 1. sebelum $sin\ x$ bertambah di seluruh domainnya. Fungsi sin mengasumsikan setiap nilai pada inteval $[-1,1]$. Demikian $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$. Maka dari itu $f(x) = sin\ x$ adalah fungsi yang tidak bisa dibalik. Kita dapat memperoleh grafik dengan prinsip refleksi pada baris $y = x$.

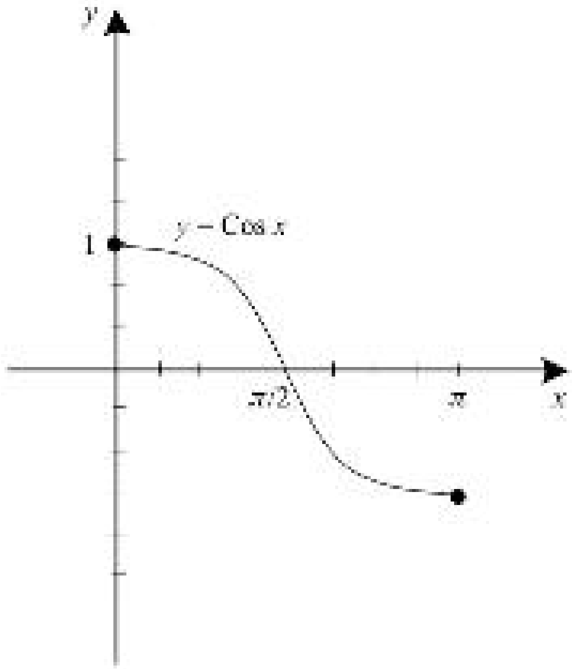


Figure 2.10: Grafik Fungsi *cos x*

Invers kosinus hampir sama dengan invers sinus tapi harus memilih domain yang berbeda untuk fungsi ini. Dapat didefinisikan *cos x* menjadi fungsi kosinus bila dibatasi pada inteval $[0,\pi]$. demikian dapat ditunjukan $g(x) = cos\ x$. Dibutuhkan semua nilai dalam inteval $[-1,1]$ karena itu $cos\ x : [0, pi] \longrightarrow [-1,1]$ maka disebutkan proses sebuah inverse. Kita dapat memeperoleh grafik dari refleksi pada *cos x* di garis $y = x$ untuk memperoleh grafik fungsi cos^{-1}.

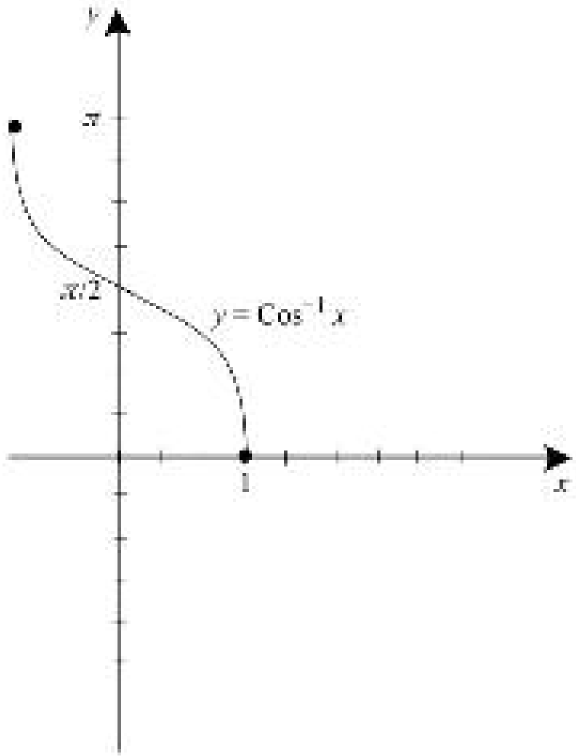


Figure 2.11: grafik $cos^{-1}\,x$

Contoh 1
$Sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Jawab
$Sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

Contoh 2
$Sin^{-1}0$.

Jawab
$Sin^{-1}0 = 0$.

Contoh 3
$Sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Jawab
$Sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\pi}{4}$.

Contoh 4
$Cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$.
Jawab
$Cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}/2}{)} = \frac{5\pi}{6}$.

Contoh 5
$Cos^{-1}0$.

Jawab
$Cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$.

Contoh 6
$Cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Jawab
$Cos^{-1}(\frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

2.7.2 Fungsi inverse tan

Mendefinisikan fungsi $tan\ x$ ke interval $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. perhatikan bahwa fungsi tangen tidak terdefinisi pada titik akhir interval ini. sehingga dapat ditulis

$$\frac{d}{dx} tan\ x = sec^2 x$$

Kita dapat melihat bahwa $tan\ x$ meningkat satu per satu dengan mengambil nilai x terdekat dari bilangan positif terbesar tetapi kurang dari $\frac{\pi}{2}$. Mengambil nilai x terdekat daari bilangan mutlak negatif tetapi lebih besar dari $\frac{\pi}{2}$. Sehingga,

$$Tan : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-\infty, \infty]$$

Maka invers dari tan dapat di tulis

$$Tan^{-1} : [-\infty, \infty] \longrightarrow [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \; maka \; diperoleh \; garis \; y = x$$

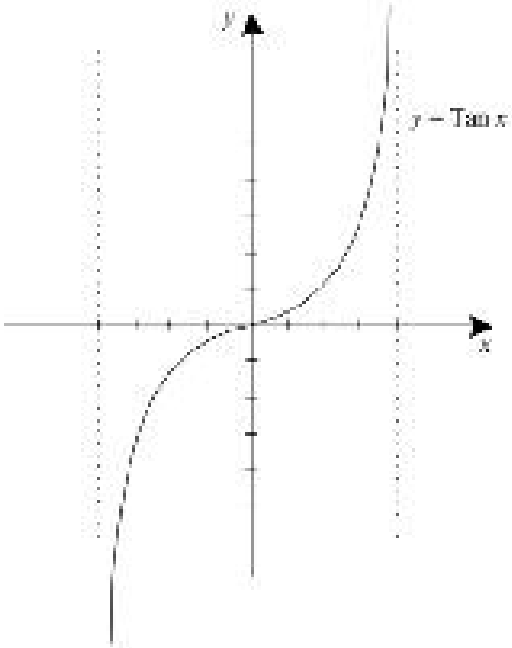


Figure 2.12: Grafik fungsi *tan x*

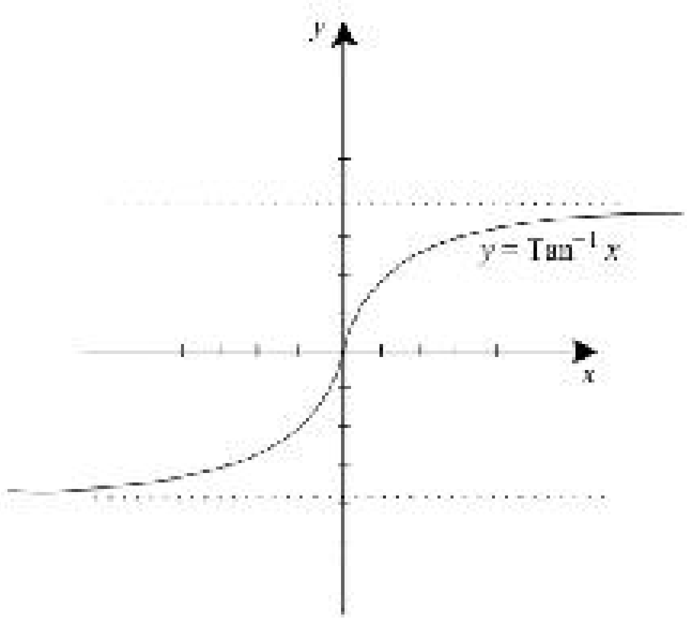


Figure 2.13: Grafik tan^{-1}

Contoh 1
$Tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Jawab
$Tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{6}$.

Contoh 2
$Tan^{-1}1$.

Jawab
$Tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$.

Contoh 3
$Tan^{-1}(-\sqrt{3})$.

Jawab
$Tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

2.7.3 Fungsi invers Sec

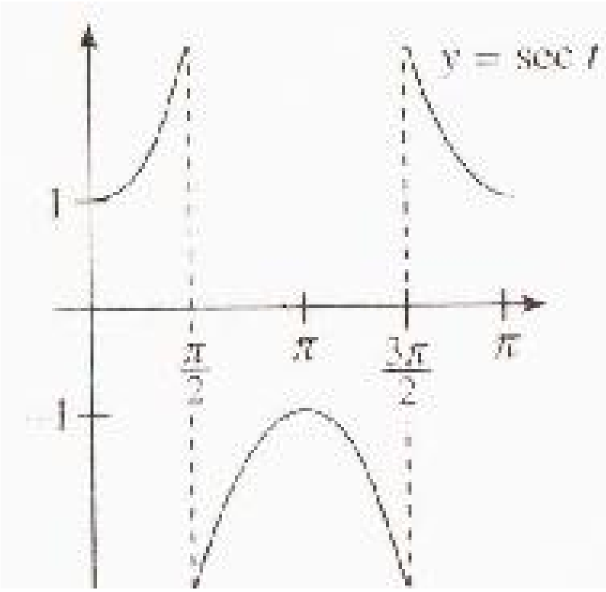


Figure 2.14: Grafik $sec^{-1}\ t$

Mulai dengan menggambar grafik fungsi sekan, maka dibatasi daerah asalnya supaya ada invers. Gambar fungsi Grafik secan yaitu $y = sec^{-1}\ t$ untuk memperoleh invers fungsi secan, kita batasi daerah asal secan pada himpunan $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Sehingga,

$$Jika\ x = sec^{-1}\ y\ maka\ y = sec\ x\ dimana\ [0 \leq x \leq \pi]\ dengan\ x \neq \frac{\pi}{2}.$$

Contoh 1
$Sec^{-1}(-1) = cos^{-1}(-1) = \pi.$

Contoh 2
$Sec^{-1} = (-\sqrt{3}).$

2.7.4 Empat Pemakaian Kesamaan

Contoh 1
$Cos(2\ sin^{-1}(\frac{4}{5})) = \ldots.$

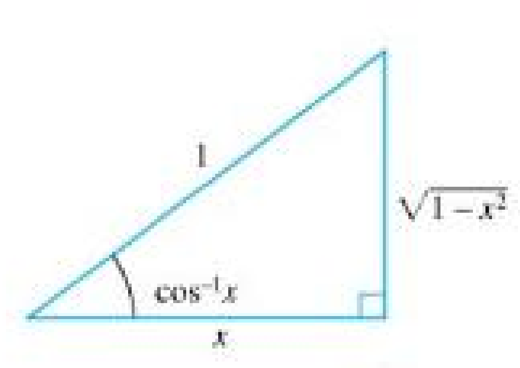


Figure 2.15: $Sin(cos^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$

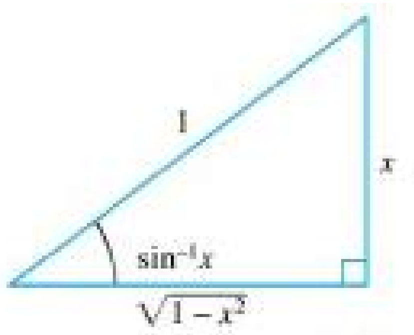


Figure 2.16: $Cos(sin^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$

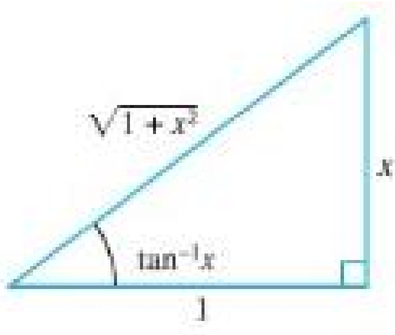


Figure 2.17: $Sec(tan^{-1}x) = \sqrt{1+x^2}$

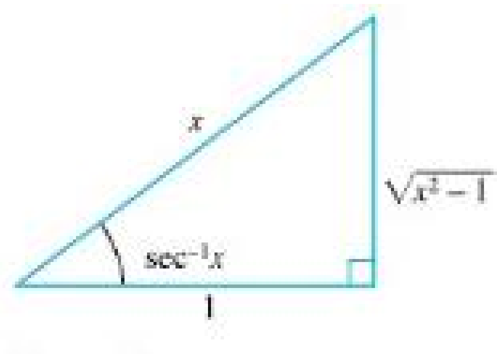


Figure 2.18: $Tan(sec^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$

Jawab
Misalkan $a = sin^{-1}(\frac{4}{5})$
maka $sin\ a = \frac{4}{5}$
diberikan $cos\ 2a$ maka

$$\begin{aligned} cos\ 2a &= 1-2\ sin^2 a \\ &= 1-2(\frac{16}{25}) \\ &= \frac{-7}{25} \end{aligned}$$

Contoh 2
$Tan(sin^{-1}(x)) = \ldots.$

Jawab
Diberikan $tan(sin^{-1}(x)) =$
ubah $tan = \frac{sin}{cos}$, maka

$$\frac{sin(sin^{-1}(x))}{cos(sin^{-1}(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pembilang menjadi x dari definisi

$$\frac{x}{cos(sin^{-1}(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

subsitusikan $\sqrt{1-u^2}$ pada $sos(u)$

$$\frac{x}{\sqrt{1-sin^2(sin^{-1}(x))}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$sin^2(sin^{-1}(x))$ menjadi x^2

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

SOAL-SOAL

1. $Cos^2(x-2) = \ldots$
2. $Sin\sqrt{2+7x} = \ldots$
3. $y = \frac{x}{1-tanx}$.
4. $y = sin^{-1}(x^2)$.
5. $y = sec^{-1}(x^2)$.
6. $y = tan(sin^{-1}x)$.
7. Buktikan bahwa $\int \frac{d_x}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}sec^{-1}$.
8. Tentukan integral nya $\int x\ sin(x^2)\ d_x$.
9. Tentukan integral nya $\int sin\ 2x\ cos\ 2x\ d_x$.
10. Tentukan integral nya $\int tan\ x\ d_x = \int \frac{sin\ x}{cos\ x}\ d_x$.

2.8 Turunan Fungsi Trigonometri

Sebelum memulai subbab ini, Anda perlu memahami kembali fungsi - fungsi trigonometri. Perlu diingat bahwa ketika kita membicarakan tentang fungsi f yang didefiniisikan utuk semua bilangan riil x oleh

$$f(x) = sinx$$

Maka dipahami bahwa *sin x* akan bermakna sudut sinus yang ukuran *radian-nya* adalah x. Kaidah yang sama berlaku untuk fungsi trigonometri lainnya. Perlu kita ketahui bahwa semua fungsi trigonometri adalah kontinu di setiap bilangan dalam daerah asalnya.

Maka dari itu kita akan membuktikan bahwa $f(x) = sin\ x$, maka

$f'(x) = cos\ x$. Dari definisi turunan, diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h)-sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{sin\ x\ cos\ h + cos\ x\ sin\ h - sin\ x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{sin\ x\ cos\ h - sin\ x}{h} + \frac{cos\ x\ sin\ h}{h} \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \left[sin\ xcos\left(\frac{h-1}{h}\right) + cos\ x\left(\frac{sin\ h}{h}\right)\right] \\ &= \lim_{h\to 0} sin\ x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{cos\ h-1}{h} + \lim_{h\to 0} cos\ x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{sin\ h}{h} \end{aligned}$$

Dua dari empat limitnya mudah untuk dihitung. Oleh karena itu, kita menganggap x konstanta ketika menghitung sebuah limit sewaktu $h \to 0$, maka

$$\lim_{h\to 0} \sin x = \sin x\ dan \lim_{h\to 0} \cos x = \cos x$$

Limit dari $\frac{(sin\ h)}{h}$ tidak begitu jelas. oleh karena itu kita membuat tebakan, berdasarkan bukti numerik dan grafik, bahwa

$$\lim_{h\to 0} \frac{sin\ \theta}{\theta} = 1$$

Digunakan alasan geometri untuk membuktikan persamaan diatas. Pertama asumsikan bahwa θ terletak diantara 0 dan $\frac{\pi}{2}$. Gambar 2.19 memperlihatkan juring lingkaran dengan pusat O, sudut pusat π, dan jari-jari 1. BC digambar tegak lurus pada OA. Dengan definisi dari ukuran radian, kita mempunyai busur AB=θ. Selain itu, $|BC| = |OB| \sin\theta = \sin\theta$. Dari diagram tersebut kita lihat bahwa

$$|BC| < |AB| < arc\ AB$$

Oleh karena itu,

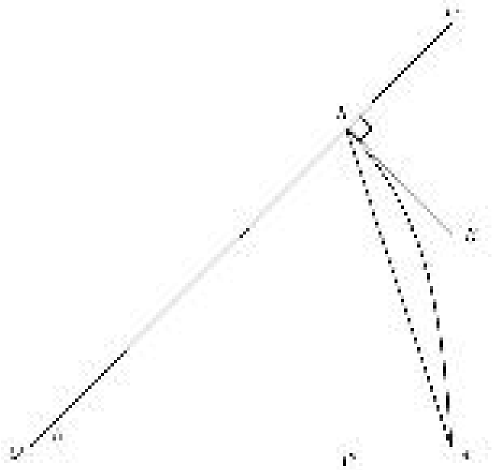


Figure 2.19: Gambar a

$$\sin\theta = \theta \; sehingga \; \frac{sin\ \theta}{\theta}.$$

Misalkan garis singgung di A dan B berpotongan di E. Anda dapat melihat dari Gambar 2.20 bahwa garis keliling lingkaran lebih kecil dari panjang sebuah pilogon tertutup, dan dengan demikian $arc\ AB < |AE| + |EB|$. Maka,

$$\theta = arc\ AB\, |AE| + |EB| < |AE| + |EB|$$

(Dalam lampiran F pertidaksamaan $\theta \leq tan\ \theta$ dibuktikan langsung dari definisi panjang busur tanpa menggunakan intuisi geometri seperti yang kita lakukan disini).

Oleh karena itu,

$$\theta < \frac{sin\ \theta}{cos\ \theta} < 1.$$

Jadi,

$$\cos\theta < \frac{sin\theta}{cos\theta} < 1.$$

Kita ketahui bahwa $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1 \; dan \; \lim_{\theta\to 0} cos\theta$, maka menurut teorema jepit,

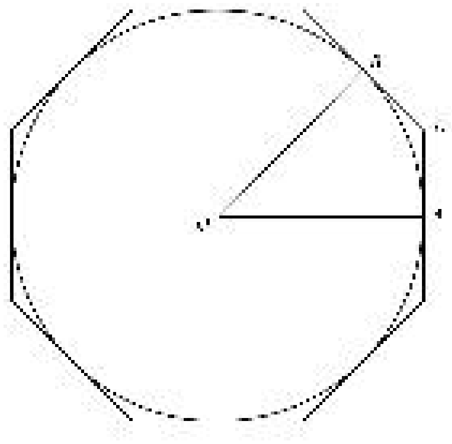


Figure 2.20: Gambar b

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{sin\theta}{\theta} = 1$$

Akan tetapi fungsi $\frac{(sin\theta)}{\theta}$ adalah sebuah fungsi genap, jadi limit kiri dan kanan harus sama. Oleh karena itu, kita peroleh

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sin\theta}{\theta} = 1$$

Kita dapat menyimpulkan nilai dari limit yang tersisa sebaga berikut :

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{cos\ \theta-1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{cos\ \theta-1}{\theta}\cdot\frac{cos\ \theta+1}{cos\ \theta+1}\right)\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{cos^2\theta-1}{\theta\,(cos\ \theta+1)}\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{-sin^2\theta}{\theta\,(cos\ \theta+1)}\\
&= -\lim_{\theta\to 0}\frac{sin\ \theta}{\theta}\cdot\frac{sin\ \theta}{cos\theta+1}\\
&= -\lim_{\theta\to 0}\frac{sin\ \theta}{\theta}\cdot-\lim_{\theta\to 0}\frac{sin\ \theta}{cos\ \theta+1}\\
&= -1\cdot\left(\frac{0}{1+1}\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Kita mendapatkan

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} sin\ x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{cos\ h-1}{h}+\lim_{h\to 0} cos\ x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{sin\ h}{h}\,(sin\ x)\cdot 0\\
&\quad +(cos\ x)\cdot 1\\
&= cos\ x
\end{aligned}
$$

Jadi kita telah membuktikan rumus untuk turunan dari fungsi sinus:

$$\frac{d}{dx}(sin\ x) = cos\ x$$

Sesuai pembuktian bahwa $D_x\ sin\ x = cos\ x$ dan $D_x\ cos\ x = sin\ x$. Fungsi Trigonometri yang lainnya dapat dinyatakan dengan sinus dan kosinus, yaitu:

$$
\begin{aligned}
tan\ x &= \frac{sin\ x}{cos\ x}, & cot\ x &= \frac{cos\ x}{sin\ x}\\
sec\ x &= \frac{1}{cos\ x}, & csc\ x &= \frac{1}{sin\ x}
\end{aligned}
$$

Dengan aturan turunan hasil bagi, kita dapat menurunkan fungsi-fungsi di atas. Diantaranya,

$$\begin{aligned} D_x\ cot\ x &= D_x\ (\frac{cos\ x}{sin\ x}) \\ &= \frac{sin\ x\ (-sin\ x)\ -\ cos\ x\ cos\ x}{sin^2\ x} \\ &= \frac{-1}{sin^2\ x} \\ &= -csc^2\ x \end{aligned}$$

Kemudian dibawah ini disajikan rangkuman turunan fungsi trigonometri. Sebaiknya anda dapat mengingatnya

$$\begin{aligned} D_x\ sin\ x &= cos\ x & \qquad D_x\ cos\ x &= -sin\ x \\ D_x\ tan\ x &= sec^2\ x & \qquad D_x\ cot\ x &= -csc^2\ x \\ D_x\ sec\ x &= sec\ x\ tan\ x & \qquad D_x\ csc\ x &= -csc\ x\ cot\ x \end{aligned}$$

Fungsi-Fungsi Komposit

Aturan di atas dapat di rangkaikan dengan Aturan Rantai untuk memperoleh turunan fungsi u yang lebih rumit misalnya, kalau $u = f(x)$ dapat dideferensiasikan, maka

$$D_x\ sin\ u\ =\ cos\ u\ .\ D_x\ u$$

Soal-Soal

Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$.

1. $y = cos^2(x-2)$.
2. $y = sin\sqrt{2+7x}$.
3. $f(x) = x - 3\ \sin\ x$.
4. $f(x) = x\ \sin\ x$.
5. $y = cot\ x \csc\ x$.
6. $y = \frac{x}{1-tan\ x}$.
7. $y = e^{cot\ x}$.
8. $y = sin\ x + 10\ tan\ x$.
9. $y = \frac{1+sin\ x}{x+cos\ x}$.
10. $y = tan^{-1}(\frac{1-x}{1+x})$.

2.9 Fungsi Hiperbola dan Inversnya

2.9.1 Fungsi Hiperbola

Sering dijumpai dalam matematika teknik terapan fungsi yang merupakan kombinasi dari fungsi e^x dan e^{-x}, sehingga kombinasi kedua fungsi tersebut diberi nama khusus. Dua diantara fungsi khusus tersebut adalah fungsi sinus hiperbola, dan fungsi cosinus hiperbola. Berikut ini definisi fungsi-fungsi hiperbola. Fungsi sinus hiperbola, cosinus hiperbola, dan empat fungsi hperbola lainnya didefinisikan,

$$\begin{aligned}
sinh\,x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
cosh\,x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
tanh\,x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
coth\,x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\
sech\,x &= \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\
csch\,x &= \frac{2}{e^x - e^{-x}}
\end{aligned}$$

Karena fungsi hiperbola didefinisikan kombinasi dari e^x dan e^{-x}, maka sketsa grafiknya dapat diturunkan dari kombinasi kedua fungsi tersebut. Berdasarkan definisi diatas, berikut ini adalah contoh-contoh grafik dari fungsi hiperbola.

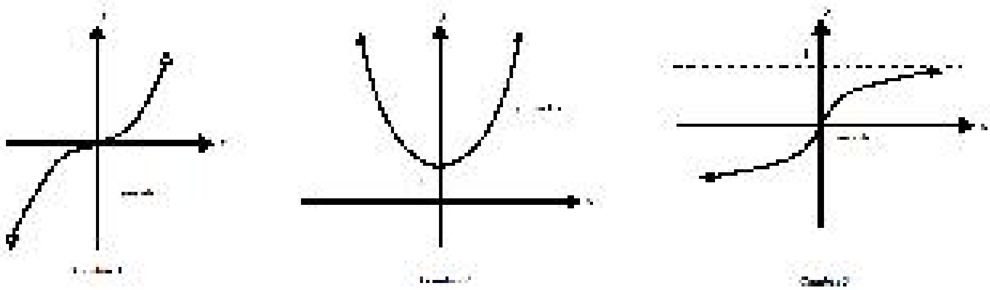


Figure 2.21: Grafik Fungsi Hiperbola

Istilah yang digunakan dalam mendefinisikan fungsi hiperbola memberikan kesan, fungsi ini ada kaitannya dengan fungsi trigonometri. Hal ini memang benar, karena ada beberapa kesamaan identitas antara fungsi trigonometri dan fungsi hiperbola. Beberapa kesamaan identitas yang dimaksud antara lain adalah,

1. $cosh^2 x - sinh^2 x = 1$
2. $tanh^2 x + sech^2 x = 1$
3. $coth^2 x - csch^2 x = 1$
4. $sinh\ (x+y) = sinh\ x\ cosh\ y + cosh\ x\ sinh\ y$
5. $cosh\ (x+y) = cosh\ x\ cosh\ y + sinh\ x\ sinh\ y$
6. $sinh 2x = 2\ sinh\ x\ cosh\ y$
7. $cosh\ 2x = 2\ cosh^2\ x - 1 = 2\ sinh^2 + 1 = cosh^2\ x + sinh^2\ x$
8. $\dfrac{tanh\ x + tanh\ y}{1 + tanh\ x\ tanh\ y}$

Bukti dari kesamaan diatas dapat diperoleh langsung dari definisi. Sebagai ilustrasi misalkan akan dibuktikan untuk kesamaan (1)

$$\begin{aligned} cosh^2\ x - sinh^2\ x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Oleh karena fungsi hiperbola dinyatakan dengan e^x dan e^{-x}, maka tidak begitu mengherankan bahwa balikan fungsi hperbola dapat dinyatakan dengan logaritma natural. Misalnya, perhatikanlah $y = cosh\ x$ untuk $x \geq 0$; yakni

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \geqslant 0$$

Sasaran kita adalah menyelesaikan persamaan ini untuk x, yang akan memberikan $cosh^{-1}y$, dengan mengalikan kedua ruas itu dengan $2e^x$, kita memperoleh

$$2ye^x = e^{2x} + 1,$$

atau

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0, \ x \geq 0.$$

Jadi kita menyelesaikan persamaan kuadrat ini dalam e^x, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{2y + \sqrt{(2y)^2 - 4}}{2} \\ &= y + \sqrt{y^2 - 1} \end{aligned}$$

Rumus kuadrat memberikan dua penyelesaian, satu diberikan di atas dan $(\frac{2y - \sqrt{(2y)^2 - 4}}{2})$. Penyelesaian terakhir ini tidak ada hubungannya karena lebih kecil dari 1, dimana e^x lebih besar dari 1 untuk semua $x > 0$. Jadi, $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$, maka

$$\begin{aligned} x &= cosh^{-1}y \\ &= \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \end{aligned}$$

Turunan fungsi hiperbola:

1. $\frac{d(sinh\ x)}{dx} = cosh\ x$

2. $\frac{d(cosh\ x)}{dx} = sinh\ x$

3. $\frac{d(tanh\ x)}{dx} = sech^2\ x$

4. $\frac{d(coth\ x)}{dx} = -csch^2\ x$

5. $\frac{d(sech\ x)}{dx} = -tanh\ x\ sech\ x$

6. $\frac{d(csch\ x)}{dx} = -csch\ x\ coth\ x$

Bukti:

1. Dipunyai $sinh\ x\ = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{d(sinh\ x)}{dx} &= \frac{d\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)}{dx}\\ &= \frac{1}{2}\frac{d(e^x - e^{-x})}{dx}\\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\\ &= cosh\ x\end{aligned}$$

   Jadi, $\dfrac{d(sinh\ x)}{dx} = \ cosh\ x.$

2. Dipunyai $cosh\ x\ = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{d(cosh\ x)}{dx} &= \frac{d\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)}{dx}\\ &= \frac{1}{2}\frac{d(e^x + e^{-x})}{dx}\\ &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\\ &= sinh\ x\end{aligned}$$

   Jadi, $\dfrac{d(cosh\ x)}{dx} = \ sinh\ x.$

Invers Fungsi Hiperbola: Invers fungsi hiperbola dikontruksi dengan cara yang sama seperti invers fungsi trigonometri.

1. $y = sinh^{-1}\,x \Longleftrightarrow x = sinh\,y$
2. $y = cosh^{-1}\,x \Longleftrightarrow x = cosh\,y$
3. $y = tanh^{-1}\,x \Longleftrightarrow x = tanh\,y$
4. $y = coth^{-1}\,x \Longleftrightarrow x = coth\,y$
5. $y = sech^{-1}\,x \Longleftrightarrow x = sech\,y$
6. $y = csch^{-1}\,x \Longleftrightarrow x = csch\,y$

Bukti:

1. Invers Fungsi Sinus Hiperbola
   Diketahui $f : R \to R,\ f(x) = sinh\,x$.
   Ambil sembarang $x_1,\ x_2 \in R,\ x_1 \neq x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= sinh\,x_1 - sinh\,x_2. \\ &= \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} - \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \\ &= \frac{(e^{x_1} - e^{x_2}) + (e^{-x_2} - e^{-x_1})}{2} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

   Jadi fungsi f satu-satu.
   Berikutnya ditunjukkan f fungsi pada.
   Ambil sembarang $x \in R$.
   Tulis $x = sinh\,y$, untuk suatu $y \in R$.
   Jelas $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$$
\begin{array}{lcl}
\iff & 2x & = e^y - e^{-y} \\
\iff & 2xe^y & = e^y(e^y - e^{-y}) \\
\iff & 2xe^y & = e^{2y} - 1 \\
\iff & e^{2y} - 2e^y x - 1 & = 0 \\
\iff & [(e^y)^2 - 2e^y x + x^2] - (1 + x^2) & = 0 \\
\iff & (e^y - x)^2 - (\sqrt{1+x^2})^2 & = 0 \\
\iff & e^y = x - \sqrt{1+x^2} & \vee e^y = x + \sqrt{1+x^2}
\end{array}
$$

Jelas $e^y = x + \sqrt{1+x^2} \iff y = ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
Jadi $\forall\, x \in\ R \exists\, y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
Jadi f suatu fungsi pada.
Jadi $f : R \to\ R,\ f(x) = sinh\, x$ memiliki invers.
Jelas $y = sinh^{-1} x \to\ x = sinh\, y$
Jadi $sinh^{-1}\ x = ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

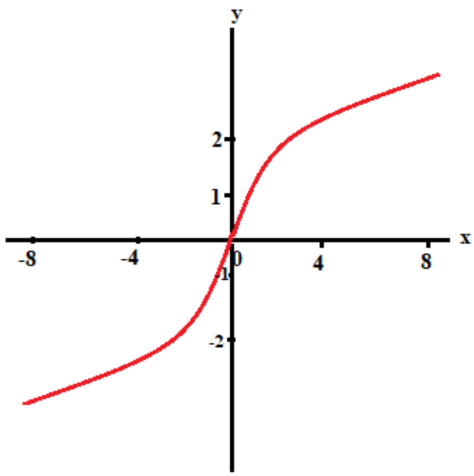


Figure 2.22: Grafik Fungsi $f(x) = sinh^{-1} x$

2. Invers Fungsi Cosinus Hiperbola
Diketahui $f : R \to [1,\infty),\ f(x) = cosh\ x$
Ambil $x_1 = -1,\ x_2 = 1 \in R$.
Jelas $x_1 \neq\ x_2$
akan tetapi $f(x_1) = f(-1) = \dfrac{e+e^{-1}}{2} = f(1) = f(x_2)$
Jadi f bukan fungsi satu-satu.
Jadi fungsi $f : R \to [1,\infty),\ f(x) = cosh\ x$ tidak memiliki invers.
Agar f memiliki invers maka kita definisikan f sebagai
$f : [0,\infty) \to [1,\infty),\ f(x) = cosh\ x$.

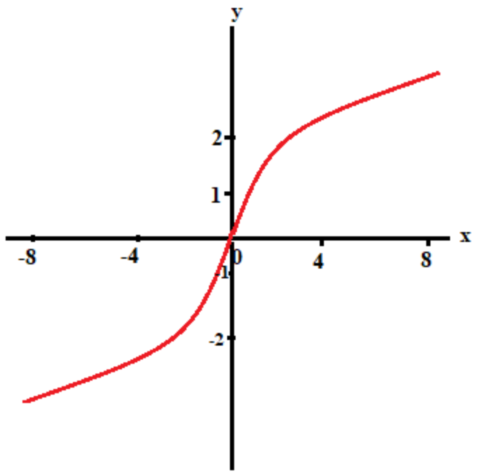


Figure 2.23: Grafik Fungsi $f : [0,\infty) \to [1,\infty), f(x) = cosh\ x$

Jelas $f'(x) > 0 \forall x \in [0,\infty)$
Jadi f monoton naik pada daerah asalnya.
Jadi fungsi $f : [0,\infty) \to [1,\infty),\ f(x) = cosh\ x$ memiliki invers.
Ambil sembarang $x \in [0,\infty)$.
Tulis $x = cosh\ y$, untuk suatu $y \in [1,\infty)$
Jelas $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$

$$\begin{aligned}
\iff \quad 2x &= e^y + e^{-y} \\
\iff \quad 2xe^y &= e^y(e^y + e^{-y}) \\
\iff \quad 2xe^y &= e^{2y} + 1 \\
\iff \quad e^{2y} - 2e^y x + 1 &= 0 \\
\iff \quad [(e^y)^2 - 2e^y x + x^2] - (x^2 - 1) &= 0 \\
\iff \quad (e^y - x)^2 - (\sqrt{x^2-1})^2 &= 0 \\
\iff \quad e^y = x - \sqrt{x^2-1} &\vee e^y = x + \sqrt{x^2-1}.
\end{aligned}$$

Jelas $e^y = x + \sqrt{x^2-1} \iff y = ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
Jadi $\forall x \in [0,\infty) \exists y = ln(x + \sqrt{x^2-1}) \in [1,\infty) \ni x = f(y)$.
Jelas $y = cosh^{-1}\, x \iff x = cosh\, y$.
Jadi $cosh^{-1}\, x = ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

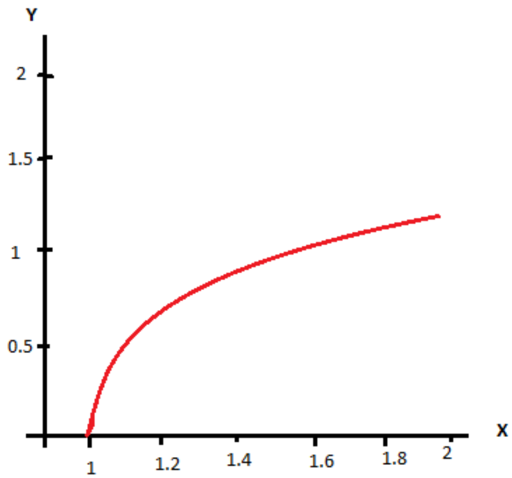


Figure 2.24: Grafik Fungsi $f(x) = cosh^{-1}x$

Turunan Invers Fungsi Hiperbola

1. $\dfrac{d(sinh^{-1}\, x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $\dfrac{d(cosh^{-1}\, x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3. $\dfrac{d(tanh^{-1}\,x)}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}\ , |x| <\ 1$
4. $\dfrac{d(coth^{-1}\,x)}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}\ , |x| >\ 1$
5. $\dfrac{d(sech^{-1}\,x)}{dx} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

Bukti:

1. Diketahui $sinh^{-1}\,x = ln(x+\sqrt{1+x^2})$
   Jelas

$$\begin{aligned}
\frac{d(sinh^{-1}\,x)}{dx} &= \frac{d\left|ln(x+\sqrt{1+x^2}\right|}{dx} \\
&= \frac{d\left|ln(x+\sqrt{1+x^2}\right|}{d(x+\sqrt{1+x^2})}\frac{d(x+\sqrt{1+x^2})}{dx} \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

2. Diketahui $cosh^{-1}\,x = ln(x+\sqrt{x^2-1})$
   Jelas

$$\begin{aligned}
\frac{d(cosh^{-1}\,x)}{dx} &= \frac{d\left|ln(x+\sqrt{x^2-1}\right|}{dx} \\
&= \frac{d\left|ln(x+\sqrt{x^2-1}\right|}{d(x+\sqrt{x^2-1})}\frac{d(x+\sqrt{x^2-1})}{dx}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d(\cosh^{-1} x)}{dx} &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \\
&= \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

Anti Turunan Invers Fungsi Hiperbola

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = sinh^{-1}x + C$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = cosh^{-1}x + C$
3. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} tanh^{-1}x + C, |x| < 1 \\ coth^{-1}x + C, |x| > 1 \end{cases}$
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = sech^{-1}x + C$

SOAL-SOAL

1. Tentukan turunan dari masing-masing fungsi yang diberikan berikut.

   (a) $y = cosh\ (x^4)$

   (b) $y = sinh\ (4x-8)$

   (c) $y = ln(tanh\ 2x)$

   (d) $y = coth(ln\ x)$

   (e) $y = sech(e^{2x})$

2. Tentukan integral dari masing-masing fungsi yang diberikan berikut.

   (a) $\int cosh(2x-3)\ dx$

   (b) $\int sinh^6\ x\ cosh\ x\ dx$

   (c) $\int \sqrt{tanh\ x}\ sech^2\ x\ dx$

   (d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1\ +\ 9x^2}}$

   (e) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2\ -\ 25}}$

2.10 Rangkuman

1. Apabila a dan b adalah bilangan-bilangan positif dan r sebuah bilangan rasionaL, maka :
   (a) $ln\ 1 = 0$
   (b) $ln\ ab = ln\ a + ln\ b$
   (c) $ln\frac{a}{b} = ln\ a - ln\ b$
   (d) $ln\ a^r = r\ ln\ a$
2. Jika f dan g adalah invers satu sama lain lalu $f(g(x)) = x$ jika kedua f dan g terdiferensiasi, lalu dengan mengaplikasikan teorema dalam diferensiasi dari fungsi gabungan, kita mendapatkan $f'(g(x))g'(x) = 1$, dan karenanya:

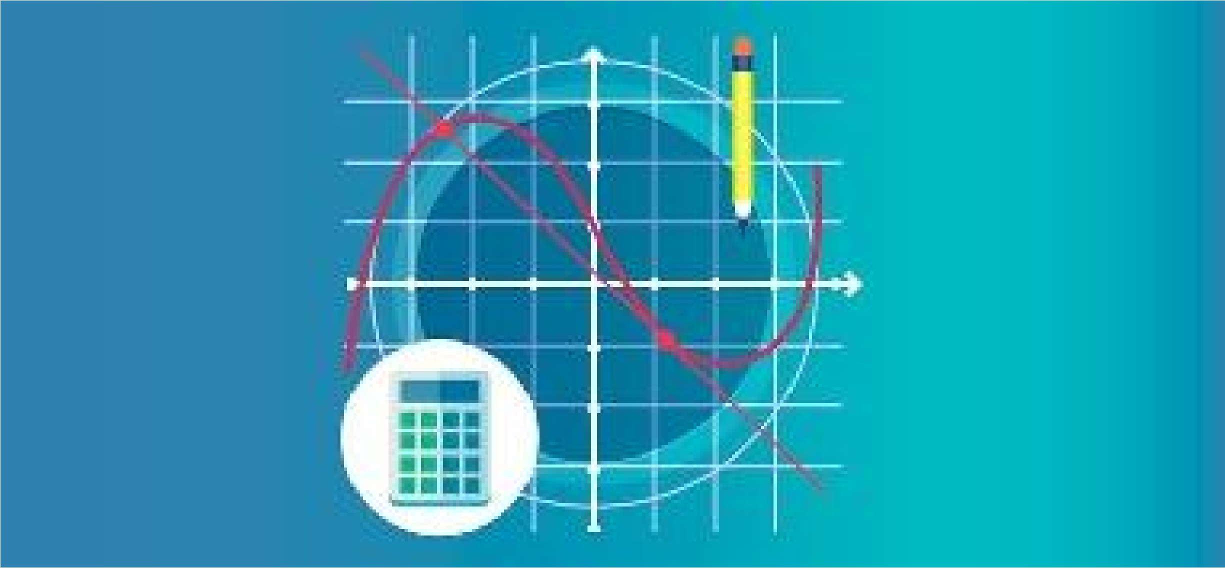
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

3. Jika $a \geq 0$, $b \geq 0$, dan x dan y adalah bilangan-bilangan real, maka :
   (i) $a^x a^y = a^x + y$
   (ii) $(a^x)^y = a^x y$
   (iii) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$
   (iv) $\frac{a^x}{a^y} = a^x - y$
   (v) $(ab)^x = a^x b^x$

4. Turunan fungsi-fungsi hiperbola
   (a) $\frac{d(sinh\ x)}{dx} = cosh\ x$
   (b) $\frac{d(cosh\ x)}{dx} = sinh\ x$
   (c) $\frac{d(tanh\ x)}{dx} = sech^2\ x$
   (d) $\frac{d(coth\ x)}{dx} = -csch^2\ x$
   (e) $\frac{d(sech\ x)}{dx} = -tanh\ x\ sech\ x$
   (f) $\frac{d(csch\ x)}{dx} = -csch\ x\ coth\ x$
5. Turunan invers fungsi hiperbola
   (a) $\dfrac{d(sinh^{-1}\ x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
   (b) $\dfrac{d(cosh^{-1}\ x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
   (c) $\dfrac{d(tanh^{-1}\ x)}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}\ , |x| < \ 1$
   (d) $\dfrac{d(coth^{-1}\ x)}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}\ , |x| > \ 1$
   (e) $\dfrac{d(sech^{-1}\ x)}{dx} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

Bahan Diskusi Bab 2:

1. Bagaimana perbedaan sketsa grafik $y = \ln|x|$ dan $y = |\ln(x)|$? Juga, perbedaan grafik $y = e^{|x|}$ dan $y = |e^x|$? Untuk bagian terakhir ini anda harus mengetahui sketsa grafik $y = e^{-x}$.
2. Di dalam model pertumbuhan populasi eksponensial, asumsi dasar yang digunakan adalah jumlah populasi suatu waktu berbanding lurus dengan laju pertumbuhannya saat itu. Dengan kata lain, dalam hal ini diasumsikan bahwa perbandingan laju pertumbuhan populasi dan jumlah populasi selalu konstan setiap saat. Artinya, semakin besar jumlah populasinya maka laju pertumbuhannya juga semakin besar. Padahal yang lebih akal adalah semakin besar populasi maka laju pertumbuhannya semakin menurun sampai saat jumlah populasi yang sangat besar laju pertumbuhannya akan nol. Dapatkah anda merumuskan model pertumbuhan populasi yang seperti ini? Diskusikan dalam kelompok anda.



3. Teknik Pengintegralan

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami teknik pengintegralan;
2. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
3. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sistematis;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menentukan pengintegralan dengan subtitusi;
2. menjelaskan teknik pengintegralan dengan subtitusi yang merasionalkan;
3. menjelaskan teknik pengintegralan parsial.

3.1 Pengintegralan dengan Subtitusi

Menentukan fungsi $f(x)$ dari $f'(x)$, berarti menentukan anti turunan dari $f'(x)$. Sehimggga integral adalah kebalikan dari pendiferensialan atau invers terhadap diferensial. Apabila suatu integral sudah dalam bentuk baku, maka kita dapat menyelesaikannya dengan rumus-rumus dasar integral. Tetapi apabila tidak, maka bentuk integral tersebut diubah terlebih dahulu hingga menjadi bentuk baku. Pengubahan bentuk integral dilakukan dengan mensubtitusikan variabel baru. Teknik dasar dalam pengintegralan ada dua yaitu pengintegralan dengan subtitusi dan pengintegralan parsial. Penggunaan metode subtitusi agar mendapatkan hasil yang memuaskan dapat diketahui dari banyaknya integral.

Konstanta, pangkat

1. $\int k\,du = ku + C$
2. $\int u^r\,du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1}, & \mathrm{r} \neq -1 \\ \ln|u| + C, & \mathrm{r} = -1 \end{cases}$

Eksponen

1. $\int e^u\,du = e^u + C$
2. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ a \neq 1, a > 0$

Fungsi Trigonometri

1. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
2. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
3. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
4. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
5. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
6. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
7. $\int \tan u\,du = -\ln\cos u + C$
8. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

Fungsi Aljabar

1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
2. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
3. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}(\frac{|u|}{a}) + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}(\frac{u}{|a|}) + C$

Teorema

(Subtitusi). Untuk menentukan $\int f(x)dx$. Kita dapat mensubtitusi $u = g(x)$, dengan fungsi g yang dapat diintegralkan. Apabila subtitusi itu mengubah $f(x)dx$ menjadi $h(u)du$ dan apabila H sebuah anti turunan h , maka

$$\int f(x)dx = \int h(u)du = H(u) + C = H(g(x)) + C$$

Contoh 1
Tentukan $\int \frac{x}{\cos^2(x)^2}dx$

Jawab
Perhatikanlah integral terebut. Ingat pada bentuk baku $\int \sec^2 u\ du$.
Andaikan

$$u = x^2,$$

$$du = 2x\ dx.$$

Maka

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} \\ 2x\ dx &= \frac{1}{2}\int sec^2 u\ du \\ &= \frac{1}{2}\tan u + C \\ &= \frac{1}{2}\tan(x^2) + C \end{aligned}$$

Contoh 2
Tentukan $\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}dx.$

Jawab
Ingat bentuk $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}.$
Andaikan

$$u = 3x.$$

Maka

$$du = 3\ dx.$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{5-u^2}}du \\
\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{5-u^2}}du \\
&= \sin^{-1}(\frac{u}{\sqrt{5}})+C \\
&= \sin^{-1}(\frac{3x}{\sqrt{5}})+C
\end{aligned}$$

Penggunaan substitusi u sebagai pemisalan bukan suatu keharusan. Apabila suatu soal dapat dikerjakan tanpa perlu penggantian, maka substitusi u tidak perlu dilakukan. Perhatikan Contoh 3 dibawah ini yang dapat dikerjakan tanpa perlu menggunakan substitusi u.

Contoh 3
Tentukanlah $\int x^3\sqrt{x^4+11}\, dx$.

Jawab
Dalam ingatan, gantilah

$$u = x^4+11.$$

Maka

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{x^4+11}dx &= \frac{1}{4}\int (x^4+11)^{\frac{1}{2}}(4x^3)dx \\
&= \frac{1}{4}\int (x^4+11)^{\frac{1}{2}}d(x^4+11) \\
&= \frac{1}{6}(x^4+11))^{\frac{3}{2}}+C
\end{aligned}$$

Contoh 4
Tentukan $\int (x-1)^4 dx$
Jawab

Misal

$$\begin{aligned} u &= x-1 \\ \frac{du}{dx} &= 1 \\ du &= dx \\ \int x^4 du &= \frac{1}{5}u^5+C \\ &= \frac{1}{5}(u-1)^5+C \\ &= \frac{(x-1)^5}{5}+C \end{aligned}$$

Subtitusi dalam Integral Tentu
Topik ini telah dibahas dalam integral tentu seperti subtitusi dalam integral tak tentu, tetapi kita tidak boleh lupa untuk mengubah batas-batas pengintegralan seperlunya.

Contoh 5
Tentukan $\int_2^5 t\sqrt{t^2-4}\,dt$.

Jawab
Andaikan

$$u = t^2-4,$$

dengan demikian

$$du = 2t.$$

Perhatikan bahwa

$$u = 0$$

jika

$$t = 2$$

dan

$$u = 21$$

jika

$$t = 5.$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
\int_2^5 t\sqrt{t^2-4}dt &= \frac{1}{2}\int_2^5 (t^2-4)^{\frac{1}{2}}(2t\ dt) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{21} u^{\frac{1}{2}}du \\
&= [\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}]_0^{21} \\
&= \frac{1}{3}(21)^{\frac{3}{2}} \\
&\approx 32,08
\end{aligned}$$

SOAL-SOAL

1. $\int x(x^2+1)^4\ dx$
2. $\int x\sqrt{x^2+2}\ dx$
3. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\ dx$
4. $\int \frac{\sqrt[3]{(1-x)}}{\sqrt{x}}$
5. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\ dx$

3.2 Beberapa Integral Trigonometri

Dalam Matematika terdapat fungsi yang berupa fungsi trigonometri. Fungsi trigonometri memiliki bentuk integral yang berbeda dengan fungsi biasa lainnya. Bentuk integral fungsi trigonometri biasa atau yang umum adalah sebagai berikut

1. $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
2. $\int \cos(x)dx = \sin(x)$
3. $\int \sec^2(x)dx = \tan(x)$

4. $\int \csc^2(x)dx = -\cot(x)$

5. $\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x)$

6. $\int \csc(x)\cot(x)dx = -\csc(x)$

Rumus diatas merupakan rumus dari integral trigonometri yang sederhana seperti pada umumnya. Terdapat banyak bentuk trigonometri yang terkadang rumit dan susah. Apabila kita menggunakan subtitusi dan dibarengi dengan pemakaian kesamaan trigonometri yang tepat, maka dapat mengintegralkan banyak bentuk dari trigonometri. Berikut merupakan lima jenis trigonometri yang sering muncul.

1. jenis 1 : $\int \sin^n x\, dx$ dan $\int \cos^n x\, dx$

2. jenis 1 : $\int \sin^n x\, dx$ dan $\int \cos^n x\, dx$

3. jenis 3 : $\int \tan^n x\, dx$ dan $\int \cot^n x\, dx$

4. jenis 4 : $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ dan $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$

5. jenis 5 : $\int \sin mx\ cosnx$, $\int \sin mx\ sinnx$,dan $\int cosmx\ cosnx\ dx$

Jenis 1 ($\int \sin^n(x)dx$ dan $\int \cos^n(x)dx$)
Jenis pertama ini merupakan integral fungsi trigonometri dengan pangkat n. Dalam hal ini n berlaku untuk bilangan ganjil dan bilangan genap.

$$n = Bilangan\ ganjil\ positif$$

Cara pengerjaannya adalah dengan cara mengeluarkan faktor *sin x* atau *cos x*. Setelah itu, menggunakan kesamaan

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Contoh 1 (n = bilangan ganjil)
Tentukan $\int \sin^5(x)dx$.

Jawab

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x dx &= \int \sin^4 x \sin x dx \\
&= \int (1-\cos^2 x \sin^2 x dx \\
&= \int (1-2\cos^2 x + \cos^a x)\sin x dx \\
&= -\int (1-c\cos^2 x + cos^4 x)d(\cos x \\
&= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{3}cos^5 x + C
\end{aligned}$$

$$n = Bilangan\ genap\ positif$$

Apabila n merupakan bilangan genap positif, maka menggunakan rumus berikut :

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1-\cos^2 2x}{2} \\
\cos^2 x &= \frac{1+\cos^2 2x}{2}
\end{aligned}$$

Contoh 2 (n = bilangan genap positif)
Tentukan $\int \sin^2 x dx$.

Jawab

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \int \frac{1-cos^2 2x}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int (\cos 2x)(2) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\cos 2x\, d(2x) \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C
\end{aligned}$$

Jenis 2 ($\int \sin^m x \cos^n x dx$)
Pada jenis kedua ini, m dan n dibagi menjadi 2 bagian yaitu berdasarkan bilangan ganjil dan bilangan genap.

$$m\ atau\ n\ bilangan\ ganjil\ positif$$

Apabila m atau n adalah bilangan ganjil positif sedangkan eksponen yang lain adalah pangkat terserah, cara pengerjaannya adalah dengan mengeluarkan $\sin x$ dan $\cos x$ dan menggunakan kesamaan

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Contoh 3 (m atau n bilangan ganjil)
Tentukan $\int \sin^3 x \cos^{-4} x\ dx$.

Jawab

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^{-4} x dx &= \int (1-\cos^2 x)(\cos^{-4} x)(\sin x dx \\
&= -\int (\cos^{-4} x - \cos^{-2} x) d(\cos x) \\
&= -[\frac{(\cos x)^{-3}}{-3} - \frac{(\cos x)^{-1}}{-1}] + C \\
&= \frac{1}{3}\sec^2 x - \sec x + C
\end{aligned}$$

$$m\ dan\ n\ Bilangan\ Genap$$

Apabila m dan n merupakan bilangan genap, maka dapat menggunakan rumus setengah sudut untuk mengurangi derajat integran.
Contoh 4 (m dan n bilangan genap)
Tentukan $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Jawab

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int (\frac{1-\cos 2x}{2})(\frac{1+cos2x}{2})^2 dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\
&= \frac{1}{8}\int [1+\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x) - (1-\sin^2 2x)\cos 2x] dx \\
&= \frac{1}{8}\int [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + \sin^2 2x \cos 2x] dx \\
&= \frac{1}{8}[\int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x d(4x) + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x d(\sin 2x)] \\
&= \frac{1}{8}[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin^3 2x] + C
\end{aligned}$$

Jenis 3 ($\int \tan^n x dx$ dan $\int \cot^n x dx$)
Dibagi menjadi 2 bagian, yaitu kasus tangen dan kotangen.

Tangen

Dalam kasus tangen, cara pengerjaanya adalah dengan mengeluarkan faktor

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

Contoh 5 (Tangen)
Tentukan $\int \cot^4 dx$.

Jawab

$$\begin{aligned}
\int \cot^4 dx &= \int \cot^2 x (\csc^2 x - 1) dx \\
&= \int \cot^2 x \csc^2 x dx - \int \cot^2 x dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \cot^4 dx &= -\int \cot^2 x d(\cot x) - \int (\csc^2 x - 1) dx \\
&= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C
\end{aligned}$$

Kotangen
Dalam kasus kotangen, maka dikeluarkan faktor

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

Contoh 6 (Kotangen)
Tentukan $\int \tan^5 x dx$.
Jawab

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x dx &= \int \tan^3 x(\sec^2 x - 1) dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^3 x \\
&= \int \tan^3 x d(\tan x) - \int \tan x(\sec^2 x - 1) dx \\
&= \int \tan^3 d(\tan x) - \int \tan x d(\tan x) + \int \tan x dx \\
&= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|cosx| + C
\end{aligned}$$

Jenis 4 ($\int \tan^m x \sec^n x dx$ dan $\int \cot^m x \csc^n x dx$)

Contoh 7 (n genap dan m sebarang)
Tentukan $\int \tan^{\frac{-3}{2}} x \sec^4 x dx$.

Jawab

$$\begin{aligned}
\int \tan^{\frac{-3}{2}} x \sec^4 x dx &= \int (\tan^{\frac{-3}{2}} x)(1+\tan^2 x)\sec^2 x dx \\
&= \int (\tan^{\frac{-3}{2}} x)\sec^2 x dx + \int (\tan^{\frac{1}{2}} x)\sec^2 x dx \\
&= -2\tan^{\frac{-1}{2}} x + \frac{2}{3}\tan^{\frac{-3}{2}} x
\end{aligned}$$

Contoh 8 (m ganjil, n sebarang)
Tentukan $\int \tan^3 x \sec^{\frac{-1}{2}} x dx$.

Jawab

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^{\frac{-1}{2}} x dx &= \int (\tan^2 x)(\sec^{\frac{-3}{2}} x)(\sec x \tan x) dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)\sec^{\frac{-3}{2}} x d(\sec x) \\
&= \int \sec^{\frac{1}{2}} x d(\sec x) - \int \sec^{\frac{-3}{2}} d(\sec x) \\
&= \frac{2}{3}\sec^{\frac{3}{2}} x + 2\sec^{\frac{-1}{2}} x + C
\end{aligned}$$

Jenis 5 ($\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, dan $\int \cos mx \cos nx dx$)
Untuk menyelesaikan integral jenis kelima ini dapat menggunakan kesamaan berikut:

1. $\int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$
2. $\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$
3. $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$

Contoh 9
Tentukan $\int \sin 2x \cos 3x dx$.

Jawab

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos 3x dx &= \frac{1}{2}\int [\sin 5x + sin{-x}]dx \\ &= \frac{1}{10}\int \sin 5x d(5x) - \frac{1}{2}\int \sin x dx \\ &= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C\end{aligned}$$

SOAL-SOAL

1. $\int \sin^7 3x \cos^2 3x dx$
2. $\int \sin^4 2t \cos^4 2t dt$
3. $\int \tan^3 3y \sec^3 3y dy$
4. $\int \tan^6 2x dx$
5. $\int \sin 3t \sin t dt$

3.3 Subtitusi yang Merasionalkan

Teknik dalam menyelesaikan sebuah integral salah satunya adalah dengan menggunakan metode substitusi. Metode substitusi adalah sebuah cara untuk mencari integral dengan mengganti salah satu variabel dan mengubahnya menjadi bentuk yang lebih sederhana. Misalnya dengan mengganti bentuk dx menjadi bentuk du. Metode substitusi itu sendiri dibedakan menjadi 3 bentuk yang berbeda, yaitu substitusi pada fungsi aljabar, substitusi pada fungsi trigonometri, dan substitusi pada fungsi yang memiliki integran dalam bentuk irrasional.

Subbab ini menjelaskan tentang substitusi pada fungsi yang memiliki integran dalam bentuk irrasional. Integran adalah sebuah fungsi yang akan diintegralkan. Bentuk irrasional yang akan dibahas dalam subbab ini berupa bentuk akar. Bentuk irrasional ini nantinya akan diganti ke dalam bentuk trigonometri. Berikut adalah tabel permisalan untuk integran yang berupa bentuk akar:

1. Integran dalam bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$.

   Jika bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$ muncul dalam integral, maka substitusi $u=\sqrt[n]{ax+b}$ akan dieliminasi secara mendasar. Berikut adalah contoh soal dari bentuk integran tersebut, yaitu:

   Contoh 1
   Temukan penyelesaian dari $\int x\sqrt[3]{x+\pi}\,dx$.

   Jawab
   Misal
   $$u=\sqrt[3]{x+\pi}$$
   sehingga
   $$u^3=x+\pi,$$
   dan
   $$dx=3u^2\,du.$$
   Maka
   $$\begin{aligned}\int x\sqrt[3]{x+\pi}\,dx &= \int (u^3-\pi)u(3u^2)\,du\\ &= 3\int (u^6-\pi u^3)\,du\\ &= 3\,(\frac{1}{7}u^7-\frac{\pi}{4}u^4)\,+\,C\\ &= 3\,(\frac{1}{7}\sqrt[3]{(x+\pi)^7}\,-\frac{\pi}{4}\sqrt[3]{(x+\pi)^4}\,+\,C\end{aligned}$$

   Contoh 2
   Temukan penyelesaian dari $\int x(1-x)^{\frac{2}{3}}\,dx$.

   Jawab
   Misal
   $$u=\sqrt[3]{1-x}$$
   sehingga
   $$u^3=1-x$$

dan

$$dx = -3u^2\ du.$$

Maka

$$\begin{aligned}
\int x(1-x)^{\frac{2}{3}}\ dx &= \int (1-u^3)u^2(-3u^2)\ du \\
&= -3\int (1-u^3)(u^4)\ du \\
&= -3\int (u^4-u^{12})\ du \\
&= -3(\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{13}u^{13})\ +\ C \\
&= -3(\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1-x)^5} - \frac{1}{13}\sqrt[3]{(1-x)^5})\ +\ C
\end{aligned}$$

2. Integran dalam bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, dan $\sqrt{x^2-a^2}$

   Merasionalkan integran dengan bentuk seperti ketiga ekspresi tersebut dapat dilakukan dengan mensubstitusikan sebuah trigonometri. Pertama, kita asumsikan jika a adalah positif, lalu kita substitusikan dengan trigonometri. Berikut adalah bentuk substitusi dari integran $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, dan $\sqrt{x^2-a^2}$.

   Jika nilai x di substitusikan ke dalam bentuk integran tersebut, bentuk intgeran tersebut dapat disederhanakan menjadi sebagai berikut:

   (a) $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t = a\cos t$

   (b) $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2 t} = \sqrt{a^2\sec^2 t} = a\sec t = a\sec t$

   (c) $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a2\sec^2 t-a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t} = a\tan t = \pm a\tan t$

Contoh 3

Tentukan nilai dari $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\ dx$.

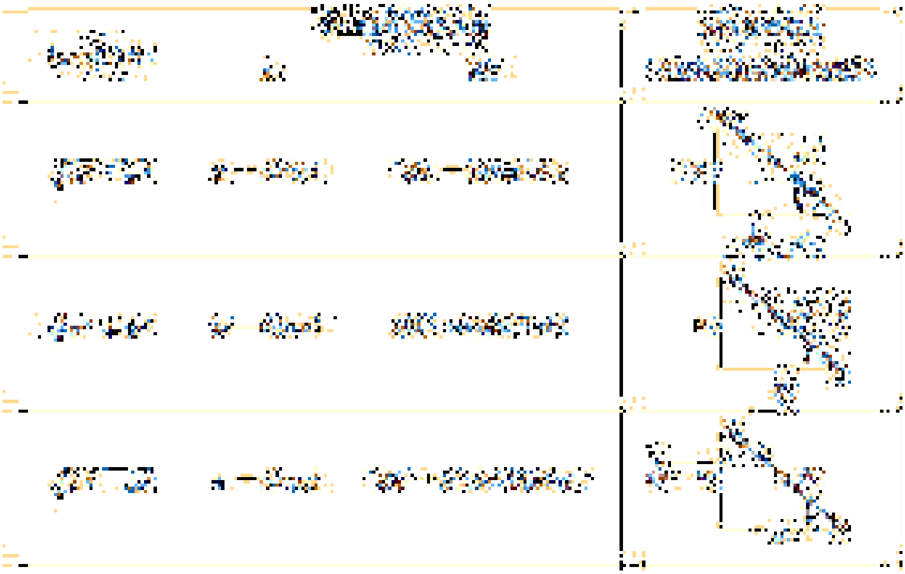


Figure 3.1: Substitusi dari Integran dengan Bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, dan $\sqrt{x^2-a^2}$

Jawab
Misalkan

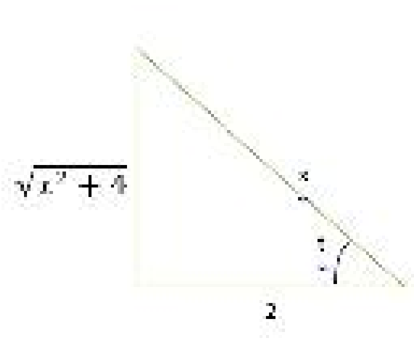
$$x = 2\sec t$$

dan

$$dx = 2\sec t \tan t \; dt$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx &= \int \frac{2\tan t}{2\sec t} \cdot 2\sec t \; \tan t \; dt \\
&= \int 2\tan^2 t \; dt \\
&= \int 2(\sec^2 t - 1) \; dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx &= \int 2\sec^2 t - 2\ dt \\ &= 2\tan t - 2t + c\end{aligned}$$



Setelah itu kita substitusikan nilai t. Nilai t didapatkan dari segitiga pytaghoras seperti gambar disamping. Sehingga menjadi seperti berikut.

$$2\frac{\sqrt{x^2+4}}{2} - 2\ arc\ \sec\frac{x}{2} + c$$

SOAL-SOAL

1. $\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x+4}}\ dx$
2. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\ dx$
3. $\int \frac{t}{1-t^2}\ dt$
4. $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+5}}\ dx$
5. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\ dx$

3.4 Pengintegralan Parsial

Apabila pengintegralan dengan metode subtitusi tidak berhasil, dengan menerapkan metode penggunaan ganda, yang lebih dikenal dengan pengintegralan parsial dapt memberikan hasil. Metode ini didasarkan pada pengintegralan rumus turunan hasil kali dua fungsi. Berikut adalah konsep integral parsial. Integral parsial adalah suatu cara untuk menaikan pangkat suatu bilangan dua perkalian fungsi yang berbeda sehingga fungsi bilangan tersebut dapat menaikan pangkatnya (diintegralkan). Integral parsial dihubungkan dengan fungsi bilangan (u) dan (dv) yang fungsi tersebut akan dikali dan diintegralkan sesuai dengan aturan rumus integral parsial. Integral Parsial memiliki cara khusus dimana dua bilangan fungsi dari (u) dan (dv) akan dihitung untuk mencari penurunan pangkat dari (u) atau biasa disebut (du) dan mencari kenaikan pangkat (dv) atau biasa disebut (v).

Bilangan fungsi-fungsi diatas memiliki hubungan yang sangat penting dalam integral parsial. Sering kali terdapat banyak pendapat yang menyatakan bahwa integral parsial hampir sama penyederhanaannya seperti integral subtitusi. Padahal dalam konsep penyederhanaan integral parsial lebih rumit dibandingkan integral subtitusi. Integral parsial menyederhanakan fungsi dengan pemilihan fungsi yang akan diturunkan dan yang akan diintegralkan untuk membuat fungsi-fungsi baru yang akan digunakan pada rumus integral parsial.

Andaikan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$. Maka

$$\{D_x[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)\}$$

dengan mengintegralkan dua ruas persamaan tersebut, kita memperoleh

$$u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx$$

atau

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

karena $dv = v'(x)dx$ dan $du = u'(x)dx$, persamaan terakhir dapat ditulis sebagai berikut:

Pengintegralan Parsial Integral Taktentu

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Sedangkan rumus untuk pengintegralan parsian integral tentu adalah

Pengintegralan Parsial Integral Tentu

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

Contoh 1
Tentukan $\int x \cos x dx$.

Jawab
Kita ingin menulis

$$x \cos\ x\ dx$$

sebagai

$$u\ dv.$$

Salah satu cara ialah memisalkan

$$u = v$$

dan

$$dv = \cos x dx.$$

Jika

$$du = dx$$

dan

$$v = \int \cos x dx = \sin x.$$

(kita dapat menghilangkan konstanta pengintegralan). Jadi kalau kita ringkaskan substitusi ganda tersebut, kita peroleh

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = \cos x dx$$

$$v = \sin x$$

Rumus pengintegralan parsial menjadi

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Contoh 2
Tentukan $\int_1^2 \ln x dx$.

Jawab
Kita gunakan substitusi ganda berikut

$$u = \ln x$$

$$dv = x dx$$

$$du = -\sin x dx$$

$$v = x^2/2$$

sehingga

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x dx &= [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x * 1/x dx \\ &= 2 * \ln 2 - \int_1^2 dx \\ &= 2 * \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

Pengintegralan Parsial Berulang
Dalam integral parsial, terkadang bisa menurunkan u dan mengintegralkan dv secara berulang.

Contoh 3
Hitunglah $\int x^2 \sin x dx$.

Jawab
Andaikan

$$u = x^2$$
$$du = 2xdx$$
$$dv = sinxdx$$
$$v = -cosx$$

maka

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx$$

Faktor-faktor x^2 dan $\sin x$ merupakan bentuk yang sama-sama mudah diintegralkan. Akan tetapi, turunan dari x^2 lebih sederhana, sedangkan turunan dari $\sin x$ tidak lebih sederhana. Sehingga, kita harus memisalkan $u = x^2$.

$$dv = \sin x dx \iff v = \int \sin x dx = -\cos x$$
$$u = x^2 \iff du = 2xdx$$

Sehingga dengan integral parsial didapatkan

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$$

Penggunaan pertama dari integral parsial ini berhasil dalam menyederhanakan integral aslinya, akan tetapi integral yang ada di ruas kanan masih belum sesuai dengan aturan dasar integral. Untuk menyelesaikan bentuk integral ini, kita dapat menerapkan integral parsial lagi. Untuk saat ini, misalkan $u = 2x$.

$$dv = \cos x dx \iff v = \int \cos x dx = \sin x$$

$$u = 2x \iff du = 2dx$$

Sekarang, dengan menerapkan integral parsial kita memperoleh

$$\int 2x \cos x dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x dx$$
$$= 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

Dengan menggabungkan kedua hasil di atas, kita mendapatkan

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

Rumus Reduksi

$$\int f^n(x) dx = g(x) + \int f^k(x) dx$$

dengan $k < n$ dinamakan **rumus reduksi** oleh karena pangkat dari f berkurang. Rumus demikian diperoleh kerap kali dengan menggunakan pengintegralan parsial.

Contoh 5
Gunakan rumus reduksi di atas untuk menghitung.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx$$

Jawab
Perhatikan terlebih dahulu bahwa

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx &= \left[\frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx \\ &= 0 + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx &= \frac{7}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx \\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx \\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1 dx \\ &= \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{pi}{2} = \frac{35}{256}\pi\end{aligned}$$

SOAL-SOAL

1. $\int x \sin 3x dx$
2. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x dx$
3. $\int x^2 \cos x dx$
4. $\int x^2 e^x dx$
5. $\int x^3 - 2xe^x dx$

3.5 Rangkuman

1. **Integral dengan Subtitusi** Untuk menentukan $\int f(x)dx$, dapat dengan mensubstitusi $u = g(x)$, dengan fungsi g yang dapat diintegralkan. Apabila subtitusi itu mengubah $f(x)dx$ menjadi

$h(u)du$ dan apabila H sebuah anti turunan h, maka

$$\int f(x)dx = \int h(u)du = H(u) + C = H(g(x)) + C$$

2. Bentuk integral fungsi trigonometri biasa atau yang umum adalah sebagai berikut:

   (a) $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$

   (b) $\int \cos(x)dx = \sin(x)$

   (c) $\int \sec^2(x)dx = \tan(x)$

   (d) $\int \csc^2(x)dx = -\cot(x)$

   (e) $\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x)$

   (f) $\int \csc(x)\cot(x)dx = -\csc(x)$

3. Beberapa integral bentuk kombinasi sinus dan cosinus:

   (a) $\int \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$

   (b) $\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$

   (c) $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$

4. **Pengintegralan Parsial: Integral Taktentu dan Integral tentu**
   Rumus untuk pengintegralan parsial integral tentu adalah

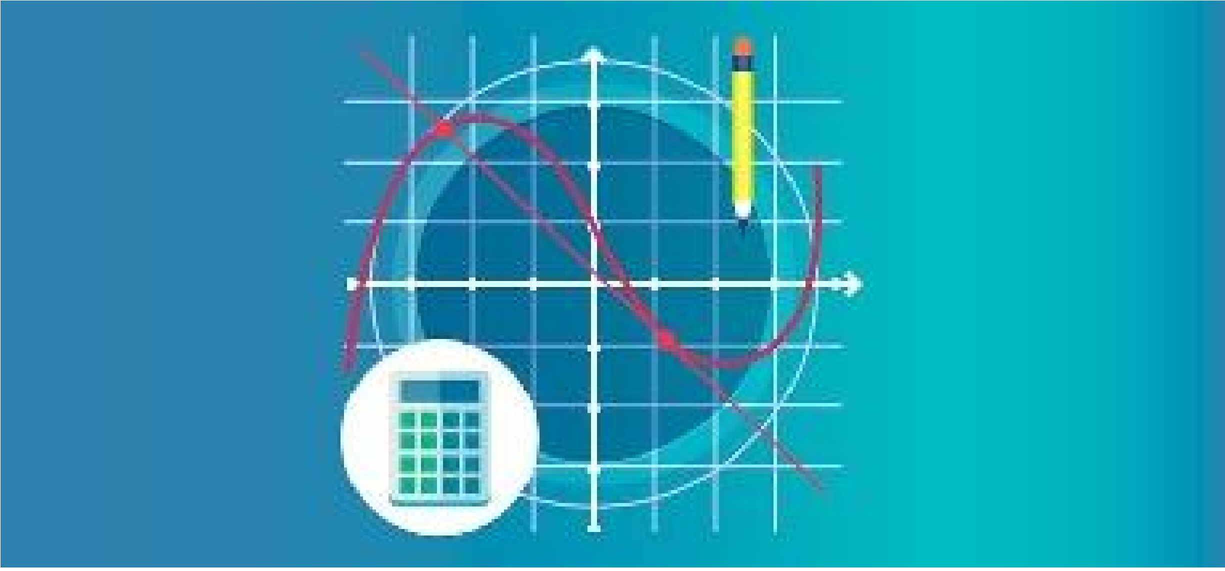
$$\int udv = uv - \int vdu$$

Sedangkan rumus untuk pengintegralan parsial integral tentu adalah

Pengintegralan Parsial Integral Tentu

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

Bahan Diskusi Bab 3: Misalkan fungsi $f(x)$ yang anda integralkan bukan dalam bentuk fungsi elementer sehingga belum ada teknik pengintegralan untuk menyelesaikannya. Ambil contoh fungsi $f(x) = e^{(x^2)}$. Bagaimana anda akan menyelesaikan bentuk integral $\int_0^1 e^{(x^2)}$?



4. Bentuk Tak-Tentu dan Integral-Tak-Wajar

Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami bentuk tak-tentu dan integral takwajar;
2. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
3. mempunyai kemampuan bernalar dengan logis dan sitematis;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menjelaskan bentuk tak-tentu 0/0 dan bentuk tak-tentu lainnya;
2. menentukan batas tak-terhingga;
3. menentukan integral tak terhingga.

4.1 Bentuk Tak-Tentu Jenis 0/0

Bentuk Tak-Tentu Jenis 0/0 adalah limit dimana saat nilai x disubstitusikan pada fungsinya akan menghasilkan pembilang bernilai nol dan penyebut bernilai 0 atau 0/0 Contoh bentuk 0/0 adalah

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-4} = \frac{0}{0}$$

Cara penyelesaiannya adalah dengan memfaktorkan fungsi tersebut sehingga fungsi tersebut akan disederhanakan dan saat nilai x disubstitusikan hasilnya bukan 0/0

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-4} &= lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+2)} \\
&= lim_{x\to 2}\frac{(x+5)}{(x+2)} \\
&= \frac{(2+5)}{(2+2)} \\
&= \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

Contoh

$$lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

Pembahasan dari contoh diatas adalah angka 2 kita substitusikan ke x, maka akan diperoleh hasil 0/0 (termasuk bentuk tak tentu), sehingga soal tersebut deselesaikan dengan metode turunan.

$$lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x} = \frac{2(2)-5}{2(2)} = \frac{-1}{4}$$

Kesimpulan untuk pengerjaan dari soal soal tentang bentuk tak tentu jenis 0/0 adalah mengubah bentuk f(x)/g(x) sehingga sifat-sifat limit fungsi dapat digunakan. Cara yang dapat dicoba adalah menguraikan pembilang dan penyebut, menggunakan rumus trigonometri, merasionalkan bentuk pecahannya, dan sebagainya.

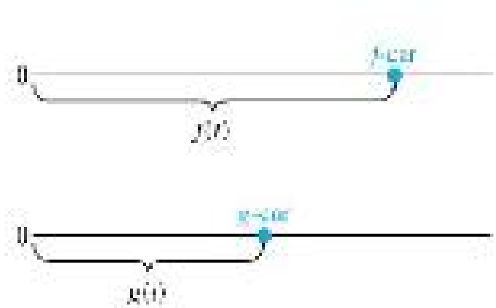
4.2 Bentuk Tak-Tentu yang Lain

Pada bagian sebelumnya telah dipelajari limit seperti berikut :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$$

Bentuk limit ini tergolong bentuk $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, yang memiliki sifat bahwa pembilang dan penyebut menuju tak terhingga. Bentuk tersebut dinamakan bentuk tak-tentu dari jenis $\frac{\infty}{\infty}$ dan aturan l'Hopital juga berlaku dalam hal ini, sehingga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



Ada suatu cara yang meyakinkan kita bahwa hasilnya memang benar. Andaikan bahwa $f(t)$ dan $g(t)$ menunjukkan kedudukan dua kendaraan pada sumbu-t pada saat t (gambar 1). Kedua kendaraaan tersebut kita sebut kendaraan-f dan kendaraan-g sedang dalam perjalanan tanpa akhir dengan laju masing-masing f'(t) dan g'(t), misalkan bahwa

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{g'(t) = L}$$

ini berarti bahwa pada suatu saat tertentu laju kendaraan-f menjadi L kali laju kendaraan-g. Sehingga suatu saat kendaraan-f akan menempuh jarak L kali lebih jauh, dengan rumus :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t) = L}$$

Uraian di atas bukan bukti secara matematika, rumus diatas berdasarkan teorema berikut :

Teorema A

Andaikan $\lim_{x\to u} |f(x)| = lim|g(x)| = \infty$. Jika $\lim_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada (terhingga atau tak terhingga), maka

$$\lim_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Di sini u dapat mewakili dapat mewakili sebarang simbol $a, a^-, a^+, -^\infty$ atau $+^\infty$

Bentuk tak tentu ∞/∞ digunakan Teorema A untuk menyelesaikan persoalan berikut :

CONTOH Tentukan $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$ Jawaban : x dan e^x menuju ∞ jika $x \to \infty$ dan menggunakan aturan l'Hopital diperoleh

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{Dx}{De^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Bentuk Tak Tentu $0\cdot\infty$ **dan** $\infty-\infty$.

Andaikan bahwa $A(x) \to 0$, tetapi $B(x) \to \infty$ kira-kira bagiamanakah hasil kali $A(x)B(x)$? Hasilnya tergantung pada nilainya masing-masing. Aturan l'Hopital dapat digunsksn untuk membantu menyelesaikan persoalan ini dengann merubahnya terlebih dahulu menjadi bentuk $0/0$ atau $\frac{\infty}{\infty}$.

CONTOH Carilah $\lim_{x\to\pi/2} (\tan x \cdot \ln \sin x)$.

Jawaban : Karena $\lim_{x\to\pi/2} \ln \sin x = 0$ dan $\lim_{x\to\pi/2} |\tan x| = \infty$, merupakan bentuk tak-tentu $0\cdot\infty$. Sehingga dapat ditulis ulang dalam bentuk $0/0$ cukup dengan mengganti tan x menjadi $\frac{1}{\cot x}$ seperti berikut :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2}(\tan x\cdot\ln\sin x) &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\cot x}\\
&= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\csc^2 x}\\
&= \lim_{x\to\pi/2}(-\cos x\cdot\sin x)=0
\end{aligned}$$

Bentuk Tak-Tentu $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Dengan menggunakan aturan l'Hopital ditinjau bentuk logaritma untuk dicari penyelesaiannya.

CONTOH Carilah $\lim\limits_{x\to^+}(x+1)^(\cot x)$.

Jawaban : Persoalan ini mengambil bentuk tak-tentu 1^∞. Misalkan $y=(x+1)^(\cot x)$

$$\ln y=\cot x\ln(x+1)=\frac{\ln(x+1)}{\tan x}$$

Dengan aturan l'Hopital bentuk $0/0$ diperoleh :

$$\lim_{x\to^+} y=\lim x\to^+\exp(\ln y)=\exp(\lim_{x\to^+}\ln y)=\exp 1=e$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2}(\tan x\cdot\ln\sin x) &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\cot x}\\
&= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\csc^2 x}\\
&= \lim_{x\to\pi/2}(-\cos x\cdot\sin x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

4.3 Integral Tak-Wajar: Batas Tak-Terhingga

Dalam mendefinisikan $\int_a^b f(x)\,dx$, telah diandaikan bahwa selang $[a,b]$ terhingga. Walaupun demikian, banyak penerapan integral tentu dalam fisika, ekonomi dan teori peluang yang menghendaki a atau b (atau keduanya) menjadi tak terhingga. Oleh karena itu kita harus memberikan arti pada lambang seperti

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad \int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$$

integral demikian dinamakan **integral tak wajar** dengan batas yang tak terhingga.

Kategori integral tak wajar dapat diketahui dari ciri-ciri sebagai berikut:

1. $a = -\infty$ atau $b = \infty$ atau keduanya dengan kata lain salah satu atau kedua batasnya adalah tak terhingga.
2. $f(x)$ tak terhingga di salah satu titik atau lebih pada selang $a \leq x \leq b$. Titik titik itu disebut titik khusus pada $f(x)$

Integral yang sesuai dengan ciri-ciri (1) dan (2) masing-masing dapat dikatakan integrak tak-tentu tipe pertama dan tipe kedua. Adapun integral yang memenuhi kedua keadaan tersebut sekaligus dikatakan integral tipe ketiga.

DEFINISI 1 : Misalkan $f(x)$ kontinu pada $[a,\infty)$ atau $(-\infty,b]$, maka didefnisikan

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

sedemikian hingga dikatakan bahwa integral di atas **konvergen** ke nilai limit tersebut, jika limit di ruas kanan ada dan berhingga. Jika tidak maka integral tersebut dikatakan **divergen**.

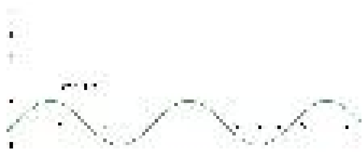


Figure 4.1: Fungsi $y = \sin x$

CONTOH 1 Carilah, jika mungkin. $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x\,dx$

PENYELESAIAN $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b [-\cos x]_0^b$

limit yang terakhir tidak ada; kita simpulkan bahwa integral yang diberikan adalah divergen. gunakan pengertian geometrik dan integral $\int_0^\infty \sin x\,dx$ untuk mendukung hasil ini (Gambar 1).

CONTOH 2 Menurut hukum invers kuadrat Newton, gaya yang bekerja pada sebuah kapsul ruang angkasa adalah $-k/x^2$ dengan x adalah jarak (misalnya dalam mil) antara kapsul dan muka bumi. gaya f(x) yang diperlukan untuk menganKat kapal tersebut adalah $f(x) = \frac{-k}{x^2}$. Berapakah besarnya usaha yang diperlukan untuk mendorong kapsul seberat 1000 pon keluar dari medan gravitasi bumi?

PENYELESAIAN Kita dapat menghitung k dengan memperhatikan bahwa pada x=3960 mil(jari-jari bumi) $F = 1000$ pon, sehingga $k = 1000 \cdot (3960)^2 \gg 1,568x10^{10}$. Karena itu kerja yang dilakukan dalam mil pon adalah

$$
\begin{aligned}
1.568x10^{10}\int_{3960}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} 1,568x10^{10}[-\frac{1}{x}]_{3960}^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty} 1,568\times 10^{10}\left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{3960}\right] \\
&= \frac{1,568\times 10^{10}}{3960} \approx 3,96\times 10^{6}
\end{aligned}
$$

KEDUA LIMIT TAK-TERHINGGA Sekarang kita dapat memberikan definisi untuk $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

DEFINISI 2 Jika $\int_0^{-\infty} f(x)\,dx$ dan $\int_\infty^0 f(x)\,dx$ keduanya konvergen, maka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ dikatakan konvergen dan mempunyai nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{-\infty} f(x)\,dx + \int_\infty^0 f(x)\,dx$$

jika tidak, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ divergen.

CONTOH 3 Hitunglah $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ atau nyatakan bahwa integral ini divergen.

PENYELESAIAN

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}[\tan^{-1}]_0^b =$$
$$\lim_{b\to\infty}[\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0] = \frac{\pi}{2}$$

Karena integran adalah fungsi genap

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Karena itu,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

kita akan menggunakan notasi $[f(x)]_a^\infty$ untuk maksud $= \lim_{b\to\infty} f(b) - f(a)$. definisi-definisi serupa berlaku pada $[f(x)]_{-\infty}^a$ dan pada $[f(x)]_{-\infty}^\infty$. Perhatikan bahwa tidak satupun dalam kasus-kasus ini kita "mensubstitusi" tak-terhingga. Masing-masing didefinisikan sebagai limit, yang bersesuaian dengan pendekatan kita untuk penentuan integral tak-wajar.

Fungsi Kepadatan Probablitas (PDF - "Probablity Density Function") Jika PDF f(x) suatu variabel acak kontinu X didefinisikan bernilai 0 di luar himpunan hasil yang mungkin, maka persyaratan untuk PDF adalah

1. $f(x) \geq 0$,untuk semua x
2. $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = 1$

PDF suatu variabel acak memungkinkan kita untuk mencari probablitas menggunakan integrasi; misalnya Gambar 3 mengilustrasikan probabilitas bahwa X berada di antara 4 dan 6. Maka rata-ratanya dan varians dari suatu variabel acak didefinisikan oleh

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \;\; \sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^\infty (x-\sigma)^2 f(x)\,dx$$

Varians σ^2 suatu variabel acak adalah ukuran dispersi, atau penyebaran probablitas dan dapat dihitung dari

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Ketika σ^2 kecil, secara kasar distribusi probablitas terpusat secara dekat disekitar rataan; ketika σ^2 besar, probablitas lebih tersebar.

CONTOH 5 Distribusi Eksponensial, distirbusi ini terkadang digunakan untuk memodelkan masa hidup komponen listrik atau mekanis, mempunyai PDF.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{jika} \, 0 \leq x \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

jika $0 \leq x$ lainnya dimana λ suatu konstanta positif.

a. Perlihatkan bahwa ini adalah PDF yang valid.
b. Carilah rataan μ dan varians σ^2.
c. Carilah fungsi distribusi komulatif (CDF) F(x).
d. Jika suatu komponen yang mempunayai masa hidup x serta yang diukur dalam jam berupa variabel acak yang mempunyai distribusi eksponensial dengan $\lambda = 0,01$; Berapakah probabilitas bahwa komponen tersebut bekerja untuk paling sedikit 20 jam?

PENYELESAIAN

a. Fungsi f selalu tak negatif dan

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \\ &= 0 + [-e^{-\lambda x}]_0^{\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sehingga f(x) adalah PDF yang valid

b.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Diterapkan integrasi parsial dalam integral kedua: $u = x dv = \lambda(e)^{-\lambda(x)}$, sehingga $du = dx$, $v = e^{-\lambda(x)}$, jadi

$$\begin{aligned} E(X) &= [-x\lambda(e)^{-\lambda(x)}] - \int_{0}^{\infty} -e^{-\lambda(x)}\,dx \\ &= (-0+0) + \left[-\frac{1}{\lambda}(e)^{-\lambda(x)}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Varians adalah

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E(X^2) - \mu^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2 \lambda (e)^{-\lambda(x)}\,dx - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= [x^2 \lambda (e)^{-\lambda(x)}]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda(x)})\,dx - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= (-0+0) + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda(x)}\,dx - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= 2\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

c. Untuk $x < 0$, CDF adalah $F(x) = P(X \leq x) = 0$. Untuk $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} 0 dx + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= 0 + [-e^{-\lambda t}]_0^x \\
&= 1 - e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

d. Tetapkan $\lambda = 0,01$. Peluang bahwa komponen bekerja paling sedikit 2 jam adalah peluang bahwa masa hidup adalah 20 jam atau lebih lama:

$$\begin{aligned}
P(x > 20) &= \int_{20}^{\infty} 0,01 e^{-0,01x} dx \\
&= [-e^{-0,01x}]_{20}^{\infty} \\
&= 0 - (-e^{-0,01 \cdot 20}) \\
&= e^{-0,2} \\
&\approx 0,819
\end{aligned}$$

Paradoks Corong Gabriel

Misalkan kurva $y = \dfrac{1}{x}$ pada $[1, \infty)$ diputar mengelilingi sumbu-x maka akan terbentuk suatu permukaan yang disebut corong Gabriel. Akan ditunjukkan bahwa:

1. volume V terompet ini adalah terhingga;
2. luas permukaan terompet A adalah tak-terhingga.

Jadi apabila corong itu kita isi dengan cat, banyaknya cat ini terhingga. Namun tidak cukup untuk mengecat seluruh corong tersebut. Untuk

Figure 4.2: Corong Gabriel

menjelaskan paradoks ini, terlebih dahulu kita buktikan sifat sifat pada poin 1 dan 2, sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^\infty \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^b x^{-2}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{\pi}{x}\right]_1^b = \pi \\
A &= \int_1^\infty 2\pi y\, ds = \int_1^\infty 2\pi y \sqrt{1+y'^2}\, dx \\
&= 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1+\left(\frac{-1}{x^2}\right)^2}\, dx \\
&= \lim_{x\to\infty} 2\pi \int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx
\end{aligned}
$$

Oleh karena,

$$\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} > \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$$

maka,

$$\int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx > \int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \ln b$$

dan karena $\ln b \to \infty$ ketika $b \to \infty$, maka A tak-terhingga.

Bayangkan bahwa corong tersebut dibelah di sepanjang sisinya, dibuka dan dibentangkan. Kita tidak mungkin dapat mengecat permukaan ini dengan ketebalan seragan dalam jumlaj cat yang terhingga. Namun, kita dapat melakukannya jika kita membuat ketebalan cat semakin menipis ketika semakin menjauh dari ujung besar corong tersebut. Inilah yang sebenarnya terjadi ketika kita mengisi corong utuh dengan π kubik cat (cat imajiner dapat disebarkan dengan sebarang keenceran). Masalah ini melibatkan tinjauan dua integral yang berbentuk $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$.

Contoh : Tunjukkan bahwa $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ divergen untuk $p \leq 1$ dan konvergen untuk $p > 1$

Solusi Dalam penyelesaian corong gabriel telah ditunjukkan bahwa integral tersebut divergen ketika $p = 1$. Jika $p \neq 1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\right]\left[\frac{1}{b^{p-1}}-1\right] = \begin{cases}\infty & \text{jika } p<1 \\ \frac{1}{p-1} & \text{jika } p>1\end{cases}\end{aligned}$$

Jadi integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ divergen untuk $p \leq 1$ dan konvergen untuk $p > 1$.

Latihan Soal

1. Hitung dan periksalah kekonvergenan dari $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$
2. Periksalah kekonvergenan dari $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x}\,x$
3. Hitung dan periksalah kekonvergenan dari $\int_{-\infty}^{0} 3^{8x}\,dx$
4. Hitung dan periksalah kekonvergenan dari $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^4}\,dx$
5. Hitung dan periksalah kekonvergenan dari $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$
6. Hitung dan periksalah kekonvergenan dari $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+9}$
7. Hitung dan periksalah kekonvergenan dari $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2x-1)^3}$

4.4 Integral Tak-Wajar: Integran Tak-Terhingga

Dalam suatu kasus integran $f(x) = \frac{1}{x^2}$ dikatakan integral tak-wajar untuk suatu integran tak terhingga, karena batas atas atau batas bawah akan disubstitusikan setelah fungsi integran diintegralkan. Hasil hitung menurut perhitungan integral tentu yang telah dipelajari adalah:

$$\int_{1}^{-2} \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{1}{x^2} \right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{2}$$

Tanpa menggambarkan terlebih dahulu fungsi pada bidang Koordinat Cartesius, intuisi menyatakan bahwa untuk integran $f(x) = \frac{1}{x^2}$, posisi kurvanya berada di atas sumbu x. Dalam selang $[-2,1]$, hasil hitung integral tentu pada fungs tersebut semestinya harus bernilai positif, namun nyatanya diperoleh hasil bernilai negatif. Ternyata ada syarat ketentuan bahwa fungsi - fungsi atau integran yang dapat diintegralkan harus **fungsi terbatas**.

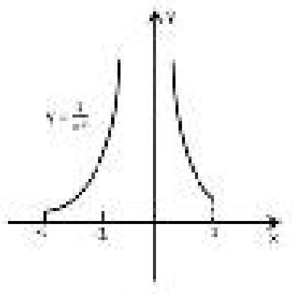


Figure 4.3: **Kurva**$f(x) = \frac{1}{x^2}$

Fungsi f yang didefinisikan $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$ dan $f(0) = 0$ pada selang [-2,1] merupakan **fungsi tidak terbatas**, sehingga tidak dapat diintegralkan dalam arti yang biasa oleh karena itu dikatakan sebagai integral yang tak-wajar dengan integran tak terhingga. Selanjutnya didefinisikan sebagai berikut.

Definisi:

Jika f kontinu pada selang setengah buka [a,b) dan $\lim_{x \to b^-} |f(x)| = \infty$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Jika f kontinu pada selang setengah buka (a,b] dan $\lim_{x \to a^+} |f(x)| = \infty$, maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Jika f kontinu pada [a,b], kecuali di c dengan $a<c<b$, dan $\lim_{x \to c} |f(x)| = \infty$, maka

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)dx\end{aligned}$$

Asalkan limit itu ada dan terhingga, dalam hal ini dikatakan bahwa integral tersebut **konvergen**. Dalam hal yang lain, integral disebut **divergen**

Contoh :

1. Hitunglah integral tak-wajar $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Penyelesaian : Dengan integral teknik substitusi trigonometri akan diperoleh hasil hitung integral tak-wajar seperti berikut.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \lim_{t \to 2^-} \left[\sin^{-1} \tfrac{x}{2}\right]_0^t \\ &= \lim_{t \to 2^-} \left[\sin^{-1} \tfrac{t}{2} - \sin^{-1} \tfrac{0}{2}\right] \\ &= \tfrac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi karena nilai limitnya ada dan terhingga, maka integral tersebut dikatakan konvergen.

Suatu fungsi dalam selang tertentu, dapat dilihat dimana titik yang akan menyebabkan integran menjadi takterbatas yaitu dengan melihat pada titik selang dan penyebut fungsinya dimana akan menjadi sama dengan 0.

2. Hitunglah $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx &= \lim_{t \to 1^+} \left[\tfrac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2}\right]_t^2 \\ &= \lim_{t \to 1^+} \left[\tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2}\right] \\ &= \left[\tfrac{3}{2} - 0\right] \\ &= \tfrac{3}{2}\end{aligned}$$

Karena hasil hitung integral tak-wajar ada dan terhingga yaitu $\frac{3}{2}$, maka integral tersebut konvergen.

3. Hitunglah $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2} dx$

Penyelesaian :

Integral diatas, penyebutnya akan sama dengan 0 pada titik 0, sehingga menghitung integral tak-wajar cara **mempartisi selang** menjadi dua bagian yaitu [-2,0] dan [0,1].

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2} dx &= \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx \\
&= \lim_{t \to 0^-} \left[-\frac{1}{x^2} \right]_{-2}^{0} + \lim_{t \to 0^+} \left[-\frac{1}{x^2} \right]_{0}^{1} \\
&= \lim_{t \to 0^-} \left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{-2} \right] + \lim_{t \to 0^+} \left[-\frac{1}{1} - \frac{1}{t} \right] \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Latihan Soal

1. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^{\frac{4}{3}}}$
2. $\int_{-2}^{0} \frac{3}{x^2+x-2} dx$
3. $\int_{0}^{3} \frac{x}{(3-x)^{\frac{2}{3}}} dx$
4. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $\int_{-1}^{2} \frac{x}{9-x^2} dx$

4.5 Rangkuman

1. Andaikan $\lim_{x \to u} |f(x)| = lim|g(x)| = \infty$. Jika $\lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada (terhingga atau tak terhingga), maka

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

   Di sini u dapat mewakili dapat mewakili sebarang simbol $a, a^-, a^+, -^\infty$ atau $+^\infty$

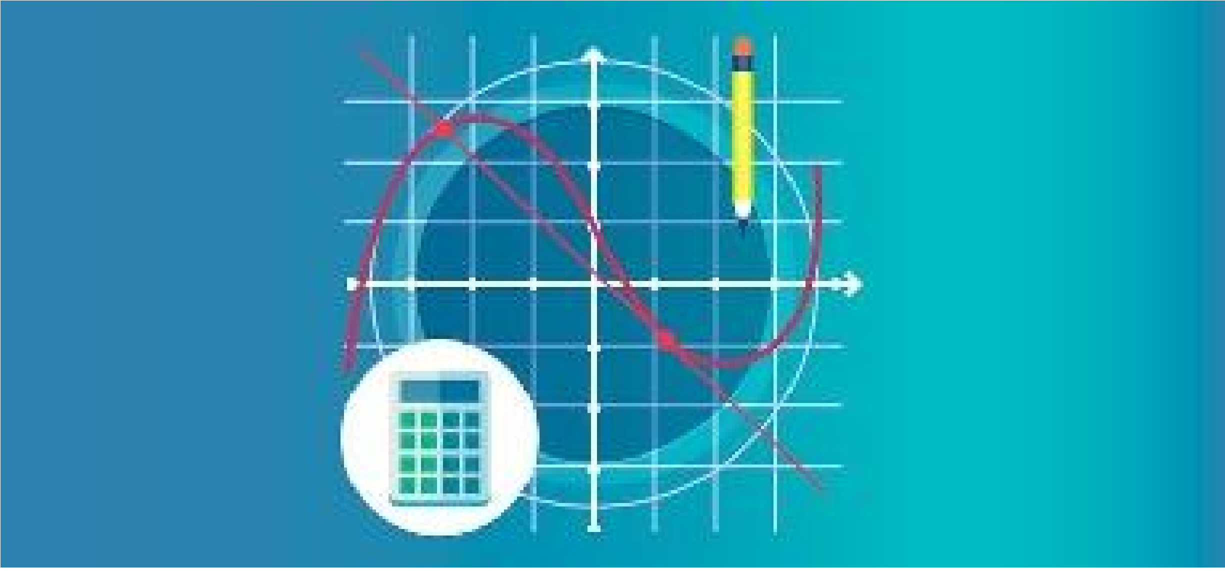
2. Misalkan $f(x)$ kontinu pada $[a, \infty)$ atau $(-\infty, b]$, maka didefnisikan

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

   sedemikian hingga dikatakan bahwa integral di atas **konvergen** ke nilai limit tersebut, jika limit di ruas kanan ada dan berhingga. Jika tidak maka integral tersebut dikatakan **divergen**.

Bahan Diskusi Bab 4:

1. Mengapa bentuk 0^0, $0/0$, ∞/∞, $\infty-\infty$, ∞^0 dikatakan sebagai bentuk tak-tentu, sedangkan 0^∞, $\infty+\infty$, $0/\infty$ bukan bentuk tak-tentu?
2. Perhatikan bentuk integral $\int_0^1 sin(x)/x$. Di titik $x = 0$ apakah menyimpulkan bentuk ini sebagai integral tak-wajar mengingat pembagian dengan nol akan menyebabkan fungsi bernilai tak-hingga? Jelaskan jawaban anda.



Bibliography

[1] Ayres, Frank. 1990. Teori dan Soal-Soal Diferensial dan Integral KALKULUS. Jakarta: Erlangga.

[2] Ayres Frank. 1972. Theory Of Problems Of Differential And Integral Calculus, 2nd Edition. Inggris : McGraw-Hill Inc.

[3] Ayres, Frank dan Elliot Mendelson. 2006. Schaum's Outline Kalkulus Edisi Keempat. Jakarta: Erlangga

[4] Baisuni, H. M. Hasyim. 2006. *KALKULUS*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

[5] Bien, Y.I. 2018. *Kalkulus Integral Berbasis Maple*. Jakarta:CV Budi Utama.

[6] Budi Didit N.2012.Kalkulus Integral dan Apikasinya.Yogyakarta:Graha Ilmu

[7] Hariastuti, R. M. 2017 *Kalkulus Lanjut*. Jakarta : Gramedia

[8] Iswadi,Hazrul.2007.*Kalkulus*.Malang:Bayu Media Publishing.

[9] Izwandi, Hazrul., Endah Asmawati., Joice Ruth Juliana., dkk. 2007. KALKULUS. Malang: Bayumedia Publishing.

[10] Krantz, Steven G. 2002 *Calculus Demystified*. New York: Mc-GRAW HILL.

[11] Martono, K. 1999. *Kalkulus*. Jakarta : Penerbit Erlangga.

[12] Mikusinki, J. 1993. Mathematical Analysis. USA : Malloy Lithographics.

[13] Thomas, George R. 2004. *CALCULUS*. London: Addison Wesley Longman.

[14] Nugroho, Didit Budi. 2002. Kalkulus Integral dan Aplikasinya. Yogyakarta: Graha Ilmu.

[15] Prayudi. 2006. Kalkulus Fungsi Satu Variabel. Yogyakarta : Graha Ilmu.

[16] Purcell, E. J.1987.*Calculus With Analytic Geometry 5th edition*.Jakarta:Erlangga.

[17] Purcell, Edwin J. dan Varberg, Dale .2011. *Kalkulus dan Geometri Analisis* Jilid 1 Edisi Sembilan. Jakarta: Erlangga.

[18] Purcell, E. J., Varberg, D., Rigdon, S. E. 2003.*Kalkulus Jilid 1, Edisi Kedelapan (diterjemahkan oleh I Nyoman Susila)*. Jakarta: Erlangga.

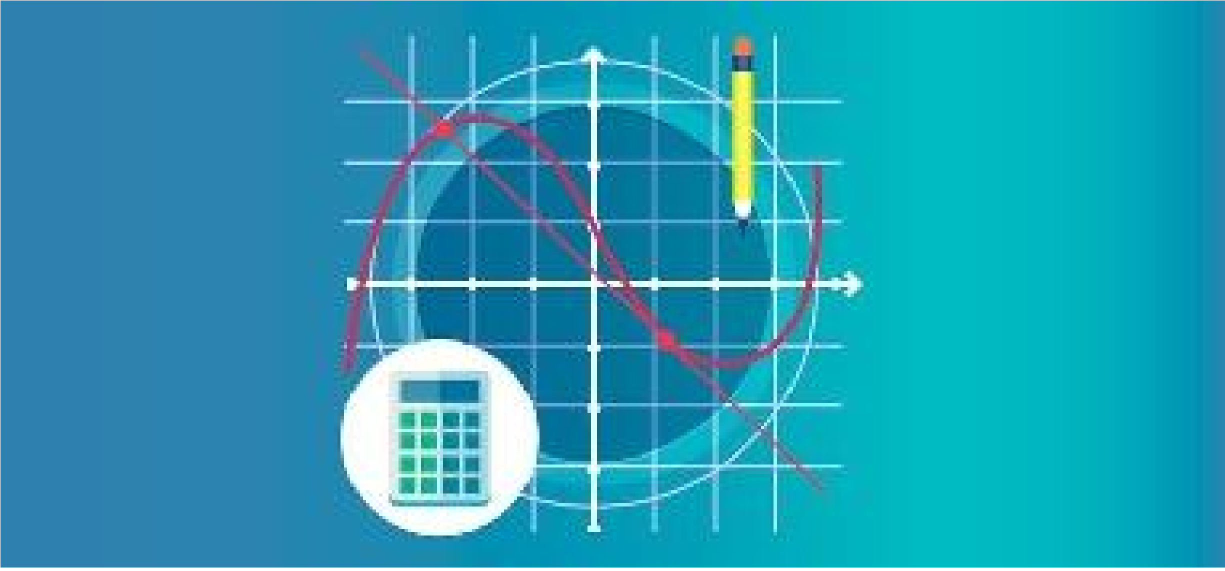
[19] Schaum. 1996. Deferensial dan Integral Kalkulus. Jakarta: Erlangga.

[20] Spiegel, M.Robert. 2007. *Kalkulus Lanjut Edisi 2*. Jakarta : Penerbit Erlangga

[21] Stewart, J. 2009. Kalkulus. Jakarta: Salemba Teknik.

[22] Sungkono Chriswan. 2009. Kalkulus Edisi 5. Jakarta : Salemba Teknika.

[23] Thomas, G. 1962. CALCULUS. Tokyo : ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC.



Glosarium

benda putar, benda solid yang didapatkan dari pemutaran sebuah daerah yang dibatasi kurva-kurva pada sumbu putar tertentu

metode cakram, cara mendapatkan volume benda putar melalui aproksimasi volume potongan benda yang mirip dengan cakram

cincin, cara mendapatkan volume benda putar melalui aproksimasi volume potongan benda yang mirip dengan cakram yang berlubang (cincin)

kulit tabung, cara mendapatkan volume benda putar melalui aproksimasi volume potongan benda yang mirip dengan kulit tabung

kurva, kumpulan titik pada bidang atau ruang yang dinyatakan dalam persamaan dengan interval parameter tertentu

permukaan putar, permukaan benda yang didapatkan dari pemutaran suatu kurva pada sumbu putar tertentu

invers fungsi, bentuk fungsi yang didapatkan dengan cara mensubstitusikan variabel terikat suatu fungsi dengan variabel bebasnya dan demikian sebaliknya

fungsi logaritma asli, fungsi yang didefinisikan dari luas daerah yang dibatasi kurva tertentu

logaritma umum, fungsi logaritma dengan bilangan dasar positif

eksponensial asli, bentuk fungsi yang didapatkan dari invers fungsi logaritma asli

eksponensial umum, bentuk fungsi yang didapatkan dari invers fungsi logaritma umum

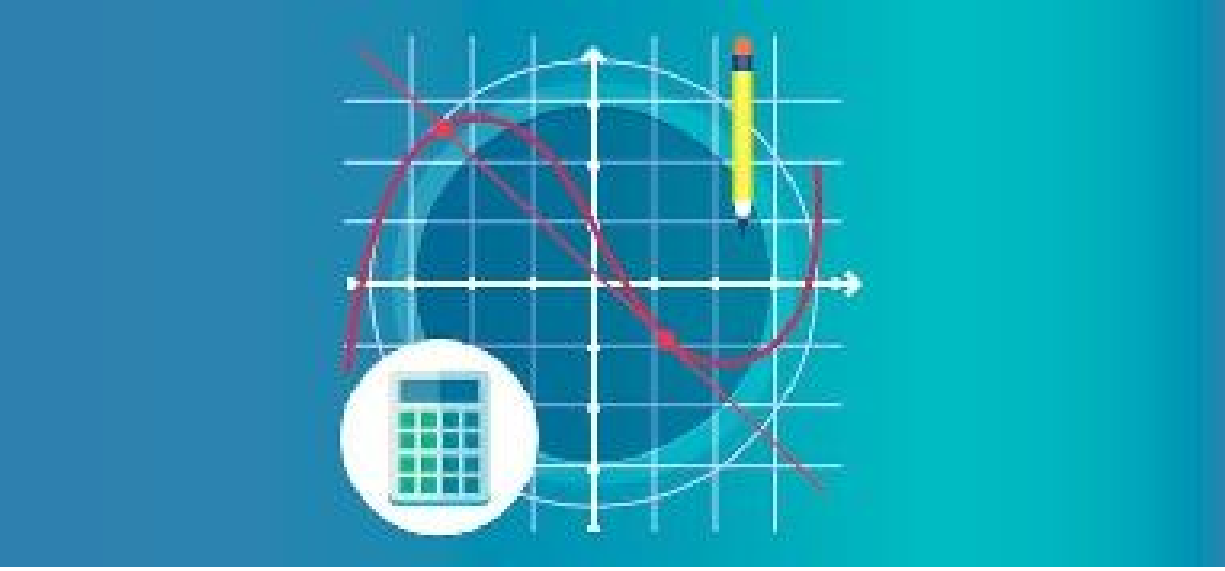
trigonometri, fungsi yang didefinisikan dari bentuk sinus dan cosinus

hiperbolik, fungsi yang didefinisikan dari bentuk aljabar fungsi eksponensial asli

pendiferensialan logaritmik, cara memanipilasi penurunan fungsi dengan menggunakan sifat turunan dari fungsi logaritma asli

bentuk tak-tentu, sebuah bentuk perkalian, pembagian, pengurangan, atau eksponen dari dua nilai yang tidak memberikan nilai bilangan real tertentu

integral tak-wajar, bentuk integral dengan batas integral tak-hingga atau nilai fungsi integran yang membesar mendekati tak-hingga dalam interval pengintegralannya



Index

B

Benda
putar 26
putaran 26
Bentuk tak-tentu 158
Bunga majemuk 98

C

Corong Gabriel 166

D

Diferensial
logaritmik 64
Distribusi eksponensial 165

F

Fungsi
distribusi kumulatif 165
eksponensial asli 81
eksponensial umum 87
hiperbola 117
kepadatan probabilitas . . 164
komposit 116
logaritma 58
logaritma asli 58
logaritma umum 87
transenden 57
trigonometri invers 101

I

Integral
parsial 148

tak-wajar 157
trigonometri 136

K

kerucut
terpancung 52
Kulit Tabung 39
Kurva Rata 45

L

Luas
permukaan putar 52
Luas daerah 16

M

Metode
Cakram 26
Cincin 33

P

Panjang kurva 45
Peluruhan
radioaktif 95
Peluruhan
eksponensial 93
Perpindahan 24
Pertumbuhan
eksponensial 93

R

Rumus reduksi 152

T

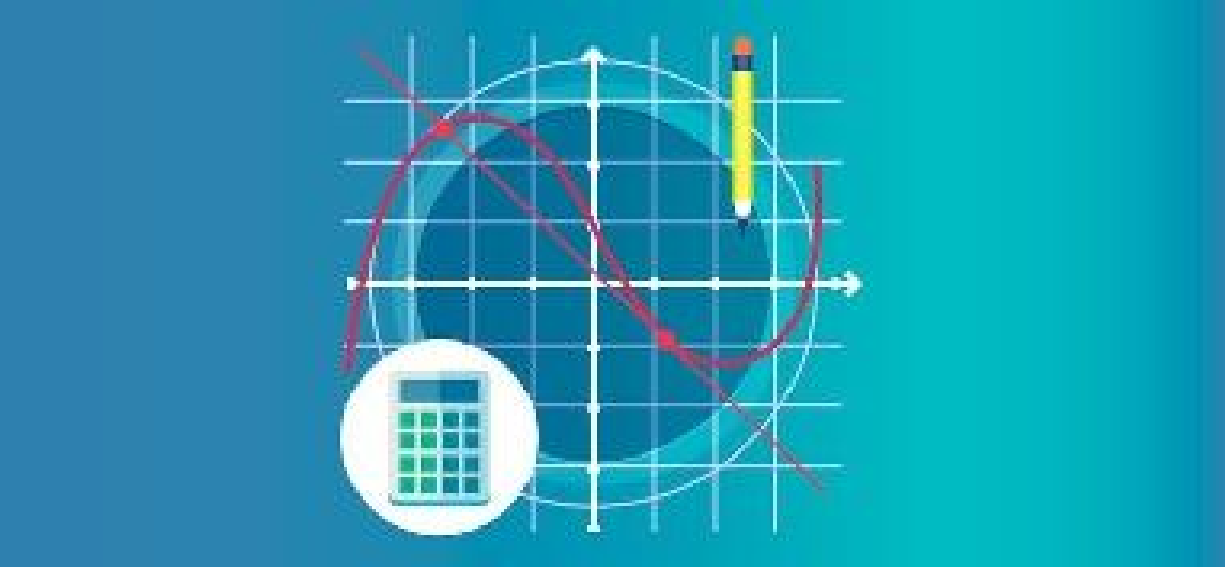
Teknik
pengintegralan 131
Teorema
fungsi balikan 80
fungsi invers 83

V

Volume benda 26

W

Waktu paruh 96



Biografi Penulis

Kosala Dwidja Purnomo, lahir di Kota Madiun pada 28 Agustus 1969 merupakan putra kedua dari lima bersaudara. Jenjang pendidikan dasar sampai pendidikan menengah ditempuh di Kota Madiun, yaitu SD Mojorejo II, SMP 4, dan SMA 2. Selesai menempuh jenjang sarjana di Jurusan Matematika Institut Teknologi Bandung pada tahun 1995 dan jenjang magister di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2008. Telah menikah dengan seorang isteri dan dikaruniai satu orang puteri. Sejak 1997 telah mengajar di Program Studi Matematika FMIPA Universitas Jember. Pernah mengampu mata kuliah Kalkulus, Kalkulus Peubah Banyak, Analisis Real, Aljabar Linier Elementer, Persamaan Diferensial Biasa, Metode Numerik, dan Fraktal.

Firdaus Ubaidillah, lahir di Lamongan tanggal 6 Juni 1970, menempuh pendidikan dasar di SD Alun-alun II Lamongan dan SD Dinoyo III Malang, pendidikan menengah di MTsN Malang II dan MAN Malang II Batu. Tahun 1989 melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya (UB) Malang lulus tahun 1994. Studi S2 ditempuh di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Institut Teknologi Bandung (ITB) lulus tahun 2004. Pendidikan S3 ditempuh di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta dan memperoleh gelar Doktor bidang matematika tahun 2016. Dalam kesehariannya, penulis aktif mengajar di prodi S1 dan S2 Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember dengan matakuliah yang diampu adalah Kalkulus, Analisis Real, Fungsi Peubah Kompleks, Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Aljabar Linear, dan lain-lain. Karya buku yang telah ditulis adalah Kalkulus Fungsi Satu Peubah.

Ika Hesti Agustin, lahir di Jember pada tanggal 1 Agustus 1984. Pendidikan sarjana Matematika ditempuh di Universitas Jember dan lulus pada tahun 2006. Kemudian pendidikan magister Matematika ditempuh di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dan lulus pada tahun 2013. Pada tahun 2019, melanjutkan studi doktor Matematika di Universitas Airlangga. Penulis mulai mengajar tahun 2008 sampai sekarang di jurusan Matematika Universitas Jember. Mata kuliah yang diampu adalah kalkulus, geometri, dan teori graf. Penulis telah melakukan banyak penelitian. Penelitian-penelitian yang telah dipublikasikan dapat dilihat di Sinta dengan ID 55574 dan Scopus dengan ID 57189004242. Karya buku yang telah ditulis adalah Kalkulus Fungsi Satu Peubah.