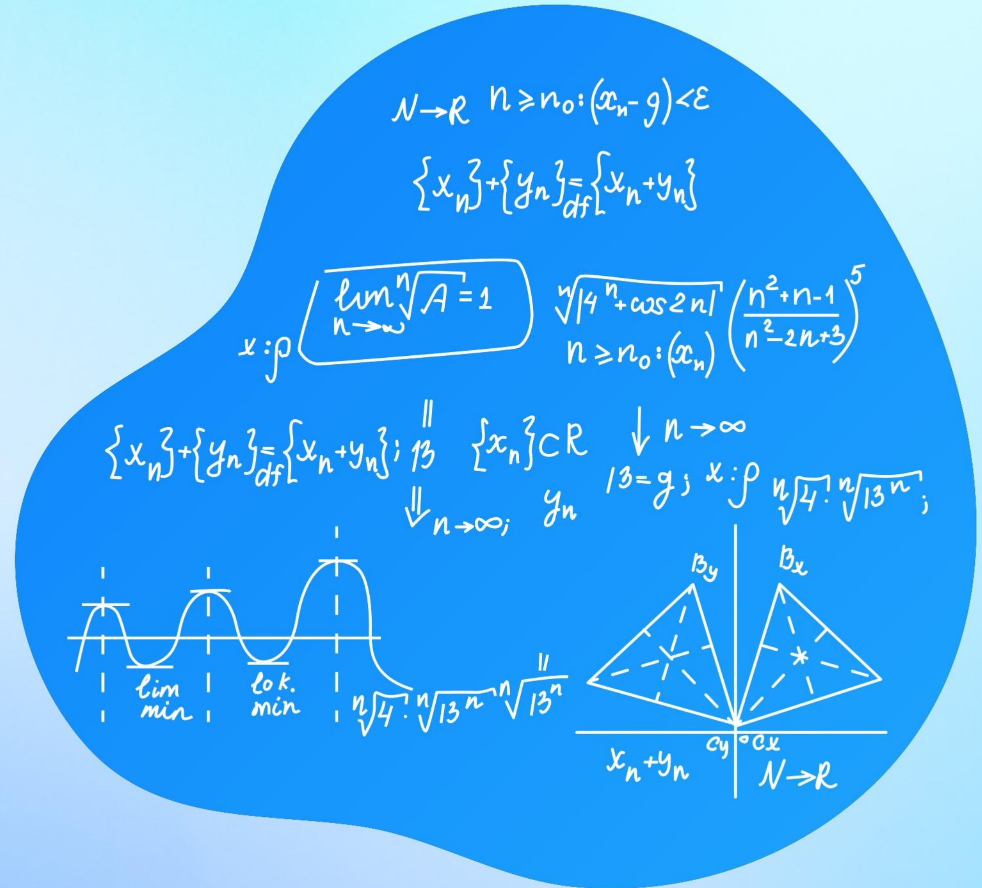
ANALISIS REAL



Firdaus Ubaidillah

Membangun Generasi
Menuju Insan Berprestasi

ANALISIS REAL

Firdaus Ubaidillah

Anggota APPTI No. 002.115.1.05.2020

Anggota IKAPI No. 127/JTI/2018

Jember University Press
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
Telp. 0331-330224, psw. 0319
***E-mail*: upt-penerbitan@unej.ac.id**

ISBN 978-623-6039-75-5

.

ANALISIS REAL

Firdaus Ubaidillah

UPT PERCETAKAN & PENERBITAN
UNIVERSITAS JEMBER
2021

ANALISIS REAL

Penulis:
Firdaus Ubaidillah

Desain Sampul dan Tata Letak
Firdaus Ubaidillah

ISBN: 978-623-6039-75-5

Penerbit:
UPT Percetakan & Penerbitan Universitas Jember

Redaksi:
Jl. Kalimantan 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip 00319
e-mail : upt-penerbitan@unej.ac.id

Distributor Tunggal:
UNEJ Press
Jl. Kalimantan 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip 0319
e-mail : upt-penerbitan@unej.ac.id

Kata Pengantar

Puji dan syukur kita panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan nikmat, rahmat, dan hidayahNya sehingga kita dapat beraktivitas sesuai dengan apa yang telah direncanakan. Shalawat beserta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita nabi Muhammad SAW.

Penyusunan buku ajar Analisis Real ini dimulai dengan mengenalkan sistem bilangan real, baik itu aksioma maupun sifat-sifat bilangan real, nilai mutlak, sifat kelengkapan bilangan real, dan supremum maupun infimum. Setelah itu diberikan bahasan barisan dan deret, limit fungsi, fungsi kontinu, turunan, dan integral Riemann. Pada umumnya yang dibahas di buku ajar ini adalah beberapa definisi, pengertian atau istilah penting yang akan digunakan berikutnya dan teorema-teorema yang dilengkapi dengan bukti. Selain itu, juga diberikan contoh-contoh umum dan khusus sebagai penguatan dan penjelas teorema yang telah diberikan. Dengan demikian, saya merekomendasikan buku ajar ini bisa juga digunakan oleh mahasiswa di luar program studi matematika yang materinya berkenaan dengan bilangan real, seperti di fakultas teknik maupun yang lain. Pada bab terakhir dibahas tentang integral Riemann sebagai peletak dasar integral konstruktif yang menjadi inspirasi ahli-ahli matematika untuk menyusun integral konstruktif yang lain.

Secara umum, Anda akan menemukan bahwa penyajian materi dalam buku ajar ini mengikuti alur penyajian pada perkuliahan Analisis Real I dan Analisis Real II di kelas. Dengan demikian, bisa dikatakan bahwa untuk memahami materi perkuliahan Analisis Real I dan Analisis Real II di program studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember perlu mempelajari buku ajar ini.

Selain pembahasan materinya yang disajikan secara terstruktur, buku ajar ini juga dilengkapi dengan contoh-contoh pembuktian, yang hasilnya sebagian dilengkapi dengan visualisasi dalam bentuk gambar. Penyajian tersebut akan memudahkan pembaca untuk merelasikan apa yang dijelaskan dalam contoh dengan teorema yang sudah dibahas. Buku ajar ini juga menyediakan rangkuman materi, bahan diskusi, dan soal-soal latihan yang dapat Anda gunakan untuk mengetahui sejauh mana Anda memahami materi yang telah dipelajari di tiap-tiap bab.

Jember, November 2021

Dr. Mohammad Fatekurrohman, S.Si., M.Si.

Prakata

Matakuliah Analisis Real, terdiri atas Analisis Real I dan Analisis Real II, merupakan matakuliah wajib berturut-turut pada semester V dan VI bagi semua mahasiswa pada program studi S1 Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember sejak diberlakukan Kurikulum 2017. Matakuliah Analisis Real I dan II ini terdiri masing-masing 3 sks yang semuanya dalam bentuk tatap muka kuliah. Sebelum diberlakukan Kurikulum 2017, matakuliah ini bernama Analisa Variabel Real I/II.

Buku Ajar ini ditulis untuk digunakan secara khusus pada perkuliahan Analisis Real I dan II. Dari segi konsep, isi perkuliahan Analisis Real dapat dikatakan sudah baku, artinya tidak banyak mengalami perubahan untuk jangka waktu yang cukup panjang. Bagian yang secara berkala perlu direvisi adalah teknik penyajiannya. Selain itu, banyak soal yang disajikan mulai diaktualkan berbasis riset dengan situasi saat ini.

Buku Ajar ini berisikan enam bab diantaranya Bab I membahas Sistem Bilangan Real, Bab II membahas Barisan dan Deret, Bab III membahas Limit Fungsi, Bab IV membahas Kekontinuan Fungsi, Bab V membahas Turunan, dan Bab VI membahas Integral Riemann. Pada Bab I diawali dengan sistem bilangan real dan sifat-sifatnya. Pada Bab II, dibahas teorema-teorema berkenaan dengan barisan konvergen dan divergen, Bab III membahas limit fungsi di suatu titik, limit sepihak, limit tak hingga, dan limit di tak hingga, Bab IV membahas fungsi kontinu baik kontinu di sutu titik maupun kontinu pada selang, dan kontinu seragam, Bab V membahas definisi turunan fungsi, aturan rantai, ekstrim relatif, teorema nilai rata-rata, uji turunan pertama titik ekstrim, dan sifat nilai intermediet turunan, teorema nilai rata-rata Cauchy, aturan L'Hospital, dan bentuk-bentuk tak tentu, teorema Taylor dan penerapannya, ekstrim relatif, fungsi konveks, dan metode Newton. Sedang pada bab VI membahas partisi pada selang, definisi integral Riemann, fungsi-fungsi terintegral Riemann, dan integral Darbox dalam hubungannya dengan integral Riemann.

Penyusunan Buku Ajar ini bertujuan untuk mengefektifkan proses pembelajaran. Pada proses pembelajaran konvensional, biasanya dosen menjelaskan perkuliahan sambil mencatat di papan tulis. Mahasiswa umumnya menyalin catatan tersebut sambil menyimak penjelasan dosen. Proses pembelajaran lebih banyak mendengarkan ceramah dari dosen. Peran serta mahasiswa sebagai pembelajar sangat terbatas. Melalui Buku Ajar ini diharapkan proses pembelajaran dapat lebih diefektifkan. Fungsi dari Buku Ajar ini, untuk dosen dipakai menjelaskan materi kuliah, sedangkan untuk mahasiswa sebagai pengganti catatan kuliah. Oleh karena itu waktu pembelajaran di kelas dapat digunakan secara lebih efektif untuk caramah dan diskusi. Pada Buku Ajar ini, diberikan contoh-contoh soal yang dilengkapi dengan penyelesaiannya. Diharapkan soal-soal yang ada di tiap akhir bab dapat diselesaikan oleh mahasiswa.

Penyusunan Buku Ajar ini didasarkan pada buku teks *Introduction to Real Analysis* oleh Bartle dan Sherbert edisi keempat tahun 2011. Semoga Buku Ajar ini dapat berguna untuk meningkatkan kualitas pembelajaran Analisis Real, khususnya di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Jember, November 2021
Penulis

Daftar Isi

Daftar Gambar

Tinjauan Matakuliah

Matakuliah Analisis Real I (MAM1312) dan Analisis Real II (MAM1419) masing-masing berbobot 3 SKS, merupakan matakuliah yang wajib ditempuh bagi setiap mahasiswa Program S1 Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember. Matakuliah Analisis Real I mempunyai prasyarat Kalkulus.

Matakuliah Analisis Real membahas materi yang berkaitan dengan analisis matematika dirancang terdiri atas 16 kali tatap muka. Mata kuliah Analisis Real membahas konsep-konsep analisis matematika yang meliputi Sistem Bilangan Real, Barisan dan Deret Bilangan Real, Limit Fungsi, Fungsi Kontinu, Turunan Fungsi, dan Integral Riemann.

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CP-MK) ini adalah

- Mahasiswa mampu menguasai konsep teoritis matematika meliputi logika matematika dan analisis matematika;
- Mahasiswa mampu mengembangkan pemikiran matematis, yang diawali dari pemahaman prosedural hingga pemahaman yang luas meliputi eksplorasi, penalaran logis, generalisasi , abstraksi , dan bukti formal;
- Mahasiswa mampu merekonstruksi, memodifikasi, menganalisis/berpikir secara terstruktur terhadap permasalahan matematis dari suatu fenomena, mengkaji keakuratan dan mengintepretasikannya serta mengkomunikasikan secara lisan maupun tertulis dengan tepat, dan jelas;
- Mahasiswa mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya;
- Mahasiswa mampu menunjukkan kinerja mandiri, bermutu, dan terukur.

Materi yang disajikan dalam buku ini pada dasarnya disusun secara berurutan. Ini artinya, dalam memahami Bab 6 perlu memahami Bab 5 dan bab-bab sebelumnya, dalam memahami Bab 5 perlu memahami Bab 4 dan bab-bab sebelumnya, dan begitu seterusnya.

Bab 1

Sistem Bilangan Real

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. dapat memahami sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan real;

2. dapat memahami sifat-sifat bilangan real;

3. dapat memahami sifat-sifat relasi urutan pada bilangan real;

4. dapat memahami pengertian nilai mutlak bilangan real dan sifat-sifatnya;

5. dapat memahami pengertian infimum dan supremum serta dapat menentukan infimum dan supremum suatu himpunan;

6. dapat memahami sifat-sifat bilangan rasional maupun irasional.

1.1 Sistem Bilangan Real

Pada matakuliah Kalkulus, telah dijelaskan mulai dari sistem bilangan yang paling sederhana, yakni bilangan asli, lalu bilangan bulat, bilangan rasional maupun bilangan irasional hingga bilangan real. Himpunan semua **bilangan asli**, dinotasikan dengan $\mathbb{N}$, berisikan bilangan-bilangan $1, 2, 3, \cdots$. Himpunan semua **bilangan bulat**, dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$, berisikan bilangan-bilangan $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$. Himpunan semua **bilangan rasional**, dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$, berisikan semua bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m dan n keduanya bilangan bulat dengan $n \neq 0$. Sebagai contoh bilangan rasional adalah $\frac{1}{2}, \frac{3}{100}, -\frac{7}{3}$, dan lain-lain termasuk bilangan bulat. Sedangkan himpunan **bilangan irasional** merupakan komplemen himpunan bilangan rasional, misalkan $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}$, dan lain-lain. Gabungan dari himpunan semua bilangan rasional dan bilangan irasional merupakan himpunan semua **bilangan real**, dinotasikan dengan $\mathbb{R}$. Hubungan antara $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, dan $\mathbb{R}$ adalah

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ terdapat dua operasi biner, dinyatakan dengan $+$ dan $\cdot$ yang berturut-turut disebut dengan operasi **penjumlahan** dan **perkalian**. Operasi-operasi ini memenuhi sifat-sifat berikut:

(i). $x + y = y + x$ untuk setiap x, y di $\mathbb{R}$ (sifat komutatif penjumlahan);

(ii). $(x + y) + z = x + (y + z)$ untuk setiap x, y, dan z di $\mathbb{R}$ (sifat asosiatif penjumlahan);

(iii). terdapat elemen 0 di $\mathbb{R}$ sehingga berlaku $0 + x = x$ dan $x + 0 = x$ untuk setiap x di $\mathbb{R}$ (eksistensi elemen nol);

(iv). untuk setiap x di $\mathbb{R}$ terdapat elemen $-x$ di $\mathbb{R}$ sehingga berlaku $x + (-x) = 0$ dan $(-x) + x = 0$;

(v). $x \cdot y = y \cdot x$ untuk setiap x dan y di $\mathbb{R}$ (sifat komutatif perkalian);

(vi). $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ untuk setiap x, y, dan z di $\mathbb{R}$ (sifat asosiatif perkalian);

(vii). terdapat elemen 1 di $\mathbb{R}$ yang berbeda dengan 0 sehingga berlaku $1 \cdot x = x$ dan $x \cdot 1 = x$ untuk setiap x di $\mathbb{R}$ (eksistensi elemen satuan);

(viii). untuk setiap x di $\mathbb{R}$ dengan $x \neq 0$, terdapat elemen $1/x$ di $\mathbb{R}$ sehingga berlaku $x \cdot (1/x) = 1$ dan $(1/x) \cdot x = 1$;

(ix). $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ dan $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ untuk setiap x, y, dan z di $\mathbb{R}$ (sifat distributif perkalian atas penjumlahan).

Sifat (i)-(iv) berhubungan dengan operasi penjumlahan, sifat (v)-(viii) berhubungan dengan operasi perkalian, dan sifat (ix) berhubungan dengan gabungan dua operasi penjumlahan dan perkalian. Elemen 0 pada sifat (iii) disebut **bilangan nol** atau **bilangan netral** pada operasi penjumlahan. Elemen 1 pada sifat (vii) disebut **elemen satuan** atau **elemen netral** terhadap operasi perkalian. Bilangan $1/x$ pada sifat (viii) biasa juga ditulis dengan x^{-1} disebut **bilangan invers** dari x.

Sifat-sifat lebih jauh yang terkait bilangan real dengan operasi penjumlahan dan perkalian dituangkan dalam beberapa teorema berikut.

Teorema 1.1. *(a). Jika x dan z di $\mathbb{R}$ dengan $x + z = z$, maka $x = 0$;*

(b). Jika x dan $z \neq 0$ di $\mathbb{R}$ dengan $x \cdot z = z$, maka $x = 1$;

(c). Jika $x \in \mathbb{R}$, maka $0 \cdot x = 0$.

Bukti. (a). Dengan menggunakan sifat (iii), (ii), (iv), dan hipotesis $x + z = z$ diperoleh

$$x = x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = z + (-z) = 0.$$

(b). Dengan menggunakan sifat (vii), (viii), (vi), dan hipotesis $x \cdot z = z$, diperoleh

$$x = x \cdot 1 = x \cdot (z \cdot (1/z)) = (x \cdot z) \cdot (1/z) = z \cdot (1/z) = 1.$$

(c). Dari sifat (vii), (ix), dan (iii) diperoleh

$$0 \cdot x + x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = (0 + 1) \cdot x = 1 \cdot x = x.$$

Berdasarkan hasil (a), disimpulkan $0 \cdot x = 0$. □

Teorema 1.2. *(a). Jika $x \neq 0$ dan $z \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $x \cdot z = 1$, maka $z = 1/x$;*

(b). jika $x \cdot z = 0$, maka $x = 0$ atau $z = 0$.

Bukti. (a). Dengan menggunakan sifat (iii), (iv), (vi), hipotesis $x \cdot z = 0$, dan sifat (vii), diperoleh

$$z = 1 \cdot z = ((1/x) \cdot x) \cdot z = (1/x) \cdot (x \cdot z) = (1/x) \cdot 1 = 1/x.$$

(b). jika $x \neq 0$, maka diperoleh

$$(1/x) \cdot (x \cdot z) = ((1/x) \cdot x) \cdot z = 1 \cdot z = z.$$

Karena $x \cdot z = 0$, berdasarkan Teorema 1.1 (c) disimpulkan $z = 0$. $\square$

Urutan linear pada sistem bilangan real $\mathbb{R}$ dapat disusun melalui pembentukan himpunan di dalam $\mathbb{R}$ yang dinamakan himpunan bilangan positif .

Sifat 1.3. Sifat-sifat Urutan *Himpunan tidak kosong $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$ disebut himpunan* **bilangan positif** *yang memenuhi sifat-sifat berikut:*

(i). Jika x dan y di $\mathbb{P}$, maka $x + y$ di $\mathbb{P}$;

(ii). Jika x dan y di $\mathbb{P}$, maka $x \cdot y$ di $\mathbb{P}$;

(iii). Jika x di $\mathbb{R}$, maka ada tepat satu yang memenuhi:

$$x \in \mathbb{P}, \qquad x = 0, \qquad -x \in \mathbb{P}.$$

Kondisi Sifat 1.3 (iii) disebut **sifat trikotomi**. Dari sifat trikotomi ini, membagi $\mathbb{R}$ ke dalam tiga jenis elemen. Jika $x \in \mathbb{P}$ maka x elemen **positif**, jika $-x \in \mathbb{P}$ maka x merupakan elemen **negatif**, dan jika $x \notin \mathbb{P}$ dan $-x \notin \mathbb{P}$ maka x merupakan elemen **nol**. Pengertian bilangan nonnegatif tidak sama dengan bilangan positif, begitu juga pengertian bilangan nonpositif tidak sama dengan bilangan negatif. Suatu bilangan dikatakan **nonnegatif** jika ia positif atau nol, dan suatu bilangan dikatakan **nonpositif** jika ia negatif atau nol.

Selanjutnya diberikan pengertian relasi urutan pada bilangan real dan beberapa teorema yang berkenaan dengan urutan.

Definisi 1.4. *Diberikan x dan y di $\mathbb{R}$.*

(i). Bilangan x dikatakan **lebih kecil** *dari y, ditulis $x < y$, jika $y - x \in \mathbb{P}$.*

(ii). Bilangan x dikatakan **lebih kecil atau sama dengan** *y, ditulis $x \leq y$, jika $y - x \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.*

Pada Definisi 1.4, penulisan $x < y$ dapat pula ditulis $y > x$ dan dibaca y lebih besar dari x, kemudian penulisan $x \leq y$ dapat pula ditulis $y \geq x$ dan dibaca y lebih besar atau sama dengan x.

Teorema 1.5. *Diberikan x, y, dan z di $\mathbb{R}$.*

(a). Jika $x > y$ dan $y > z$, maka $x > z$.

(b). Jika $x > y$, maka $x + z > y + z$.

(c). Jika $x > y$ dan $z > 0$ maka $x \cdot z > y \cdot z$;
Jika $x > y$ dan $z < 0$ maka $x \cdot z < y \cdot z$.

Bukti. (a). Jika $x - y \in \mathbb{P}$ dan $y - z \in \mathbb{P}$, berdasarkan Sifat 1.3 (i) berakibat

$$(x - y) + (y - z) = x - z \in \mathbb{P}$$

Oleh karena itu disimpulkan $x > z$.
(b). Jika $x - y \in \mathbb{P}$, maka $(x + z) - (y + z) = x - y \in \mathbb{P}$. Jadi $x + z > y + z$.
(c). Jika $x - y \in \mathbb{P}$ dan $z \in \mathbb{P}$, maka dari Sifat 1.3 (i) diperoleh $zx - zy = z(x - y) \in \mathbb{P}$. Jadi $zx > zy$ bilamana $z > 0$.
Pada lain sisi, jika $z < 0$, maka $-z \in \mathbb{P}$, sehingga $zy - zx = (-z)(x - y) \in \mathbb{P}$, Jadi $zy > zx$ bilamana $z < 0$. □

Teorema 1.6. *(a). Jika $x \in \mathbb{R}$ dan $x \neq 0$, maka $x^2 > 0$.*
(b). $1 > 0$.
(c). Jika $n \in \mathbb{N}$, maka $n > 0$.

Bukti. (a). Dengan sifat trikotomi, jika $x \neq 0$, maka $x \in \mathbb{P}$ atau $-x \in \mathbb{P}$. Jika $x \in \mathbb{P}$, berdasarkan Sifat 1.3 (ii), diperoleh $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{P}$. Begitu juga, jika $-x \in \mathbb{P}$, maka $x^2 = (-x) \cdot (-x) \in \mathbb{P}$. Karena $x \neq 0$, disimpulkan $x^2 > 0$.
(b). Karena $1 = 1^2$, mengikuti hasil (a), maka $1 > 0$.
(c). Dengan menggunakan induksi matematika, benar untuk $n = 1$ melalui hasil (b). Jika untuk bilangan asli $n = k$ benar, maka $k \in \mathbb{P}$, dan karena $1 \in \mathbb{P}$, dipunyai $k + 1 \in \mathbb{P}$ melalui Sifat 1.3 (i). Oleh karena itu pernyataan benar untuk setiap bilangan asli $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.7. *Jika* $x \in \mathbb{R}$ *sedemikian hingga* $0 \leq x < \epsilon$ *untuk setiap* $\epsilon > 0$, *maka* $x = 0$.

Bukti. Andaikan $x > 0$. Jika diambil $\epsilon_0 = x/2$, dipunyai $0 < \epsilon_0 < x$. Oleh karena itu pernyataan $x < \epsilon$ untuk setiap $\epsilon > 0$ adalah salah, sehingga disimpulkan $x = 0$. □

Teorema 1.8. *Jika* $x \cdot y > 0$, *maka*
(i). $x > 0$ *dan* $y > 0$, *atau*
(ii). $x < 0$ *dan* $y < 0$.

Bukti. (i). Jika $x \cdot y > 0$, maka berakibat $x \neq 0$ dan $y \neq 0$. Selanjutnya, dengan menggunakan sifat trikotomi diperoleh $x > 0$ atau $x < 0$. Jika $x > 0$, maka $1/x > 0$ dan karena itu diperoleh $y = (1/x)(xy) > 0$.
Dengan cara serupa, jika $x < 0$, maka $1/x < 0$, sehingga diperoleh $y = (1/x)(xy) < 0$. □

Dari Teorema 1.8, diperoleh akibat berikut.

Akibat 1.9. *Jika* $xy < 0$, *maka*
(i). $x < 0$ *dan* $y > 0$, *atau*
(ii). $x > 0$ *dan* $y < 0$.

1.2 Nilai Mutlak

Pada subbab ini dibicarakan nilai mutlak atau nilai absolut dari bilangan real beserta sifat-sifatnya. Diawali dengan pengertian nilai mutlak melalui definisi berikut.

Definisi 1.10. Nilai mutlak *atau* **nilai absolut** *bilangan* x, *ditulis* $|x|$, *didefinisikan sebagai*

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0. \end{cases}$$

Memahami nilai mutlak x, yakni $|x|$, seperti memahami pengertian jarak titik x ke titik 0 pada garis bilangan real, yang mana jarak senantiasa bernilai nonnegatif. Sebagai contoh, $|2| = 2$, $|-3| = -(-3) = 3$, $|0| = 0$.

Berikut ini diberikan beberapa teorema, akibat, dan contoh yang berkenaan dengan nilai mutlak.

Teorema 1.11. *(i).* $|xy| = |x||y|$ *untuk setiap* $x, y \in \mathbb{R}$.
(ii). $|x|^2 = x^2$ *untuk setiap* $x \in \mathbb{R}$.
(iii). Jika $y \geq 0$, *maka* $|x| \leq y$ *jika dan hanya jika* $-y \leq x \leq y$.
(iv). $-|x| \leq x \leq |x|$,

Bukti. (i). Jika $x = 0$ atau $y = 0$ maka kedua ruas sama dengan 0.
Sekarang anggap $x \neq 0$ dan $y \neq 0$. Dalam kasus $x > 0$ dan $y > 0$, maka $xy > 0$, sehingga $|xy| = xy = |x||y|$. Untuk kasus $x > 0$ dan $y < 0$, maka $xy < 0$, sehingga $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$. Untuk kasus $x < 0, y > 0$ dan kasus $x < 0, y < 0$, bukti sebagai latihan.
(ii). Karena $x^2 \geq 0$, diperoleh $x^2 = |x^2| = |x \cdot x| = |x||x| = |x|^2$.
(iii). Jika $|x| \leq y$ dipunyai $x \leq y$ dan $-y \leq x$ atau ekivalen dengan $-y \leq x \leq y$.
(iv). Ambil $y = |x|$ pada butir (iii). □

Teorema 1.12. Ketaksamaan segitiga *Jika* $x, y \in \mathbb{R}$, *maka* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Bukti. Dari Teorema 1.11 (iv) dipunyai $-|x| \leq x \leq |x|$ dan $-|y| \leq y \leq |y|$. Dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan tersebut, diperoleh

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 1.11 (iii), diperoleh $|x+y| \leq |x|+|y|$. □

Dari Teorema 1.12, diperoleh akibat berikut.

Akibat 1.13. *Jika* $x, y \in \mathbb{R}$, *maka*
(i). $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$,
(ii). $|x - y| \leq |x| + |y|$.

Memahami pengertian $|x - y|$ seperti memahami pengertian jarak antara x dan y pada garis bilangan real. Tentunya, jarak antara x dan y sama artinya dengan jarak antara y dan x pada garis bilangan. Sebagai contoh $|2 - 5| = |5 - 2| = 3$, artinya jarak antara titik 2 dan titik 5 pada garis bilangan real adalah 3.

Sebagai akibat dari ketaksamaan segitiga, diperoleh hasil berikut yang buktinya (sebagai latihan) dapat digunakan induksi matematika.

Akibat 1.14. *Jika $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bilangan-bilangan real, maka*

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Teorema 1.15. *Untuk setiap x dan y bilangan real, berlaku*

$$|x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2.$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Dengan menggunakan Teorema 1.5 dan Teorema 1.11 (ii), diperoleh

$$\begin{aligned} |x| \leq |y| &\Rightarrow |x||x| \leq |x||y| \leq |y||y| \\ &\Rightarrow |x|^2 \leq |y|^2 \\ &\Rightarrow x^2 \leq y^2. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Dengan menggunakan Teorema 1.11 (ii), diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 \leq y^2 &\Rightarrow |x|^2 \leq |y|^2 \\ &\Rightarrow |x|^2 - |y|^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow (|x| - |y|)(|x| + |y|) \leq 0 \\ &\Rightarrow |x| - |y| \leq 0 \\ &\Rightarrow |x| \leq |y|. \end{aligned}$$

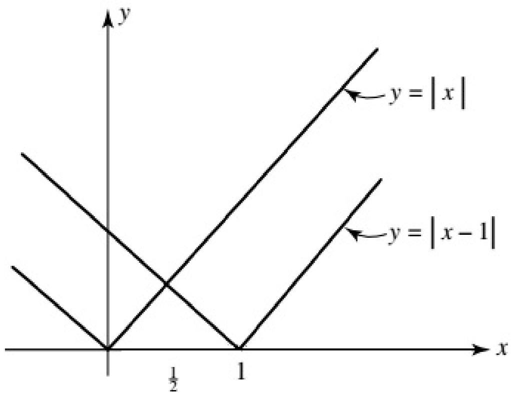
Bukti selesai. □

Contoh 1.16. *Tentukan himpunan penyelesaian dari semua $x \in \mathbb{R}$ sehingga $|x - 1| \leq |x|$.*

Untuk menyelesaikan ketaksamaan $|x-1| \leq |x|$ ini, berdasarkan Teorema 1.15, diperoleh

$$\begin{aligned} |x-1| \leq |x| &\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x^2 \\ &\Leftrightarrow -2x + 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1/2\}$.
Cara lain untuk menyelesaikan ketaksamaan ini adalah dengan menggunakan grafik. Bila kedua grafik $y = |x|$ dan $y = |x-1|$ digambar pada satu bidang tempat yang sama seperti ditunjukkan dalam Gambar 1.1, terlihat bahwa grafik $y = |x-1|$ di bawah grafik $y = |x|$ ketika $x \geq 1/2$.



Gambar 1.1: Grafik $y = |x|$ dan $y = |x-1|$

Berikutnya dibicarakan pengertian persekitaran dari suatu titik di bilangan real.

Definisi 1.17. *Diberikan $p \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon > 0$.* **Persekitaran** *titik p dengan jari-jari ϵ adalah himpunan $V_\epsilon(p) = \{x \in \mathbb{R} : |p - x| < \epsilon\}$.*

Untuk setiap $p \in \mathbb{R}$, pernyataan x berada di persekitaran $V_\epsilon(p)$ ekivalen dengan pernyataan

$$-\epsilon < x - p < \epsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad p - \epsilon < x < p + \epsilon.$$

Teorema 1.18. *Diberikan $p \in \mathbb{R}$. Jika untuk setiap $\epsilon > 0$ bilangan $x \in V_\epsilon(p)$, maka $x = p$.*

Bukti. Jika x memenuhi $|x - p| < \epsilon$ untuk setiap $\epsilon > 0$, berdasarkan Teorema 1.7, maka $|x - p| = 0$ dan karena itu $p = x$. □

1.3 Supremum dan Infimum

Pada subbab ini dikenalkan himpunan terbatas atas, himpunan terbatas bawah, himpunan terbatas, supremum himpunan, dan infimum himpunan beserta sifat-sifatnya.

Definisi 1.19. *Diberikan himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ dengan $S \neq \emptyset$.*

(a). Himpunan S dikatakan **terbatas ke atas** *jika terdapat bilangan $u \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$. Untuk setiap bilangan u yang memenuhi ketaksamaan tersebut disebut* **batas atas** *himpunan S.*

(b). Himpunan S dikatakan **terbatas ke bawah** *jika terdapat bilangan $w \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Untuk setiap bilangan w yang memenuhi ketaksamaan tersebut disebut* **batas bawah** *himpunan S.*

(c). Himpunan S dikatakan **terbatas** *jika S terbatas ke atas dan terbatas ke bawah, jika tidak demikian himpunan S dikatakan* **tidak terbatas***.*

Dari Definisi 1.19, ini menjelaskan jika u adalah batas atas himpunan S maka untuk setiap $v \in \mathbb{R}$ dengan $u \leq v$, merupakan batas atas S. Jika w batas bawah himpunan S, maka untuk setiap $t \in \mathbb{R}$ dengan $t \leq w$, merupakan batas bawah S.

Definisi 1.20. *Diberikan himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ dengan $S \neq \emptyset$.*

(a). Jika S terbatas ke atas, maka bilangan u dikatakan **supremum** *(atau* **batas atas terkecil***) himpunan S jika ia memenuhi*

(i). u merupakan batas atas S, dan

(ii). untuk setiap v batas atas S, maka $u \leq v$.

(b). Jika S terbatas ke bawah, maka bilangan w dikatakan **infimum** *(atau* **batas bawah terbesar***) himpunan S jika ia memenuhi*

(i). w merupakan batas bawah S, dan

(ii). untuk setiap t batas bawah S, maka $t \leq w$.

Lemma 1.21. *Diberikan himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong. Bilangan u merupakan supremum S jika dan hanya jika u memenuhi sifat*

(i). $s \leq u$ untuk setiap $s \in S$.

(ii). jika $v < u$, maka terdapat $s' \in S$ sehingga $v < s'$.

Lemma 1.22. *Bilangan u yang merupakan batas atas S adalah supremum S jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $s_\epsilon \in S$ sedemikian hingga $u - \epsilon < s_\epsilon$.*

Bukti. Jika u batas atas S dan jika $v < u$, maka diambil $\epsilon = u - v > 0$. Jadi terdapat $s_\epsilon \in S$ sedemikian hingga $v = u - \epsilon < s_\epsilon$. Oleh karena itu, v bukan batas atas S, dan disimpulkan $u = \sup S$.
Untuk sebaliknya, misal $u = \sup S$ dan diberikan $\epsilon > 0$. Karena $u - \epsilon < u$, maka $u - \epsilon$ bukan batas atas S. Oleh karena itu, untuk suatu $s_\epsilon \in S$ haruslah lebih besar dari $u - \epsilon$, yakni $u - \epsilon < s_\epsilon$. □

Teorema 1.23. *Jika $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat bilangan $n_x \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x \leq n_x$.*

Bukti. Andaikan $n \leq x$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka x merupakan batas atas $\mathbb{N}$. Oleh karena itu $\mathbb{N}$ mempunyai supremum, katakan $u = \sup \mathbb{N}$. Jadi $u - 1 < u$. Oleh karena itu, $u - 1$ bukan batas atas $\mathbb{N}$, sehingga terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan $u - 1 < m$. Karena $u < m + 1 \in \mathbb{N}$, ketaksamaan ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa u batas atas $\mathbb{N}$. □

Akibat 1.24. *Jika $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, maka* $\inf A = 0$.

Bukti. Karena $A \neq \emptyset$ dan terbatas bawah oleh 0, maka A mempunyai infimum, misalkan $w = \inf A$. Jelaslah bahwa $w \geq 0$. Untuk setiap $\epsilon > 0$ berakibat terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $1/\epsilon < n$ yang berakibat $1/n < \epsilon$. Oleh karena itu diperoleh

$$0 \leq w \leq 1/n < \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, berdasarkan Teorema 1.7, disimpulkan $w = 0$. $\square$

Akibat 1.25. *Jika $t > 0$, terdapat $n_t \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $0 < 1/n_t < t$.*

Bukti. Karena $\inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ dan $t > 0$, maka t bukan batas bawah $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Jadi terdapat $n_t \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $0 < 1/n_t < t$. $\square$

Akibat 1.26. *Jika $y > 0$, terdapat $n_y \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n_y - 1 \leq y \leq n_y$.*

Bukti. Dibentuk himpunan $E_y = \{m \in \mathbb{N} : y < m\} \neq \emptyset$. Oleh karena itu E_y memuat elemen terkecil, misal elemen terkecil E_y dinyatakan dengan n_y. Oleh karena itu, $n_y - 1 \notin E_y$, sehingga dipunyai $n_y - 1 \leq y < n_y$. $\square$

Teorema 1.27. *Untuk setiap dua bilangan real x dan y dengan $x < y$, maka terdapat bilangan rasional $r \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $x < r < y$.*

Bukti. Tanpa mengurangi ketermumuman, anggap bahwa $x > 0$, sehingga diperoleh $y - x > 0$. Akibatnya, terdapat bilangan $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $1/n < y - x$. Oleh karena itu, $nx + 1 < ny$. Jika diterapkan Akibat 1.26 ke $nx > 0$, didapatkan $m \in \mathbb{N}$ dengan $m - 1 \leq nx < m$. Oleh karena itu $m \leq nx + y < ny$ sehingga $nx < m < ny$. Pilih bilangan rasional $r = m/n$ dan memenuhi $x < r < y$. $\square$

Akibat 1.28. *Untuk setiap dua bilangan real x dan y dengan $x < y$, maka terdapat bilangan irasional $s \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $x < s < y$.*

Bukti. Dengan menerapkan Teorema 1.27 ke bilangan real $x/\sqrt{2}$ dan $y/\sqrt{2}$ diperoleh bilangan rasional $r \neq 0$ sedemikian hingga

$$x/\sqrt{2} < r < y/\sqrt{2}.$$

Jadi $s = r\sqrt{2}$ merupakan bilangan irasional dan memenuhi $x < s < y$. $\square$

Dari Teorema 1.27 dan Akibat 1.28, ini menjelaskan bahwa himpunan semua bilangan rasional maupun himpunan semua bilangan irasional itu **padat** di $\mathbb{R}$, yang artinya bahwa di setiap persekitaran bilangan real senantiasa memuat bilangan rasional maupun bilangan irasional.

1.4 Rangkuman

Beberapa rangkuman penting terkait sistem pada bilangan real.

1. **Sifat-sifat Urutan** Himpunan tidak kosong $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$ disebut himpunan **bilangan positif** yang memenuhi sifat-sifat berikut:

   (i). Jika x dan y di $\mathbb{P}$, maka $x + y$ di $\mathbb{P}$;

   (ii). jika x dan y di $\mathbb{P}$, maka $x \cdot y$ di $\mathbb{P}$;

   (iii). jika x di $\mathbb{R}$, maka ada tepat satu yang memenuhi:

   $$x \in \mathbb{P}, \qquad x = 0, \qquad -x \in \mathbb{P}.$$

2. Diberikan x, y, dan z di $\mathbb{R}$.

   (a). Jika $x > y$ dan $y > z$, maka $x > z$.

   (b). Jika $x > y$, maka $x + z > y + z$.

   (c). Jika $x > y$ dan $z > 0$ maka $x \cdot z > y \cdot z$;
   Jika $x > y$ dan $z < 0$ maka $x \cdot z < y \cdot z$.

3. Nilai mutlak bilangan x, ditulis $|x|$, didefinisikan sebagai

   $$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0. \end{cases}$$

4. Jika $x \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $0 \leq x < \epsilon$ untuk setiap $\epsilon > 0$, maka $x = 0$.

5. **Ketaksamaan segitiga** Jika $x, y \in \mathbb{R}$, maka $|x + y| \leq |x| + |y|$.

6. Diberikan $p \in \mathbb{R}$ dan $\epsilon > 0$. **Persekitaran** titik p dengan jari-jari ϵ adalah himpunan $V_\epsilon(p) = \{x \in \mathbb{R} : |p - x| < \epsilon\}$.

7. Diberikan himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ dengan $S \neq \emptyset$.

(a). Jika S terbatas ke atas, maka bilangan u dikatakan **supremum** (atau **batas atas terkecil**) himpunan S jika ia memenuhi

(i). u merupakan batas atas S, dan

(ii). untuk setiap v batas atas S, maka $u \leq v$.

(b). Jika S terbatas ke bawah, maka bilangan w dikatakan **infimum** (atau **batas bawah terbesar**) himpunan S jika ia memenuhi

(i). w merupakan batas bawah S, dan

(ii). untuk setiap t batas bawah S, maka $t \leq w$.

8. Himpunan bilangan rasional maupun himpunan bilangan irasional merupakan himpunan yang **padat** di $\mathbb{R}$.

1.5 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-teman Anda di kelas beberapa hal berikut ini.

1. Tunjukkan bahwa bilangan $\sqrt{2}$ bukan merupakan bilangan rasional.

2. Jika p adalah sebarang bilangan real, tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ maka $V_\epsilon(p)$ memuat bilangan rasional dan bilangan irasional.

1.6 Soal-Soal Latihan

1. Diberikan $x, y \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa
   (a). jika $x + y = 0$, maka $y = -x$, (b). $-(-x) = x$,
   (c). $(-1)x = -x$, (d). $(-1)(-1) = 1$.

2. Buktikan bahwa
   (a). $-(x + y) = (-x) + (-y)$ (b). $(-x)(-y) = x \cdot y$

3. Jika $x \cdot x = x$, buktikan bahwa $x = 0$ atau $x = 1$.

4. Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan rasional x sehingga $x^2 = 3$.

5. Tunjukkan bahwa jika x dan y keduanya bilangan rasional, maka $x + y$ juga merupakan bilangan rasional.

6. Jika $w < x$ dan $y \leq z$, maka $w + y < x + z$.

7. Tunjukkan, jika $x > 0$ maka $1/x > 0$ dan $1/(1/x) = x$.

8. Diberikan $x, y \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $x^2 + y^2 = 0$ jika dan hanya jika $x = y = 0$.

9. Jika $0 \leq x < y$, tunjukkan bahwa $x^2 \leq xy < y^2$.

10. Diberikan $x, y \in \mathbb{R}$ dan misalkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ berlaku $x \leq y + \epsilon$. Tunjukkan bahwa $x \leq y$.

11. Jika $x > 0, y > 0$ dan $n \in \mathbb{N}$, dengan menggunakan induksi matematika tunjukkan bahwa $x < y$ jika dan hanya jika $x^n < y^n$.

12. Jika $x \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa $|x| = \sqrt{x^2}$.

13. Jika $x, y \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa $|x + y| = |x + |y|$ jika dan hanya jika $xy \geq 0$.

14. Tunjukkan bahwa $|x - p| < \epsilon$ jika dan hanya jika $p - \epsilon < x < p + \epsilon$.

15. Tentukan semua nilai x yang memenuhi ketaksamaan $|x^2 - 4| < 4$.

16. Tentukan semua nilai x yang memenuhi kesamaan $|x + 2| + |x - 3| = 8$.

17. Sketsakan grafik $y = |x - 3|$ dan grafik $y = x + 2$ dalam satu gambar. Gunakan sketsa kedua grafik tersebut untuk menyelesaikan ketaksamaan $|x - 3| < x + 2$.

18. Sketsakan grafik kesamaan $y = |x - 1| - |x + 1|$.

19. Tentukan semua nilai x yang memenuhi ketaksamaan
$$3 < |x + 1| + |x - 2| < 5.$$

20. Tentukan dan sketsakan himpunan pasangan titik-titik $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ yang memenuhi $|x| - |y| \leq 2$.

21. Tunjukkan bahwa $\sup\{-1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

22. Jika $A = \{1/m - 1/n : m, n \in \mathbb{N}\}$, tentukan $\sup A$ dan $\inf A$.

23. Diberikan $B \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong dan terbatas.

    (a). Diberikan $a > 0$ dan didefinisikan himpunan $aB = \{ab : b \in B\}$. Buktikan bahwa

    $$\inf aB = a \inf B, \qquad \sup aB = a \sup B$$

    .

    (b). Diberikan $c < 0$ dan didefinisikan himpunan $cB = \{cb : b \in B\}$. Buktikan bahwa

    $$\inf cB = c \sup B, \qquad \sup cB = c \inf B$$

    .

24. Diberikan S himpunan nonnegatif yang terbatas ke atas dan diberikan $A = \{x^2 : x \in S\}$. Buktikan bahwa, jika $u = \sup S$, maka $u^2 = \sup A$.

25. Jika $x > 0$, tunjukkan terdapat bilangan $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $1/2^n < x$.

26. Untuk setiap bilangan real $u > 0$ dan $x < y$, tunjukkan bahwa terdapat bilangan rasional r sedemikian hingga $x < ru < y$.

27. Tunjukkan bahwa setiap himpunan berhingga memuat supremumnya.

1.7 Bahan Bacaan dan Rujukan Lebih Lanjut

1. Bartle, R.G. dan D.R. Sherbert, 2011, *Introduction to Real Analysis*, edisi keempat, New York: John Wiley & Sons, Inc.

2. Larson, L., 2015, *Introduction to Real Analysis*, University of Louisville

3. Trench, W.F., 2013, *Introduction to Real Analysis*, USA:Pearson Education

Bab 2

Barisan dan Deret

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. dapat membuktikan barisan konvergen dengan menggunakan definisi barisan konvergen;
2. dapat menentukan limit barisan konvergen;
3. dapat menggunakan teorema-teorema limit untuk memeriksa apakah suatu barisan konvergen atau divergen;
4. dapat membuktikan suatu barisan konvergen melalui barisan monoton dan terbatas;
5. dapat membuktikan barisan konvergen dengan menunjukkan barisan Cauchy;
6. dapat membuktikan deret konvergen dan menentukan limitnya.

2.1 Barisan dan Limit Barisan

Untuk mengawali pembahasan limit barisan, terlebih dahulu diberikan pengertian barisan melalui definisi berikut.

Definisi 2.1. Barisan *bilangan real adalah fungsi dengan daerah definisi himpunan bilangan asli* $\mathbb{N}$ *dan daerah hasil (range) berupa himpunan bagian bilangan real.*

Pada Definisi 2.1, dapat pula dikatakan jika X merupakan barisan bilangan real maka dapat dituliskan $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Berikut beberapa contoh barisan bilangan real.

Contoh 2.2. *(a). Jika* $a \in \mathbb{R}$, *barisan* $A = \{a, a, a, \cdots\}$ *disebut* **barisan konstan**
(b). Barisan $\{1, 1/2, 1/3, \cdots\}$ *dapat dituliskan sebagai* $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.
(c). Barisan induktif $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *yang didefinisikan* $f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ $(n \geq 2)$ *merupakan barisan khusus yang dinamakan* **barisan Fibonacci**.

Definisi 2.3. *Barisan* $\{x_n\}$ *dikatakan* **konvergen** *ke* $x \in \mathbb{R}$, *jika untuk setiap* $\epsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* K *yang tergantung dari* ϵ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \geq K$ *berlaku* $|x_n - x| < \epsilon$.

Bilangan x yang memenuhi Definisi 2.3 dikatakan **limit** barisan $\{x_n\}$. Jika suatu barisan mempunyai limit, maka barisan tersebut dikatakan **konvergen**, jika tidak maka dikatakan **divergen**. Dalam hal barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x, dapat dituliskan

$$\lim x_n = x.$$

Ketunggalan limit barisan, diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.4. *Barisan di* $\mathbb{R}$ *paling banyak mempunyai satu limit.*

Bukti. Misalkan a dan b keduanya merupakan limit dari barisan $\{x_n\}$. Hal ini berarti untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_1$ berlaku $|x_n - a| < \epsilon/2$, dan terdapat $K_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_2$ berlaku $|x_n - b| < \epsilon/2$. Dipilih $K = maks\{K_1, K_2\}$. Jadi untuk setiap $n \geq K$ diperoleh

$$\begin{aligned} |a-b| &= |a - x_n + x_n - b| \\ &\leq |x_n - a| + |x_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, berdasarkan Teorema 1.7, disimpulkan $|a-b| = 0$ atau dengan kata lain $a = b$. Ini menunjukkan limit barisan itu tunggal adanya. □

Teorema 2.5. *Diberikan $\{x_n\}$ barisan bilangan real dan diberikan $x \in \mathbb{R}$. Pernyataan-pernyataan berikut ekivalen.*

(a). Barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x.

(b). Untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli K sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \epsilon$.

(c). Untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli K sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$.

(d). Untuk setiap persekitaran x dengan jari-jari ϵ, $V_\epsilon(x)$, terdapat bilangan asli K sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $x_n \in V_\epsilon(x)$.

Bukti. Ekivalensi (a) dan (b) mengikuti Definisi 1.17. Ekivalensi (b), (c), dan (d) mengikuti implikasi berikut:

$$|x_n - x| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\epsilon < x_n - x < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad x - \epsilon < x_n < x + \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad x_n \in V_\epsilon(x).$$

Bukti selesai. □

Berikut diberikan beberapa contoh barisan konvergen dan divergen dan cara menentukan nilai limit barisan konvergen menggunakan Definisi 2.3.

Contoh 2.6. *(a).* $\lim 1/n = 0$.
Jika diberikan $\epsilon > 0$ sebarang, berdasarkan Akibat 1.28, terdapat bilangan asli K sedemikian hingga $1/K < \epsilon$. Oleh karena itu, jika $n \geq K$, diperoleh $1/n \leq 1/K < \epsilon$. Akibatnya, jika $n \geq K$ maka

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa barisan $\{1/n\}$ *konvergen ke* 0.
(b). $\lim\left(\frac{2n+3}{n+2}\right) = 2.$
Diberikan $\epsilon > 0$*, diinginkan untuk* n *yang cukup besar sehingga berlaku*

$$\left|\frac{2n+3}{n+2} - 2\right| < \epsilon.$$

Dengan menyederhanakan ruas kiri ketaksamaan terakhir di atas, diperoleh

$$\left|\frac{2n+3}{n+2} - 2\right| = \left|\frac{2n+3-2n-4}{n+2}\right| = \left|\frac{-1}{n+2}\right| = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n}.$$

Jika ketaksamaan $1/n < \epsilon$ *terpenuhi, maka ketaksamaan* $\left|\frac{2n+3}{n+2} - 2\right| < \epsilon$ *juga terpenuhi. Jadi jika* $1/K < \epsilon$*, maka untuk setiap* $n \geq K$*, dipunyai* $1/n < \epsilon$ *dan karena itu* $\left|\frac{2n+3}{n+2} - 2\right| < \epsilon$ *terpenuhi.*
(c). Barisan $\{(-1)^n\}$ *adalah barisan tidak konvergen.*
Andaikan $\{(-1)^n\}$ *konvergen, katakan konvergen ke* $x \in \mathbb{R}$*. Diberikan bilangan* $\epsilon_0 = 1/2$*. Terdapat bilangan* $K \in \mathbb{N}$ *sehingga untuk setiap* $n \geq K$ *berlaku* $|(-1)^n - x| < 1/2 = \epsilon_0$*. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *dengan* $n_0 > K$ *yang berlaku* $|(-1)^n - x| \geq 1/2$.

Bila suatu barisan m suku pertamanya dihilangkan, maka suku-suku sisanya akan membentuk barisan baru yang dinamakan **m-tail**. Berikut ini diberikan pengertian m-tail suatu barisan dan teorema-teorema yang berkenaan dengan m-tail.

Definisi 2.7. *Diberikan barisan bilangan real* $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ *dan* m *bilangan asli. Barisan* $X_m = \{x_{m+n} : n \in \mathbb{N}\} = \{x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots\}$ *dikatakan* **m-tail** *dari barisan* X.

Teorema 2.8. *Diberikan barisan* X *dan* $m \in \mathbb{N}$*. Barisan* X_m *m-tail barisan* X *konvergen jika dan hanya jika barisan* X *konvergen. Dalam kasus ini* $\lim X_m = \lim X$.

Bukti. Untuk setiap $p \in \mathbb{N}$, suku ke-p barisan X_m merupakan suku ke-$(m+p)$ barisan X. Dengan cara serupa, jika $q > m$ maka suku ke-q barisan X adalah suku ke-$(q-m)$ barisan X_m.
Misalkan X konvergen ke x. Untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \epsilon$, maka suku-suku barisan X_m untuk $k \geq K - m$ memenuhi $|x_k - x| < \epsilon$. Jadi dapat dipilih $K_m = K - m$, sehingga barisan X_m konvergen ke x. $\square$

Teorema 2.9. *Diberikan* $\{x_n\}$ *barisan bilangan real dan* $x \in \mathbb{R}$. *Jika* $\{a_n\}$ *barisan bilangan real positif dengan* $\lim a_n = 0$ *dan jika untuk suatu konstanta* $C > 0$ *dan suatu bilangan* $m \in \mathbb{N}$ *dipunyai*

$$|x_n - x| \leq Ca_n \qquad \text{untuk setiap } n \geq m,$$

maka $\lim x_n = x$.

Bukti. Untuk setiap $\epsilon > 0$, karena $\lim a_n = 0$, maka terdapat bilangan asli K sehingga untuk $n \geq K$ berakibat

$$a_n = |a_n - 0| < \epsilon/C.$$

Oleh karena itu, jika $n \geq K$ dan $n \geq m$, maka

$$|x_n - x| \leq Ca_n < C(\epsilon/C) = \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $\lim x_n = x$. □

Contoh 2.10. *Jika* $0 < a < 1$, *maka* $\lim a^n = 0$.

Karena $0 < a < 1$, ini bisa dituliskan

$$a = \frac{1}{1+b}$$

dengan b suatu bilangan positif. Oleh karena itu, diperoleh

$$0 < a^n = \frac{1}{(1+b)^n} \leq \frac{1}{1+bn} < \frac{1}{b}\frac{1}{n}.$$

Karena $\lim 1/n = 0$ dan berdasarkan Teorema 2.9, disimpulkan $\lim a^n = 0$.

Berikutnya diberikan pengertian barisan terbatas dan satu teorema yang menunjukkan bahwa barisan konvergen merupakan barisan terbatas.

Definisi 2.11. *Barisan* $\{x_n\}$ *dikatakan* **terbatas** *(bounded) jika terdapat bilangan real* $R > 0$ *sedemikian hingga* $|x_n| \leq R$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.

Contoh barisan terbatas adalah $\{1/n\}$ karena dapat dipilih $R = 2$ sehingga $|1/n| \leq 2 = R$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sedang contoh barisan tak terbatas adalah $\{n\}$. Suatu barisan yang terbatas belum tentu konvergen, sebagai contoh barisan $\{(-1)^n\}$ terbatas karena $|(-1)^n| = 1 \leq 2$ tetapi dari Contoh 2.6 (c), barisan $\{(-1)^n\}$ tidak konvergen.

Teorema 2.12. *Setiap barisan konvergen adalah terbatas.*

Bukti. Misalkan $\lim x_n = x$ dan diberikan bilangan $\epsilon = 1$. Terdapat bilangan asli K sedemikian hingga $|x_n - x| < 1$ untuk setiap $n \geq K$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga dengan $n \geq K$, diperoleh

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|.$$

Jika dipilih bilangan

$$R = \sup\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{K-1}|, 1 + |x|\},$$

maka $|x_n| \leq R$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Selanjutnya diberikan beberapa teorema yang berkaitan dengan jumlahan, perkalian, dan pembagian dua barisan konvergen.

Teorema 2.13. *Diberikan bilangan $c \in \mathbb{R}$ dan diberikan barisan bilangan real $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$. Jika $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ keduanya konvergen berturut-turut ke x dan y, maka barisan:*

(i). $\{cx_n\}$ konvergen ke cx;

(ii). $\{x_n + y_n\}$ konvergen ke $x + y$;

(iii). $\{x_n \cdot y_n\}$ konvergen ke $x \cdot y$;

(iv). $\{x_n/y_n\}$ konvergen ke x/y asalkan $y_n \neq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $y \neq 0$.

Bukti. Diberikan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang.
(i). Diberikan bilangan $c \in \mathbb{R}$. Jika $c = 0$, maka barisan $\{cx_n\}$ adalah barisan konstan $\{0, 0, 0, \cdots\}$, akibatnya konvergen ke 0.
Jika $c \neq 0$, karena $\lim x_n = x$, terdapat bilangan asli K sehingga untuk setiap setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \epsilon/|c|$. Akibatnya, untuk setiap $n \geq K$ diperoleh

$$|cx_n - cx| = |c||x_n - x| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan barisan $\{cx_n\}$ konvergen ke cx.
(ii). Diberikan $\lim x_n = x$. Terdapat bilangan asli K_1 sehingga untuk setiap $n \geq K_1$ berlaku $|x_n - x| < \epsilon/2$.

Diberikan $\lim y_n = y$. Terdapat bilangan asli K_2 sehingga untuk setiap $n \geq K_2$ berlaku $|y_n - y| < \epsilon/2$.
Dipilih bilangan asli $K = \sup\{K_1, K_2\}$. Dengan demikian untuk setiap $n \geq K$, diperoleh

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $\lim(x_n + y_n) = x + y$.
(iii). Untuk membuktikan bagian ini, gunakan sifat keterbatasan pada Teorema 2.12. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|. \end{aligned}$$

Misalkan $\{x_n\}$ terbatas oleh R_1 dengan $R_1 > 0$, yakni $|x_n| \leq R_1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dipilih bilangan $R = \sup\{R_1, |y|\}$. Karena $\{x_n\}$ konvergen ke x, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_1$, berlaku $|x_n - x| < \epsilon/2R$, dan terdapat bilangan $K_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_2$ berlaku $|x_n - x| < \epsilon/2R$. Pilih $K = \sup\{K_1, K_2\}$. Oleh karena itu, untuk setiap $n \geq K$ diperoleh

$$|x_n y_n - xy| \leq R|y_n - y| + R|x_n - x| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $\lim(x_n y_n) = xy$.
(iv). Bukti sebagai latihan. □

Teorema 2.14. *Jika* $x_n \geq 0$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *dan* $\{x_n\}$ *barisan konvergen, maka* $\lim x_n \geq 0$.

Bukti. Misalkan $x = \lim x_n$. Andaikan $x < 0$, diambil $\epsilon = -x > 0$. Karena $x = \lim x_n$, terdapat bilangan asli K sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$x - \epsilon < x_n < x + \epsilon.$$

Lebih khusus dipunyai $x_K < x + \epsilon = x + (-x) = 0$. Hal ini kontradiksi dengan hipotesis $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu haruslah $\lim x_n = x \geq 0$. $\square$

Teorema 2.15. *Jika $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ keduanya barisan konvergen dengan $x_n \leq y_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\lim x_n \leq \lim y_n$.*

Bukti. Diberikan $z_n = y_n - x_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu $z_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Teorema 2.13 dan Teorema 2.14 diperoleh $\lim y_n - \lim x_n = \lim(y_n - x_n) = \lim z_n \geq 0$. Dengan demikian $\lim x_n \leq \lim y_n$. $\square$

Teorema 2.16. *Jika $\{x_n\}$ barisan konvergen dan $a \leq x_n \leq b$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $a \leq \lim x_n \leq b$.*

Bukti. Diberikan barisan konstan $\{y_n\} = \{b, b, \cdots\}$. Berdasarkan Teorema 2.15, diperoleh $\lim x_n \leq \lim y_n = b$. Dengan cara serupa ambil barisan konstan $\{x_n\} = \{a, a, \cdots\}$ sehingga $a \leq \lim x_n$. $\square$

Teorema 2.17. *Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x, maka barisan $\{|x_n|\}$ konvergen ke $|x|$.*

Bukti. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x| \qquad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Kekonvergenan barisan $\{|x_n|\}$ ke $|x|$ adalah konsekuensi dari kekonvergenan barisan $\{x_n\}$ ke x. $\square$

Teorema 2.18. *Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x dengan $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka barisan $\{\sqrt{x_n}\}$ konvergen ke $\sqrt{x}$.*

Bukti. Karena $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $\lim x_n = x$, diperoleh $x \geq 0$. Untuk kasus $x = 0$, karena $\lim x_n = x = 0$, untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sedemikian hingga jika $n \geq K$ maka berlaku $0 \leq x_n < \epsilon^2$. Oleh karena itu $0 \leq \sqrt{x_n} < \epsilon$ untuk setiap $n \geq K$. Karena $\epsilon > 0$ sebarang,

hal ini berakibat $\lim \sqrt{x_n} = 0$.
Untuk kasus $x > 0$, diperoleh $\sqrt{x} > 0$ dan diperoleh hubungan

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}.$$

Karena $\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$, diperoleh

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)|x_n - x|$$

Kekonvergenan barisan $\{\sqrt{x_n}\}$ ke $\sqrt{x}$ mengikuti kekonvergenan barisan $\{x_n\}$ ke x. □

Teorema 2.19. *Diberikan barisan bilangan real positif* $\{x_n\}$ *sedemikian hingga* $\lim(x_{n+1}/x_n) = L$. *Jika* $L < 1$, *maka barisan* $\{x_n\}$ *konvergen dan* $\lim x_n = 0$.

Bukti. Karena $x_n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diperoleh $L \geq 0$. Diberikan $r \in \mathbb{R}$ dengan $L < r < 1$, dan diambil $\epsilon = r - L > 0$. Terdapat bilangan asli K sedemikian hingga jika $n \geq K$ maka

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < \epsilon,$$

sehingga diperoleh

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \epsilon = L + (r - L) = r.$$

Oleh karena itu, jika $n \geq K$, diperoleh

$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < \cdots < x_K r^{n-K+1}.$$

Jika diambil $C = x_K/r^K$, diperoleh $0 < x_{n+1} < Cr^{n+1}$ untuk setiap $n \geq K$. Karena $0 < r < 1$, berdasarkan Contoh 2.10, diperoleh $\lim r^n = 0$ dan karena itu $\lim x_n = 0$. □

2.2 Barisan Monoton

Pada subbab ini akan dibicarakan barisan monoton, teorema kekonvegenan barisan monoton, dan beberapa contoh yang berhubungan dengan barisan monoton dan terbatas.

Definisi 2.20. *(i). Barisan* $\{x_n\}$ *dikatakan* **naik monoton** *jika memenuhi* $x_n \leq x_{n+1}$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.
(ii). Barisan $\{x_n\}$ *dikatakan* **turun monoton** *jika memenuhi* $x_n \geq x_{n+1}$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.
(iii). Barisan $\{x_n\}$ *dikatakan* **monoton** *jika* $\{x_n\}$ *monoton naik atau monoton turun.*

Teorema 2.21. *Barisan monoton merupakan barisan konvergen jika dan hanya jika terbatas.*

Bukti. Sudah cukup jelas berdasarkan Teorema 2.12 bahwa barisan konvergen merupakan barisan terbatas.
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika $\{x_n\}$ barisan monoton dan terbatas, maka $\{x_n\}$ konvergen.
Misalkan $\{x_n\}$ naik monoton dan terbatas. Karena $\{x_n\}$ terbatas, maka terdapat bilangan $R > 0$ sedemikian hingga $x_n \leq R$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\{x_n\}$ terbatas ke atas, terdapat $x' = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $x' = \lim x_n$.
Untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, maka $x' - \epsilon$ bukan merupakan batas atas himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Oleh karena itu terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga $x' - \epsilon < x_K$.
Karena $\{x_n\}$ barisan naik monoton, ini berakibat $x_K \leq x_n$ untuk setiap $n \geq K$, sehingga

$$x' - \epsilon < x_K \leq x_n \leq x' < x' + \epsilon, \qquad \text{untuk setiap } n \geq K.$$

Oleh karena itu diperoleh

$$|x_n - x'| < \epsilon, \qquad \text{untuk setiap } n \geq K.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $\lim x_n = x'$.
Untuk kasus barisan monoton turun, bukti sebagai latihan. □

Contoh 2.22. *Diberikan barisan induktif* $\{x_n\}$ *yang didefinisikan* $x_1 = 1$, *dan* $x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3)$ *untuk setiap* $n \geq 1$. *Akan ditunjukkan barisan* $\{x_n\}$ *monoton dan terbatas, akibatnya* $\{x_n\}$ *konvergen.*

Pertama akan ditunjukkan $\{x_n\}$ terbatas atas oleh 2, yakni $x_n < 2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $x_k < 2$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka

$$x_{k+1} = \frac{1}{4}(2x_k + 3) < \frac{1}{4}(4 + 3) = \frac{7}{4} < 2.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $\{x_n\}$ naik monoton.
Anggap $x_k < x_{k+1}$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu,

$$x_{k+1} = \frac{1}{4}(2x_k + 3) < \frac{1}{4}(2x_{k+1} + 3) = x_{k+2}.$$

Ini menunjukkan jika $x_k < x_{k+1}$ berakibat $x_{k+1} < x_{k+2}$. Oleh karena itu disimpulkan $x_n < x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Karena $\{x_n\}$ monoton dan terbatas, berdasarkan Teorema 2.21 maka $\{x_n\}$ konvergen. Untuk menentukan nilai limit barisan $\{x_n\}$, dimisalkan $\lim x_n = x$. Jadi diperoleh pula $\lim x_{n+1} = x$. Dengan mengambil limit kedua ruas persamaan $x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3)$, diperoleh hubungan

$$x = \lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{4}(2x_n + 3) = \frac{1}{4}(2x + 3),$$

sehingga $x = 3/2$.

2.3 Barisan Cauchy

Pada subbab ini akan diberikan pengertian barisan Cauchy, contoh barisan Cauchy, dan teorema ekivalensi barisan Cauchy dengan barisan konvergen.

Definisi 2.23. *Barisan $\{x_n\}$ dikatakan* **barisan Cauchy** *jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $n, m \geq K$ maka $|x_n - x_m| < \epsilon$.*

Contoh 2.24. *Barisan $\{1/\sqrt{n}\}$ merupakan barisan Cauchy.*

Jika diberikan $\epsilon > 0$, dipilih bilangan $K \in \mathbb{N}$ sehingga $K > 4/\epsilon^2$. Jadi, jika $n, m \geq K$ dipunyai $1/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{K} < \epsilon/2$. Dengan cara serupa diperoleh $1/\sqrt{m} < \epsilon/2$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{m}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $\{1/\sqrt{n}\}$ barisan Cauchy.

Lemma 2.25. *Jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy, maka $\{x_n\}$ barisan terbatas.*

Bukti. Diberikan $\{x_n\}$ barisan Cauchy dan bilangan $\epsilon = 2$. Diambil $K \in \mathbb{N}$ dan jika $n \geq K$ maka $|x_n - x_K| < 2$. Oleh karena itu dipunyai $|x_n| \leq |x_K| + 2$ untuk setiap $n \geq K$. Selanjutnya dipilih

$$R = \sup\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{K-1}|, |x_K| + 2\}.$$

Jadi berlaku $|x_n| \leq R$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan kata lain $\{x_n\}$ barisan terbatas. □

Teorema 2.26. *Barisan $\{x_n\}$ konvergen jika dan hanya jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diberikan $\{x_n\}$ barisan konvergen dengan $\lim x_n = x$. Untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli K sedemikian hingga jika $n \geq K$ maka $|x_n - x| < \epsilon/2$. Jadi, jika $n, m \geq K$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - x + x - x_m| \\ &\leq |x_n - x| + |x_m - x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $\{x_n\}$ barisan Cauchy.
($\Leftarrow$) Jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy, berdasarkan Lemma 2.25, maka $\{x_n\}$ barisan terbatas. Terdapat X' subbarisan $\{x_n\}$ yang konvergen ke suatu bilangan real x'. Karena $\{x_n\}$ barisan Cauchy, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sedemikian hingga jika $n, m \geq K$ maka berlaku

$$|x_n - x_m| < \epsilon/2.$$

Karena subbarisan $X' = \{x_{n_k}\}$ konvergen ke x', terdapat bilangan asli $J \geq K$ sehingga

$$|x_J - x'| < \epsilon/2.$$

Karena $J \geq K$, dengan mengambil $m = J$ bahwa

$$|x_n - x_J| < \epsilon/2, \quad \text{untuk setiap } n \geq K.$$

Oleh karena itu, jika $n \geq K$, diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n - x'| &= |(x_n - x_J) + (x_J - x')| \\ &\leq |x_n - x_J| + |x_J - x'| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan barisan $\{x_n\}$ konvergen. □

Contoh berikut diberikan dua barisan masing-masing merupakan barisan Cauchy dan bukan barisan Cauchy.

Contoh 2.27. *(a). Diberikan barisan $\{y_n\}$ yang didefinisikan:*

$$y_n = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} + \cdots$$

Barisan $\{y_n\}$ bukan barisan monoton (periksa sebagai latihan). Jika $m > n$, karena $2^{r-1} \leq r!$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} |y_m - y_n| &= \left|\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \\ &< \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Jadi $\{y_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Berdasarkan Teorema 2.26, disimpulkan $\{y_n\}$ barisan konvergen.
Dalam hal limit barisan $\{y_n\}$, dengan menggunakan cara dalam kalkulus diperoleh $\lim y_n = 1 - 1/e$.
(b). Barisan $\{z_n\}$ yang didefinisikan

$$z_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

bukan merupakan barisan Cauchy, sebab jika $m > n$, maka

$$z_m - z_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m} > \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m}.$$

Khususnya untuk $m = 2n$, dipunyai $z_m - z_n > \frac{1}{2}$.
Dengan demikian barisan $\{z_n\}$ tidak konvergen.

2.4 Deret

Pada subbab ini dibahas deret bilangan real. Diawali dari pengertian deret tak hingga.

Definisi 2.28. *Diberikan* $\{x_n\}$ *barisan bilangan real.* **Deret tak hingga**, *atau cukup ditulis* **deret** *dari barisan* $\{x_n\}$, *adalah barisan* $\{s_n\}$ *yang didefinisikan sebagai*

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_1 + x_2 \\ s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ &\dots \\ s_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k. \end{aligned}$$

Bilangan x_n *disebut suku-suku deret dan* s_k *disebut* **jumlah parsial** *deret tersebut. Jika limit* s_n *ada maka deret dikatakan konvergen ke limit tersebut.*

Teorema 2.29. *Jika deret* $\sum x_n$ *konvergen, maka* $\lim x_n = 0$.

Bukti. Karena barisan $\{s_n\}$ konvergen dengan $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_n$, maka $\lim s_n$ ada. Karena $x_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, maka

$$\lim x_{n+1} = \lim s_{n+1} - \lim s_n = 0.$$

Jadi $\lim x_n = 0$. □

Teorema 2.30. *Diberikan* $\{x_n\}$ *barisan bilangan real nonnegatif. Deret* $\sum x_n$ *konvergen jika dan hanya jika jumlah parsial* s_k *terbatas.*

Bukti. Karena $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka barisan jumlah parisal $\{s_n\}$ naik monoton. Berdasarkan Teorema 2.21, maka $\{s_k\}$ terbatas. □

Dua contoh berikut masing-masing contoh barisan konvergen dan barisan tidak konvergen.

Contoh 2.31. *Deret* $\sum \frac{1}{n!}$ *konvergen.*

Cukup jelas bahwa $1/n! \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dibentuk barisan $\{s_n\}$ dengan $s_n = 1/1! + 1/2! + \cdots 1/n!$. Jadi barisan jumlah parsial $\{s_n\}$ naik monoton. Selanjutnya akan ditunjukkan barisan $\sum \frac{1}{n!}$ terbatas.
Dari contoh sebelumnya, diperoleh

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e.$$

Berdasarkan Teorema 2.30, disimpulkan deret $\sum \frac{1}{n!}$ konvergen.
Dalam Teorema 2.29 tidak berlaku sebaliknya, yakni tidak benar bahwa jika $\lim x_n = 0$, maka deret $\sum x_n$ konvergen. Untuk hal itu, diberikan contoh berikut.

Contoh 2.32. *Deret $\sum \frac{1}{n}$ tidak konvergen.*

Cukup jelas bahwa $\lim 1/n = 0$.
Dibentuk barisan $\{s_n\}$ dengan $s_n = 1/1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{\text{sebanyak } n} \\ &= 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Jadi $\{s_n\}$ tak terbatas. Berdasarkan Teorema 2.12, maka deret $\sum \frac{1}{n}$ tidak konvergen.

Teorema 2.33. *Diberikan barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ yang bersifat untuk suatu $K \in \mathbb{N}$ berlaku*

$$0 \le x_n \le y_n, \qquad \text{untuk setiap } \; n \ge K.$$

(a). Jika $\sum y_n$ konvergen, maka $\sum x_n$ konvergen.
(b). $\sum x_n$ divergen, maka $\sum y_n$ divergen.

Bukti sebagai latihan.

Teorema 2.34. *Diberikan barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ dengan $x_n > 0$ dan $y_n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Anggap bahwa*

$$\lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = r \in \mathbb{R}.$$

(i). Jika $r \neq 0$ maka deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika deret $\sum y_n$ konvergen.

(ii). Jika $r = 0$ dan deret $\sum y_n$ konvergen, maka deret $\sum x_n$ konvergen.

Bukti. (i). Diberikan $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = r$. Terdapat bilangan asli K sedemikian hingga $r/2 \le x_n/y_n \le 2r$ untuk setiap $n \ge K$, oleh karenanya

$$(r/2)y_n \le x_n \le (2r)y_n, \qquad \text{untuk setiap } n \ge K.$$

Dengan menerapkan Teorema 2.33, diperoleh hasil yang diinginkan.
(ii). Jika $r = 0$ maka terdapat bilangan asli N sehingga

$$0 < x_n \le y_n, \qquad \text{untuk setiap } n \ge N.$$

Dengan menerapkan Teorema 2.33, diperoleh hasil yang diinginkan. □

2.5 Rangkuman

1. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan **konvergen** ke $x \in \mathbb{R}$, jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli K yang tergantung dari ϵ sedemikian hingga untuk setiap $n \ge K$ berlaku $|x_n - x| < \epsilon$.

2. Diberikan $\{x_m\}$ barisan bilangan real dan $x \in \mathbb{R}$. Jika $\{a_n\}$ barisan bilangan real positif dengan $\lim a_n = 0$ dan jika untuk suatu konstanta $C > 0$ dan suatu bilangan $m \in \mathbb{N}$ dipunyai

$$|x_n - x| \le Ca_n \qquad \text{untuk setiap } n \ge m,$$

   maka $\lim x_n = x$.

3. Setiap barisan konvergen adalah terbatas.

4. Diberikan bilangan $c \in \mathbb{R}$ dan diberikan barisan bilangan real $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$. Jika $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ keduanya konvergen berturut-turut ke x dan y, maka barisan:

   (i). $\{cx_n\}$ konvergen ke cx;

   (ii). $\{x_n + y_n\}$ konvergen ke $x + y$;

   (iii). $\{x_n \cdot y_n\}$ konvergen ke $x \cdot y$;

   (iv). $\{x_n/y_n\}$ konvergen ke x/y asalkan $y_n \ne 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $y \ne 0$.

5. Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x, maka barisan $\{|x_n|\}$ konvergen ke $|x|$.

6. Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x dengan $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka barisan $\{\sqrt{x_n}\}$ konvergen ke $\sqrt{x}$.

7. Jika $\{x_n\}$ barisan konvergen dan $a \leq x_n \leq b$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $a \leq \lim x_n \leq b$.

8. Diberikan barisan bilangan real positif $\{x_n\}$ sedemikian hingga
$$\lim(x_{n+1}/x_n) = L.$$
Jika $L < 1$, maka barisan $\{x_n\}$ konvergen dan $\lim x_n = 0$.

9. Barisan monoton merupakan barisan konvergen jika dan hanya jika terbatas.

10. Barisan $\{x_n\}$ konvergen jika dan hanya jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy.

2.6 Bahan Diskusi

Diskusikan permasalahan berikut bersama teman-temanmu: jika $\{x_n\}$ barisan konvergen dan $\{y_n\}$ barisan divergen, bagaimana dengan barisan $\{x_n + y_n\}$ dan barisan $\{x_n y_n\}$.

2.7 Soal-soal Latihan

1. Diberikan $a \in \mathbb{R}$. Buktikan barisan $\{a/n\}$ konvergen ke 0.

2. Gunakan definisi limit barisan untuk membuktikan
$$\lim \frac{n}{n^2+1} = 0.$$

3. Buktikan bahwa
$$\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

4. Tunjukkan bahwa
$$\lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 0.$$

5. Tunjukkan bahwa
$$\lim(\sqrt{n^2+1}-n)=0.$$

6. Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dengan $0 < a < 1$. Tunjukkan bahwa barisan $\{na^n\}$ konvergen ke 0.

7. Tunjukkan bahwa $\lim(1/3^n) = 0$.

8. Tunjukkan bahwa $\lim(n^2/n!) = 0$.

9. Diketahui $\lim x_n = x > 0$. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan asli K sedemikian hingga jika $n \geq K$, maka $x/2 < x_n < 2x$.

10. Berikan contoh barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ keduanya divergen sedemikian hingga barisan $\{x_n + y_n\}$ konvergen.

11. Tunjukkan bahwa barisan $\{2^n\}$ tidak konvergen.

12. Tentukan limit barisan $\left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right)$.

13. Jika barisan $\{y_n\}$ terbatas dan $\lim x_n = 0$, tunjukkan bahwa $\lim x_n y_n = 0$.

14. Diberikan barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa barisan $\{\sqrt{n}x_n\}$ konvergen dan tentukan limitnya.

15. Jika $0 < a < b$, tentukan
$$\lim\left(\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\right)$$

16. Tunjukkan, jika $y_n = (a^n + b^n)^{1/n}$ dengan $0 < a < b$, maka $\lim y_n = b$.

17. (a). Berikan sebuah contoh barisan bilangan positif $\{x_n\}$ yang konvergen dengan $\lim x_n^{1/n} = 1$.

    (b). Berikan sebuah contoh barisan bilangan positif $\{y_n\}$ yang divergen dengan $\lim y_n^{1/n} = 1$.

18. Periksa kekonvergenan barisan
$$\{(1+1/n^2)^{n^2}\}.$$
Jika konvergen, tentukan limitnya.

19. Tentukan limit barisan
$$\{(1 + 1/2n)^{3n}$$
.

20. Diberikan barisan $\{x_n\}$ yang setiap subbarisannya konvergen ke 0. Tunjukkan bahwa $\lim x_n = 0$.

21. Tunjukkan jika $\{x_n\}$ tak terbatas, maka terdapat $\{x_{n_k}\}$ subbarisan dari $\{x_n\}$ sedemikian hingga $\lim \frac{1}{x_{n_k}} = 0$.

22. Tunjukkan secara langsung dengan menggunakan definisi bahwa barisan
$$\left\{1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right\}$$
merupakan barisan Cauchy.

2.8 Bahan Bacaan dan Rujukan Lebih Lanjut

1. Bartle, R.G. dan D.R. Sherbert, 2011, *Introduction to Real Analysis*, edisi keempat, New York: John Wiley & Sons, Inc.

2. Larson, L., 2015, *Introduction to Real Analysis*, University of Louisville

3. Trench, W.F., 2013, *Introduction to Real Analysis*, USA:Pearson Education

Bab 3

Limit Fungsi

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. dapat memeriksa apakah suatu fungsi mempunyai limit di suatu titik atau tidak;
2. mencari limit fungsi di suatu titik dengan menggunakan definisi limit;
3. mengetahui sifat-sifat limit fungsi;
4. menentukan limit kiri dan limit kanan fungsi di suatu titik;
5. menentukan limit tak hingga fungsi.

3.1 Limit Fungsi

Sebelum membicarakan limit fungsi, terlebih dahulu dikenalkan pengertian titik limit atau titik kumpul dan diberikan satu teorema berkenaan dengan titik kumpul.

Definisi 3.1. *Diberikan* $A \subseteq \mathbb{R}$*. Titik* $c \in \mathbb{R}$ *merupakan* **titik limit** *himpunan* A *jika untuk setiap* $\delta > 0$ *terdapat* $x \in A$ *dengan* $x \neq c$ *sedemikian hingga* $|x - c| < \delta$*.*

Teorema 3.2. *Titik* $c \in \mathbb{R}$ *merupakan titik limit himpunan* $A \subseteq \mathbb{R}$ *jika dan hanya jika terdapat barisan* $\{x_n\}$ *di* A *sedemikian hingga* $\lim x_n = c$ *dan* $x_n \neq c$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$*.*

Bukti. Jika c titik limit A, maka untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ persekitaran $V_{1/n}(c)$ memuat sedikitnya satu titik x_n di A yang berbeda dengan c. Karena $x_n \in A, x_n \neq c$, dan $|x_n - c| < 1/n$ hal ini berakibat $\lim x_n = c$.
Sebaliknya, jika terdapat barisan x_n di $A \backslash \{c\}$ dengan $\lim x_n = c$, maka untuk sebarang $\delta > 0$ terdapat bilangan asli K sedemikian hingga jika $n \geq K$, maka $x_n \in V_\delta(c)$. Oleh karena itu $V_\delta(c)$ memuat titik-titik x_n untuk $n \geq K$ yang berada di A dan berbeda dengan c. □

Selanjutnya diberikan pengertian limit fungsi di suatu titik, beberapa teorema terkait limit fungsi di suatu titik, dan beberapa contoh nilai limit fungsi.

Definisi 3.3. *Diberikan* $A \subseteq \mathbb{R}$*,* c *titik limit himpunan* A*, dan diberikan fungsi* $f : A \to \mathbb{R}$ *. Bilangan* L *dikatakan* **limit fungsi** f **di** c *jika untuk setiap* $\epsilon > 0$ *terdapat* $\delta(\epsilon) > 0$ *sedemikian hingga jika* $x \in A$ *dan* $0 < |x - c| < \delta$*, maka* $|f(x) - L| < \epsilon$*.*

Teorema 3.4. *Jika* $f : A \to \mathbb{R}$ *dan* c *titik limit himpunan* A*, maka* f *hanya dapat mempunyai satu titik limit di* c*.*

Bukti. Anggap L_1 dan L_2 keduanya merupakan limit f di c. Untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta_1$ maka berlaku $|f(x) - L_1| < \epsilon/2$, dan terdapat $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga jika $x \in A$

dan $0 < |x - c| < \delta_2$ maka berlaku $|f(x) - L_2| < \epsilon/2$. Selanjutnya diambil $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$. Jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$, maka diperoleh

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $L_1 - L_2 = 0$, sehingga diperoleh $L_1 = L_2$. □

Teorema 3.5. *Diberikan $f : A \to \mathbb{R}$ dan c titik limit himpunan A. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

(i). $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

(ii). Untuk sebarang persekitaran $V_\epsilon(L)$, terdapat persekitaran $V_\delta(c)$ sehingga jika x adalah sebarang titik di $V_\delta(c) \cap A$ dan $x \neq c$, maka $f(x) \in V_\epsilon(L)$.

Bukti sebagai latihan.

Contoh 3.6. *(a).* $\lim_{x\to c} x^2 = c^2$.
Diberikan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Jika $|x - c| < 1$, maka

$$|x| < |c| + 1 \qquad \textit{sehingga} \qquad |x + c| \leq |x| + |c| < 2|c| + 1.$$

Oleh karena itu, jika $|x - c| < 1$, dipunyai

$$|x^2 - c^2| + |x + c||x - c| < (2|c| + 1)|x - c|.$$

Jika dipilih

$$\delta = \inf\left\{1, \frac{\epsilon}{2|c| + 1}\right\},$$

maka diperoleh

$$|x^2 - c^2| < (2|c| + 1)|x - c| < \epsilon.$$

(b). $\lim_{x\to c} 1/x = 1/c$ *asalkan $c > 0$.*
Diberikan $g(x) = 1/x$ untuk setiap $x > 0$ dan diberikan $c > 0$. Jika $|x - c| < 1/2c$, maka $c/2 < x < 3c/2$, sehingga berlaku

$$0 < \frac{1}{cx} < \frac{2}{c^2} \qquad \textit{untuk} \qquad |x - c| < c/2.$$

Oleh karena itu,

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right| = \left|\frac{1}{cx}(c-x)\right| = \frac{1}{cx}|x-c| < \frac{2}{c^2}|x-c|.$$

Jika dipilih

$$\delta = \inf\left\{c/2, \frac{1}{2}c^2\epsilon\right\}$$

sehingga diperoleh

$$|1/x - 1/c| < \epsilon.$$

Teorema 3.7. *Diberikan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dan c titik limit himpunan A. Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

(i). $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

(ii). Untuk setiap barisan $\{x_n\}$ di A yang konvergen ke c sedemikian hingga $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, barisan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke L.

Bukti. (i) $\Rightarrow$ (ii). Misalkan f mempunyai limit L di titik c, dan misalkan $\{x_n\}$ barisan di A dengan $\lim x_n = c$ dan $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa barisan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke L. Diberikan $\epsilon > 0$ sebarang. Terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $x \in A$ yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta$, maka $f(x)$ memenuhi $|f(x) - L| < \epsilon$. Dengan menerapakn definisi barisan konvergen untuk setiap $\delta > 0$ yang diberikan diperoleh bilangan asli K sedemikian hingga jika $n \geq K$, maka berlaku $|x_n - c| < \delta$. Akan tetapi untuk setiap x_n dipunyai $|f(x_n) - L| < \epsilon$. Jadi, jika $n \geq K$ maka $|f(x_n) - L| < \epsilon$. Oleh karena itu barisan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke L.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Andaikan pernyataan (i) tidak benar, maka terdapat persekitaran V_{ϵ_0} sedemikian hingga terdapat sedikitnya satu bilangan x_δ di $A \cap V_\delta(c)$ dengan $x_\delta \neq c$ sedemikian sehingga $f(x_\delta) \notin V_{\epsilon_0}(L)$. Oleh karena itu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, persekitaran $V_{1/n}(c)$ memuat sebuah bilangan x_n sedemikian hingga

$$0 < |x_n - c| < 1/n \qquad \text{dan} \qquad x_n \in A,$$

akan tetapi

$$|f(x_n) - L| \geq \epsilon_0 \qquad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Hal ini berarti barisan $\{x_n\}$ di $A \backslash \{c\}$ konvergen ke c tetapi barisan $\{f(x_n)\}$ tidak konvergen ke L. Ini menunjukkan bahwa (i) tidak benar, jadi pernyataan (ii) tidak benar. Dengan demikian disimpulkan bahwa (ii) berakibat (i). $\square$

Teorema 3.8. Kriteria Divergen *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, dan diberikan $c \in \mathbb{R}$ titik limit himpunan A.*

(i). Diberikan bilangan $L \in \mathbb{R}$. Fungsi f tidak dapat mempunyai limit di titik c jika dan hanya jika terdapat barisan $\{x_n\}$ di A dengan $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga barisan $\{x_n\}$ konvergen ke c tetapi barisan $\{f(x_n)\}$ tidak konvergen ke L.

(ii). Fungsi f tidak memiliki limit di c jika dan hanya jika terdapat barisan $\{x_n\}$ di A dengan $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga barisan $\{x_n\}$ konvergen ke c tetapi barisan $\{f(x_n)\}$ tidak konvergen di $\mathbb{R}$.

Contoh 3.9. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ *tidak ada di $\mathbb{R}$.*

Jika diambil barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n > 0$ untuk setiap n yang konvergen ke 0, maka barisan $\{1/x_n\}$ tidak terbatas dan akibatnya tidak konvergen.

Definisi 3.10. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, dan diberikan $c \in \mathbb{R}$ titik limit himpunan A. Fungsi f dikatakan* **terbatas pada persekitaran di titik** *c jika terdapat persekitaran $V_\delta(c)$ dan terdapat konstanta $M > 0$ sedemikian hingga berlaku $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A \cap V_\delta(c)$.*

Teorema 3.11. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : a \to \mathbb{R}$. Jika f mempunyai limit di titik c, maka f terbatas pada suatu persekitaran titik c.*

Bukti. Jika $L = \lim_{x\to c} f(x)$, maka untuk $\epsilon = 1$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta$, maka berlaku $|f(x) - L| < 1$. Oleh karena itu

$$|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < 1.$$

Oleh karena itu, jika $x \in A \cap V_\delta(c)$, untuk $x \neq c$, maka $|f(x)| \leq |L|+1$. Jika $c \notin A$, diambil $M = |L|+1$, sedangkan jika $c \in A$ diambil $M = \sup\{|f(c)|, |L|+1\}$. Dengan demikian, jika $x \in A \cap V_\delta(c)$, maka $|f(x)| \leq M$. Hal ini menunjukkan bahwa f terbatas pada persekitaran $V_\delta(c)$. □

Teorema 3.12. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f, g : A \to \mathbb{R}$, c titik limit himpunan A, dan diberikan $b \in \mathbb{R}$.*

(i). *Jika* $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$ *dan* $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$, *maka*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2,\\
&\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = L_1 - L_2,\\
&\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2,\\
&\lim_{x\to c}(bf(x)) = bL_1.
\end{aligned}$$

(ii). *Jika* $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$, $h : A \to \mathbb{R}, h(x) \neq 0$ *untuk setiap* $x \in A$, *dan* $\lim_{x\to c} h(x) = L_2 \neq 0$, *maka*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Bukti sebagai latihan.

Dari Teorema 3.12, diperoleh akibat berikut.

Akibat 3.13. *Diberikan* $A \subseteq \mathbb{R}$ *dan fungsi* $f_i : A \to \mathbb{R}$ *dengan* $i = 1, 2, \cdots, n$, *dan* c *titik limit himpunan* A. *Jika* $lim_{x\to c} f_i(x) = L_i, i = 1, 2, \cdots, n$, *maka*

(i). $\lim_{x\to c} \big(f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\big) = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$.

(ii). $\lim_{x\to c} \big(f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)\big) = L_1 L_2 \cdots L_n$.

Bukti. Bukti dapat menggunakan induksi matematika. □

Teorema 3.14. *Diberikan* $A \subseteq \mathbb{R}$ *dan* $c \in \mathbb{R}$ *titik limit himpunan* A. *Jika*

$$a \leq f(x) \leq b, \qquad \textit{untuk setiap } x \in A, x \neq c,$$

dan jika $\lim_{x\to c} f(x)$ *ada, maka* $a \leq \lim_{x\to c} f(x) \leq b$.

Bukti. Misalkan $\lim_{x\to c} f(x) = L$. Berdasarkan Teorema 3.7, untuk setiap barisan $\{x_n\}$ yang konvergen ke c, maka $\{f(x_n)\}$ konvergen ke ke L. Karena $a \leq f(x) \leq b$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berdasar Teorema 2.16, akibatnya $a \leq \lim_{x\to c} f(x) \leq b$. □

Teorema 3.15. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ dan $c \in \mathbb{R}$ titik limit himpunan A. Jika*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ untuk setiap } x \in A, x \neq c,$$

dan jika $\lim_{x\to c} f(x) = L = \lim_{x\to c} h(x)$, maka $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

Bukti. Dengan mengambil $a = b = L$ pada Teorema 3.14, diperoleh kesimpulan teorema. □

Contoh 3.16. $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Untuk $x \neq 0$, berlaku $-1 \leq \sin 1/x \leq 1$. Oleh karena itu, untuk setiap $x \neq 0$ berlaku ketaksamaan

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

Karena $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, berdasarkan Teorema 3.15, diperoleh $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

3.1.1 Limit Sepihak

Pengertian $x \to c$ mengandung arti bahwa jarak antara x dan c cukup dekat, atau dengan kata lain $|x - c|$ mendekati nol. Dalam hal ini bisa $x < c$ atau $c < x$. Ketika limit suatu fungsi dipandang pada satu sisi saja, yakni misalkan untuk $x < c$, maka ini yang dinamakan limit sepihak. Untuk itu diberikan pengertian limit sepihak berupa limit kanan atau limit kiri. Satu teorema dan satu contoh yang berkenaan denganya juga diberikan.

Definisi 3.17. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$.*

(a). Jika $c \in \mathbb{R}$ titik limit himpunan $A \cap (c, \infty) = \{x \in A : x > c\}$, bilangan $L \in \mathbb{R}$ dikatakan **limit kanan** *f* **di** *c, ditulis $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$, jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $x \in A$ dengan $0 < x - c < \delta$, maka $|f(x) - L| < \epsilon$.*

(b). Jika $c \in \mathbb{R}$ titik limit himpunan $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A : x < c\}$, bilangan $L \in \mathbb{R}$ dikatakan **limit kiri** *f* **di** *c, ditulis $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$, jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $x \in A$ dengan $0 < c - x < \delta$, maka $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Teorema 3.18. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, dan $c \in \mathbb{R}$ titik limit himpunan $A \cap (c, \infty)$. Pernyataan-pernyataan berikut ekivalen*

(i). $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$.

(ii). Untuk setiap barisan $\{x_n\}$ yang konvergen ke c sedemikian hingga $x_n \in A$ dan $x_n > c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, barisan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke L.

Contoh 3.19. *Diberikan fungsi*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x \leq 1 \\ x + 1 & , x > 1. \end{cases}$$

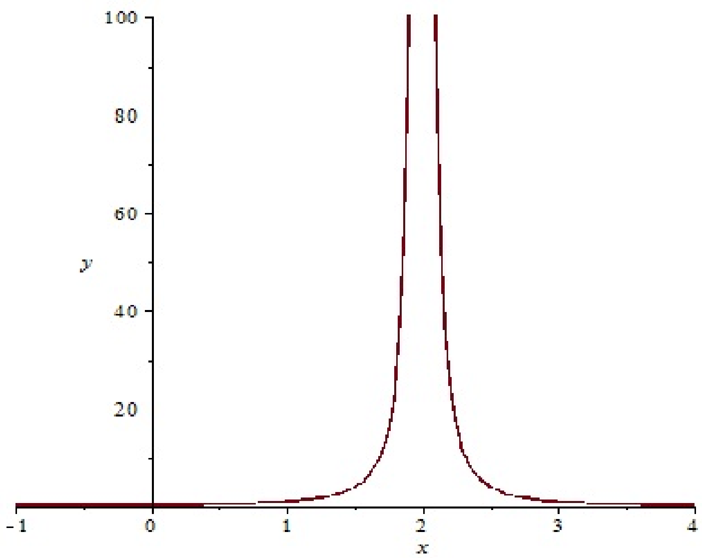
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ *dan* $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$

3.1.2 Limit Tak Hingga

Untuk memahami limit tak hingga ini, pertama diberikan ilustrasi grafik fungsi

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

yang dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1: Grafik fungsi $f(x) = 1/(x-2)^2$ di sekitar $x = 2$

Perhatikan nilai fungsi f bilamana $x \to 2$. Nilai $f(x)$ semakin membesar menuju tak hingga bilamana x mendekati 2. Untuk pengertian limit tak hingga diberikan pada definisi berikut.

Definisi 3.20. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, dan bilangan $c \in \mathbb{R}$ titik limit A.*

(i). $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ *jika untuk setiap $M \in \mathbb{R}$ terdapat $\delta > 0$ demikian sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) > M$.*

(ii). $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ *jika untuk setiap $N \in \mathbb{R}$ terdapat $\delta > 0$ demikian sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) < N$.*

Contoh 3.21. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$.

Jika diberikan $M > 0$, dipilih $\delta = 1/\sqrt{M}$. Dengan demikian, jika $0 < |x - 1| < \delta$, maka $(x - 1)^2 < 1/M^2$ sehingga $1/(x - 1)^2 > M$.

Teorema 3.22. *Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f, g : A \to \mathbb{R}$, dan $c \in \mathbb{R}$ titik limit A. Anggap bahwa $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in A, x \neq c$.*
(i). Jika $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$*, maka* $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$.
(ii). Jika $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$*, maka* $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$.

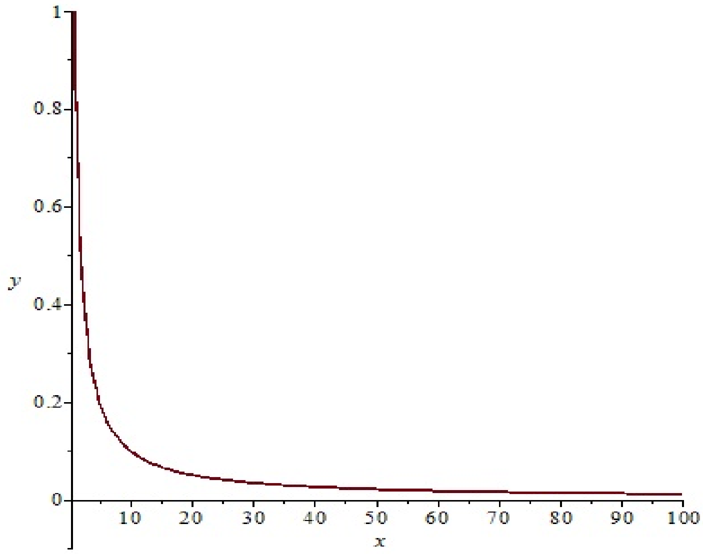
Bukti. (i). Jika $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ dan diberikan $M \in \mathbb{R}$, maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta$ dan $x \in A$, maka $f(x) > M$. Karena $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in A, x \neq c$, demikian sehingga $0 < |x - c| < \delta$ dan $x \in A$, maka $g(x) > M$. Oleh karena itu $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$.
(ii). Bukti serupa. □

3.1.3 Limit di Tak Hingga

Untuk memahami limit di tak hingga ini, pertama diberikan ilustrasi grafik fungsi

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

yang dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2: Grafik fungsi $f(x) = 1/x$ untuk $x > 0$

Perhatikan nilai fungsi f bilamana x semakin besar menuju tak hingga. Nilai $f(x)$ semakin kecil mendekati 0 bilamana $x \to \infty$. Untuk pengertian limit di tak hingga ini diberikan pada definisi berikut.

Definisi 3.23. *Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Anggap bahwa $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in \mathbb{R}$. Bilangan $L \in \mathbb{R}$ dikatakan* **limit dari** *f untuk $x \to \infty$, ditulis*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $K \in \mathbb{R}$ dengan $K > a$ demikian sehingga untuk sebarang $x > K$ maka berlaku $|f(x) - L| < \epsilon$.

Teorema 3.24. *Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Anggap bahwa $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in \mathbb{R}$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan $\{x_n\}$ di $A \cap (a, \infty)$ sedemikian hingga $\lim x_n = \infty$, barisan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke L.*

Contoh 3.25. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.
Bila diperhatikan, jika $x \geq 1$, maka $0 \leq 1/x^2 \leq 1/x$. Hal ini berakibat $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

3.2 Rangkuman

1. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, c titik limit himpunan A, dan diberikan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Bilangan L dikatakan limit fungsi f di c jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta(\epsilon) > 0$ sedemikian hingga jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \epsilon$.

2. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$.

   (a). Jika $c \in \mathbb{R}$ titik limit himpunan $A \cap (c, \infty) = \{x \in A : x > c\}$, bilangan $L \in \mathbb{R}$ dikatakan limit kanan f di c, ditulis $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$, jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $x \in A$ dengan $0 < x - c < \delta$, maka $|f(x) - L| < \epsilon$.

   (b). Jika $c \in \mathbb{R}$ titik limit himpunan $A \cap (-\infty, c) = \{x \in A : x < c\}$, bilangan $L \in \mathbb{R}$ dikatakan limit kiri f di c, ditulis $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$, jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $x \in A$ dengan $0 < c - x < \delta$, maka $|f(x) - L| < \epsilon$.

3. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, dan bilangan $c \in \mathbb{R}$ titik limit A.

   (i). $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ jika untuk setiap $M \in \mathbb{R}$ terdapat $\delta > 0$ demikian sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) > M$.

   (ii). $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ jika untuk setiap $N \in \mathbb{R}$ terdapat $\delta > 0$ demikian sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) < N$.

4. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, dan bilangan $c \in \mathbb{R}$ titik limit A.

   (i). $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ jika untuk setiap $M \in \mathbb{R}$ terdapat $\delta > 0$ demikian sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) > M$.

   (ii). $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ jika untuk setiap $N \in \mathbb{R}$ terdapat $\delta > 0$ demikian sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ maka $f(x) < N$.

5. Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Anggap bahwa $(a, \infty) \subseteq A$ untuk suatu $a \in \mathbb{R}$. Bilangan $L \in \mathbb{R}$ dikatakan limit dari f untuk $x \to \infty$, ditulis
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $K \in \mathbb{R}$ dengan $K > a$ demikian sehingga untuk sebarang $x > K$ maka berlaku $|f(x) - L| < \epsilon$.

3.3 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-teman Anda untuk mendefinisikan $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ maupun $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

3.4 Soal-soal Latihan

1. Tentukan syarat untuk $|x - 1|$ yang menjamin $|x^2 - 1| < 1/3$.
2. Tentukan syarat untuk $|x - 4|$ yang menjamin $|\sqrt{x} - 2| < 1/2$.
3. Diberikan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan diberikan $c \in \mathbb{R}$. Tunjukkan $\lim_{x\to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x\to 0} f(x + c) = L$.
4. Diberikan $I = (0, a)$ dengan $a > 0$ dan diberikan $g(x) = x^2$ untuk setiap $x \in I$. Untuk sebarang $x, c \in I$, tunjukkan bahwa $|g(x) - c^2| \leq 2a|x - c|$. Gunakan ketaksamaan tersebut untuk membuktikan $\lim_{x\to c} x^2 = c^2$ untuk setiap $c \in I$.
5. Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} x^3 = c^3$.
6. Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$ untuk sebarang $c > 0$.
7. Gunakan definisi limit untuk membuktikan $\lim_{x\to 2}(x^2 + 4x) = 12$.
8. Tunjukkan bahwa limit berikut tidak ada:
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \qquad (x > 0).$$
9. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ dan diberikan $a > 0$. Jika fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan $g(x) = f(ax)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0} g(x) = L$.
10. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan $f(x) = x$ untuk x rasional dan $f(x) = 0$ untuk x irasional. Tunjukkan bahwa f mempunyai limit di $x = 0$ dan tentukan limitnya.

11. Hitunglah limit-limit berikut:

    (i). $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$, $x > 0$

    (ii). $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $x > 0$.

12. Hitunglah
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x+1}}{2x^2+x}.$$

13. Buktikan bahwa $\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$ tidak ada, tetapi $\lim_{x\to 0} x\cos(1/x) = 0$.

14. Diberikan fungsi f dan g yang terdefinisi pada $A \subseteq \mathbb{R}$ dan diberikan c titik limit himpunan A. Buktikan, jika f terbatas pada persekitaran titik c dan $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, maka $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

15. Diberikan $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq 3$. Derivasikan ketaksamaan $-x^2 \leq x^n \leq x^2$ untuk $-1 \leq x \leq 1$. Gunakan hasil ketaksamaan tersebut untuk menunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0} x^n = 0$.

16. Diberikan fungsi f dan g yang terdefinisi pada $A \subseteq \mathbb{R}$ dan diberikan c titik limit himpunan A. Tunjukkan bahwa jika $\lim_{x\to c} f(x)$ dan $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))$ keduanya ada, maka $\lim_{x\to c} g(x)$ ada.

17. Hitunglah limit-limit berikut jika ada atau nyatakan tidak ada:

    (i). $\lim_{x\to 0} \sin(1/x^2)$, $\quad x \neq 0$,

    (ii). $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x^2)$, $\quad x \neq 0$.

18. Diberikan fungsi f dan g yang terdefinisi pada $A \subseteq \mathbb{R}$ dan diberikan c titik limit himpunan A. Buktikan, jika $\lim_{x\to c} f(x)$ ada, maka $\lim_{x\to c} |f(x)|$ ada.

19. Misalkan f dan g mempunyai limit di $\mathbb{R}$ untuk $x \to \infty$ dan berlaku $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in (a, \infty)$. Buktikan bahwa $\lim_{x\to\infty} f(x) \leq \lim_{x\to\infty} g(x)$.

20. Jika f dan g terdefinisi pada selang (a, ∞) dan misal $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Buktikan $\lim_{x\to\infty}(f \circ g) = L$.

3.5 Bahan Bacaan dan Rujukan Lebih Lanjut

1. Bartle, R.G. dan D.R. Sherbert, 2011, *Introduction to Real Analysis*, edisi keempat, New York: John Wiley & Sons, Inc.

2. Larson, L., 2015, *Introduction to Real Analysis*, University of Louisville

3. Trench, W.F., 2013, *Introduction to Real Analysis*, USA:Pearson Education

Bab 4

Fungsi Kontinu

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. dapat memeriksa apakah suatu fungsi kontinu atau diskontinu di suatu titik;
2. dapat memeriksa apakah suatu fungsi kontinu kiri, kontinu kanan, atau tidak kontinu kiri maupun kontinu kanan di suatu titik;
3. mengetahui sifat-sifat fungsi kontinu;
4. dapat memeriksa apakah suatu fungsi kontinu seragam atau tidak pada suatu selang;
5. dapat mengetahui hubungan fungsi kontinu dan kontinu seragam pada suatu selang.

4.1 Fungsi Kontinu

Pada subbab ini akan dibicarakan pengertian fungsi kontinu di suatu titik, teorema dan contoh fungsi kontinu di suatu titik, dan pengertian fungsi kontinu pada suatu himpunan di dalam $\mathbb{R}$. Untuk memulai subbab ini diawali dengan pengertian fungsi kontinu di suatu titik.

Definisi 4.1. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, dan $c \in A$. Fungsi f dikatakan* **kontinu di** *c jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika x sebarang titik di A yang memenuhi $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \epsilon$. Jika tidak demikian maka dikatakan f* **tidak kontinu (diskontinu) di** *c.*

Berbeda dengan pengertian limit fungsi di titik c dimana fungsinya tidak harus terdefinisi di c, namun pada pengertian fungsi kontinu di titik c fungsinya harus terdefinisi di titik c. Berikut diberikan satu teorema berkenaan dengan fungsi kontinu di suatu titik.

Teorema 4.2. *Fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ kontinu di $c \in A$ jika dan hanya jika untuk setiap persekitaran $V_\epsilon(f(c))$ terdapat persekitaran $V_\delta(c)$ sedemikian hingga jika x sebarang titik di $A \cap V_\delta(c)$, maka $f(x)$ berada di $V_\delta(c)$, yakni $f(A \cap V_\delta(c)) \subseteq V_\epsilon(f(c))$.*
Berikutnya merupakan definisi dari fungsi kontinu pada suatu himpunan.

Definisi 4.3. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Jika $B \subseteq A$, fungsi f dikatakan* **kontinu pada** *B jika f kontinu di setiap titik di B.*

Contoh 4.4. *(a). Fungsi konstan $f(x) = k$ kontinu pada $\mathbb{R}$.*
(b). Fungsi $g(x) = 1/x$ kontinu pada selang $(0, \infty)$.

4.2 Kombinasi Fungsi-fungsi Kontinu

Teorema 4.5. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f, g : A \to \mathbb{R}$, dan $b \in \mathbb{R}$. Jika f dan g keduanya fungsi kontinu di titik $c \in A$, maka*

(i). $f + g, f - g, fg$, dan bf fungsi-fungsi kontinu di c.

(ii). Jika $h : A \to \mathbb{R}$ kontinu di $c \in A$ dan jika $h(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in A$, maka f/h kontinu di c.

Bukti. Jika c bukan titik limit himpunan A, maka kesimpulan terpenuhi dengan sendirinya. Sekarang dianggap c titik limit himpunan A.
(i). Karena f dan g keduanya kontinu di c, maka berlaku

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \qquad \text{dan} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = g(c).$$

Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.12 (i), diperoleh

$$\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = f(c) + g(c).$$

Jadi $f + g$ fungsi kontinu di c. Sisa pembuktian yang lain digunakan sebagai latihan.
(ii). Karena $c \in A$, maka $h(c) \neq 0$. Tetapi karena $\lim_{x \to c} h(x) = h(c)$, berdasarkan Teorema 3.12 (ii), diperoleh

$$\left(\frac{f}{h}\right)(c) = \frac{f(c)}{h(c)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} h(x)} = \lim_{x \to c} \left(\frac{f}{h}\right)(x).$$

Oleh karena itu f/h kontinu di c. □

Teorema 4.6. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $b \in \mathbb{R}$. Jika f dan g keduanya fungsi kontinu pada A, maka*

$$f + g, f - g, fg, \text{dan } bf$$

merupakan fungsi-fungsi kontinu pada A.

Bukti sebagai latihan.

Teorema 4.7. *Diberikan $S \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f : S \to \mathbb{R}$, dan fungsi $|f|$ yang didefinisikan $|f|(x) = |f(x)|$ untuk setiap $x \in S$. Jika f kontinu pada S, maka $|f|$ kontinu pada S.*

Bukti. Perhatikan bahwa $\big||f(x)| - |f(c)|\big| \leq |f(x) - f(c)|$. □

Teorema 4.8. *Diberikan $S \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f : S \to \mathbb{R}$, dan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in S$ dan diberikan fungsi $\sqrt{f}$ pada S yang didefinisikan $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$ untuk setiap $x \in S$. Jika f kontinu pada S, maka $\sqrt{f}$ kontinu pada S.*

Bukti. Diambil $c \in S$ sebarang.
Jika $f(c) = 0$, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ dipilih $\delta > 0$ sehingga jika $|x - c| < \delta$ maka berlaku $|f(x)| < \epsilon^2$. Jadi diperoleh

$$\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(c)}\right| = \left|\sqrt{f(x)} - 0\right| = \sqrt{f(x)} = |f(x)|^{1/2} < \epsilon.$$

Perhatikan bahwa untuk $f(c) > 0$ berlaku

$$\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(c)}\right| = \left|\frac{f(x) - f(c)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(c)}}\right| \leq \frac{|f(x) - f(c)|}{\sqrt{f(c)}}.$$

Bukti selesai. □

Teorema 4.9. *Diberikan $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ fungsi konntinu pada A, dan $g : B \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada B. Jika $f(A) \subseteq B$ maka fungsi komposisi $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ kontinu pada A.*

Bukti sebagai latihan.

Contoh 4.10. *Diberikan $g(x) = \sin x$ dan $f(x) = 3x^2 - 3$. Karena $g(x) = \sin x$ kontinu pada $\mathbb{R}$ dan $f(x) = 3x^2 - 3$ juga kontinu pada $\mathbb{R}$, maka fungsi komposisi $(g \circ f)(x) = \sin(3x^2 - 3)$ kontinu pada $\mathbb{R}$.*

4.3 Fungsi Kontinu pada Selang

Sebelum membicarakan lebih jauh fungsi kontinu pada selang, terlebih dahulu diperkenalkan pengertian fungsi terbatas pada domainnya.

Definisi 4.11. *Fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dikatakan* **terbatas pada** *A jika terdapat konstanta $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A$.*

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap fungsi kontinu yang terdefinisi pada selang tertutup dan terbatas merupakan fungsi terbatas.

Teorema 4.12. Teorema Keterbatasan *Diberikan $I = [a, b]$ selang tertutup dan terbatas. Jika $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada I, maka f terbatas pada I.*

Bukti. Andaikan f tidak terbatas pada I. Terdapat bilangan $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $|f(x_n)| > n$. Karena I terbatas, maka barisan $\{x_n\}$ terbatas. Oleh karena itu, terdapat subbarisan dari $\{x_n\}$, katakan X', yang konvergen ke x. Karena I tertutup dan elemen-elemen X' berada pada I, maka $x \in I$. Jadi f kontinu di c sehingga $\{f(x_n)\}$ konvergen ke $f(x)$. Berdasarkan Teorema 2.12, maka barisan $\{f(x_n)\}$ terbatas. Hal ini kontradiksi dengan

$$|f(x_{n_r})| > n_r \geq r \text{ untuk } r \in \mathbb{R}.$$

Jadi haruslah f terbatas pada I. □

Definisi 4.13. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan* **mempunyai maksimum mutlak** *pada A jika terdapat $c' \in A$ sedemikian hingga*

$$f(c') \geq f(x) \qquad \textit{untuk setiap } x \in A.$$

Fungsi f dikatakan **mempunyai minimum mutlak** *pada A jika terdapat $c" \in A$ sedemikian hingga*

$$f(c") \leq f(x) \qquad \textit{untuk setiap } x \in A.$$

Teorema 4.14. Teorema Maksimum-Minimum *Diberikan $I = [a, b]$ selang tertutup dan terbatas. Jika $f : I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I, maka f mencapai maksimum mutlak dan minimum mutlak pada I.*

Bukti. Jika I tertutup dan terbatas, berdasarkan Teorema 4.12, maka $f(I)$ terbatas. Diberikan $c' = \sup(f(I))$ dan $c" = \inf(f(I))$. Klaim terdapat titik x' dan $x"$ sedemikian hingga $x' = f(c')$ dan $x" = f(c")$.
Karena $x' = \sup(f(I))$, maka $c' - 1/n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ bukan batas atas himpunan $f(I)$. Akibatnya terdapat bilangan $x_n \in I$ sedemikian hingga

$$c' - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq c', \qquad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Karena I terbatas maka barisan $\{x_n\}$ terbatas. Terdapat subbarisan $X' = \{x_{n_r}\}$ dari barisan $\{x_n\}$ yang konvergen ke suatu bilangan x'. Karena elemen-elemen X' berada di I, akibatnya $x' \in I$. Oleh karena itu f kontinu di titik x' sedemikian hingga $\lim f(x_{n_r}) = f(x')$. Hal ini menghasilkan

$$c' - \frac{1}{n_r} < f(x_{n_r}) \leq c', \qquad \text{untuk setiap } r \in \mathbb{N}.$$

Dengan menggunakan Teorema 3.15, diperoleh $\lim f(x_{n_r}) = c'$. Oleh karena itu

$$f(x') = c' = \sup f(I).$$

Bukti f mencapai minimum mutlak pada I digunakan sebagai latihan. □

4.4 Kontinu Seragam

Untuk mengawali pembahasan subbab kali ini, diawali dengan pengertian kontinu seragam.

Definisi 4.15. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan* **kontinu seragam** *pada A jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $x, y \in A$ yang memenuhi $|x-y| < \delta$, maka $|f(x)-f(y)| < \epsilon$.*

Berdasarkan definisi kontinu seragam, maka setiap fungsi kontinu seragam pada suatu selang juga merupakan fungsi kontinu, namun belum tentu berlaku sebaliknya. Sebagai contoh, fungsi $f(x) = 1/x$ pada selang $(0, 1)$ merupakan fungsi kontinu namun tidak kontinu seragam.

Teorema 4.16. *Jika $f : I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I selang tutup dan terbatas, maka f kontinu seragam pada I.*

Bukti. Jika f tidak kontinu seragam pada I, maka terdapat $\epsilon_0 > 0$ dan terdapat dua barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ di I sedemikian hingga $|x_n - y_n| < 1/n$ tetapi $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena I terbatas, terdapat subbarisan $\{x_{n_k}\}$ yang konvergen ke sebuah titik z. Karena I tertutup, maka $z \in I$. Cukup jelaslah bahwa subbarisan $\{y_{n_k}\}$ juga konvergen ke z karena $|y_{n_k} - z| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - z|$.
Selanjutnya, jika f kontinu di z, maka barisan $\{f(x_{n_k})\}$ dan $\{f(y_{n_k})\}$ keduanya juga konvergen ke $f(z)$. Namun hal ini tidak mungkin karena $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \epsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jadi hipotesis f tidak kontinu seragam pada selang tertutup dan terbatas I berakibat bahwa f tidak kontinu di suatu titik $z \in I$. Akibatnya, jika f kontinu di setiap titik pada I, maka f kontinu seragam pada I. □

Definisi 4.17. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan diberikan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Jika terdapat konstanta $K > 0$ sedemikian hingga*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

untuk setiap $x, y \in A$, maka f dikatakan **fungsi Lipschitz** *pada A.*

Teorema 4.18. *Jika $f : A \to \mathbb{R}$ fungsi Lipschitz, maka f kontinu seragam pada A.*

Bukti. Jika terdapat konstanta $K > 0$ sedemikian hingga

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

untuk setiap $x, y \in A$, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ yang diberikan, dipilih $\delta = \epsilon/K$. Jika $x, y \in A$ memenuhi kondisi $|x - y| < \delta$, maka

$$|f(x) - f(y)| < K\frac{\epsilon}{K} = \epsilon.$$

Oleh karena itu, f kontinu seragam pada A. □

Contoh 4.19. *Jika $f(x) = x^3$ pada selang $[0, b]$ dengan $b > 0$, maka*

$$|f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3| = |x^2 + xy + y^2||x - y| \leq 3b^2|x - y|$$

untuk setiap $x, y \in [0, b]$. Jadi f memenuhi kondisi Lipschitz dengan $K = 3b^2$ pada selang $[0, b]$. Sebaliknya, karena f kontinu dan $[0, b]$ selang tertutup dan terbatas, ini dapat juga dideduksi dari Teorema 4.16.

Teorema 4.20. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$. Jika $f : A \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu dan $\{x_n\}$ barisan Cauchy di A, maka $\{f(x_n)\}$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}$.*

Bukti. Diberikan $\{x_n\}$ barisan Cauchy di A dan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang. Pilih $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $x, y \in A$ memenuhi $|x - y| < \delta$, maka $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Karena $\{x_n\}$ barisan Cauchy, terdapat bilangan asli K sedemikian hingga $|x_n - x_m| < \delta$ untuk setiap $n, m \geq K$. Dari pemilihan δ, berakibat untuk setiap $n, m \geq K$, dipunyai $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$. Oleh karena itu disimpulkan $\{f(x_n)\}$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. □

Teorema 4.21. *Fungsi f kontinu seragam pada selang buka (a, b) jika dan hanya jika f dapat diperluas pada selang tertutup dan terbatas $[a, b]$ sedemikian hingga f kontinu pada $[a, b]$.*

Definisi 4.22. *Fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan* **fungsi tangga** *pada $[a, b]$ jika terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $f([a, b]) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ dan sub-subselang $I_1, I_2, \cdots, I_n$ tidak saling tumpang-tindih sedemikian hingga $\cup_{i=1}^{n} I_i = [a, b]$ dan $f(x) = a_i$ untuk setiap $x \in I_i, i = 1, 2, \cdots, n$.*

Sebagai contoh, fungsi $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , -2 \leq x < 0 \\ -1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 1/2 & , 1 < x < 2 \\ \sqrt{5} & , 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

merupakan fungsi tangga pada $[-2, 3]$.

Teorema 4.23. *Diberikan I selang tertutup dan terbatas dan $f : I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I. Jika untuk sebarang $\epsilon > 0$ maka terdapat fungsi tangga $g : I \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ untuk setiap $x \in I$.*

Bukti. Karena f kontinu pada selang tutup dan terbatas I, maka f kontinu seragam pada I. Dengan demikian untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $x, y \in I$ dengan $|x - y| < \delta$ maka berlaku $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Misalkan $I = [a, b]$ dan $m \in \mathbb{N}$ cukup besar sedemikian hingga $h = (b - a)/m < \delta$. Selanjutnya bagi $I = [a, b]$ ke dalam sub-subselang yang saling-asing dengan panjang h, namakan $I_1, I_2, \cdots, I_m$. Karena panjang setiap subselang I_i adalah $h < \delta$, maka $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ untuk setiap $x, y \in I_i, i = 1, 2, \cdots, m$. Selanjutnya, definisikan

$$g(x) = f(a + kh), \qquad \text{untuk } x \in I_k, k = 1, 2, \cdots, m,$$

sedemikian hingga $g(x)$ konstan di setiap selang I_i. Akibatnya, jika $x \in I_k$, maka

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(a + kh)| < \epsilon.$$

Oleh karena itu, diperoleh $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ untuk setiap $x \in I$. □

4.5 Rangkuman

1. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f, g : A \to \mathbb{R}$, dan $b \in \mathbb{R}$. Jika f dan g keduanya fungsi kontinu di titik $c \in A$, maka

   (i). $f + g, f - g, fg$, dan bf fungsi-fungsi kontinu di c.

   (ii). Jika $h : A \to \mathbb{R}$ kontinu di $c \in A$ dan jika $h(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in A$, maka f/h kontinu di c.

2. Diberikan $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ fungsi konntinu pada A, dan $g : B \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada B. Jika $f(A) \subseteq B$ maka fungsi komposisi $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ kontinu pada A.

3. Fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dikatakan terbatas pada A jika terdapat konstanta $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A$.

4. Diberikan $I = [a, b]$ selang tertutup dan terbatas. Jika $f : I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I, maka f mencapai maksimum mutlak dan minimum mutlak pada I.

5. Jika $f : I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I selang tutup dan terbatas, maka f kontinu seragam pada I.

6. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$. Jika $f : A \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu dan $\{x_n\}$ barisan Cauchy di A, maka $\{f(x_n)\}$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}$.

7. Fungsi f kontinu seragam pada selang buka (a, b) jika dan hanya jika f dapat diperluas pada selang tertutup dan terbatas $[a, b]$ sedemikian hingga f kontinu pada $[a, b]$.

4.6 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu!
Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan **fungsi periodik** jika terdapat bilangan $p > 0$ sedemikian hingga $f(x+p) = f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa fungsi kontinu yang periodik pada $\mathbb{R}$ adalah terbatas dan kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

4.7 Soal-soal Latihan

1. Diberikan $a < b < c$. Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan g kontinu pada $[b, c]$, dan $f(b) = g(b)$. Didefinisikan fungsi h pada $[a, c]$ dengan $h(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$ dan $h(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in [b, c]$. Buktikan bahwa h kontinu pada $[a, c]$.

2. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan diberikan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ kontinu di titik $c \in A$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat persekitaran $V_\delta(c)$ sedemikian hingga jika $x, y \in A \cap V_\delta(c)$, maka $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

3. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu di titik c dan diberikan $f(c) > 0$. Tunjukkan bahwa terdapat persekitaran $V_\delta(c)$ sedemikian hingga jika $x \in V_\delta(c)$, maka $f(x) > 0$.

4. Tunjukkan bahwa fungsi $g(x) = |x|$ kontinu pada $\mathbb{R}$.

5. Diberikan $K > 0$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ yang memenuhi kondisi $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa f kontinu pada $\mathbb{R}$.

6. Diberikan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$ dan $f(r) = 0$ untuk setiap r bilangan rasional di $\mathbb{R}$. Buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

7. Didefinisikan fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = 2x$ untuk setiap x rasional dan $g(x) = x+3$ untuk setiap x irasional. Tentukan semua titik x dimana g kontinu.

8. Diberikan $I = [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu sedemikian hingga $f(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$. Buktikan bahwa terdapat bilangan $a > 0$ sedemikian hingga $f(x) \geq a$ untuk setiap $x \in I$.

9. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = 1/x$ kontinu seragam pada selang $[a, \infty)$ dengan $a > 0$.

10. Tunjukkan bahwa fungsi $g(x) = 1/x^2$ kontinu seragam pada $[1, \infty)$ tetapi tidak kontinu seragam pada selang $(0, \infty)$.

11. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2$ tidak kontinu seragam pada selang $[0, \infty)$.

12. Tunjukkan bahwa fungsi $g(x) = 1/(1 + x^2)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

13. Tunjukkan bahwa jika f dan g keduanya kontinu seragam pada $A \subseteq \mathbb{R}$, maka $f + g$ kontinu seragam pada A.

14. Diberikan fungsi $f(x) = x$ dan $g(x) = \sin x$. Tunjukkan bahwa fungsi f dan g keduanya kontinu seragam pada $\mathbb{R}$ tetapi fungsi fg tidak kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

15. Buktikan jika f dan g keduanya kontinu seragam pada $\mathbb{R}$, maka fungsi komposisi $f \circ g$ kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

16. Jika f kontinu seragam pada $A \subseteq \mathbb{R}$, dan $|f(x)| \geq k > 0$ untuk setiap $x \in A$, tunjukkan bahwa fungsi $1/f$ kontinu seragam pada A.

17. Buktikan bahwa jika f kontinu seragam pada himpunan terbatas $A \subseteq \mathbb{R}$, maka f terbatas pada A.

18. Tunjukkan jika f kontinu pada $[0, \infty)$ dan kontinu seragam pada $[a, \infty)$ untuk suatu konstanta $a > 0$, maka f kontinu seragam pada $[0, \infty)$.

19. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan misalkan $f : A \to \mathbb{R}$ mempunyai sifat: untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat fungsi $g_\epsilon : A \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga g_ϵ kontinu seragam pada A dan berlaku $|f(x) - g_\epsilon(x)| < \epsilon$ untuk setiap $x \in A$. Buktikan bahwa f kontinu seragam pada A.

20. Diberikan f dan g keduanya fungsi Lipschitz pada A. Tunjukkan bahwa $f + g$ merupakan fungsi Lipschitz pada A.

21. Berikan contoh sebuah fungsi Lipschitz pada $[0, \infty)$ tetapi fungsi kuadratnya bukan merupakan fungsi Lipschitz pada $[0, \infty)$.

22. Fungsi f disebut **kontinu mutlak** pada selang I jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap sub-subselang pasang demi pasang $[x_k, y_k], k = 1, 2, \cdots, n$ atas I sedemikian hingga $\sum |x_k - y_k| < \delta$ maka berlaku $\sum |f(x_k) - f(y_k)| < \epsilon$. Tunjukkan jika f memenuhi kondisi Lipschitz pada I, maka f kontinu mutlak pada I.

4.8 Bahan Bacaan dan Rujukan Lebih Lanjut

1. Bartle, R.G. dan D.R. Sherbert, 2011, *Introduction to Real Analysis*, edisi keempat, New York: John Wiley & Sons, Inc.

2. Larson, L., 2015, *Introduction to Real Analysis*, University of Louisville

3. Trench, W.F., 2013, *Introduction to Real Analysis*, USA:Pearson Education

Bab 5

Turunan Fungsi

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. dapat memeriksa apakah suatu fungsi mempunyai turunan di suatu titik atau tidak;
2. mencari turunan fungsi di suatu titik dengan menggunakan definisi turunan;
3. mengetahui sifat-sifat turunan fungsi;
4. menentukan turunan fungsi komposisi dengan aturan rantai;
5. menentukan turunan fungsi invers.
6. membuktikan keberlakuan sifat suatu fungsi dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata;
7. memeriksa ektrim relatif dengan uji turunan pertama;
8. memeriksa keberlakuan teorema Darboux.
9. menentukan limit fungsi dengan menggunakan Aturan L'Hospital;
10. menentukan limit fungsi bentuk-bentuk tak tentu.

11. dapat mengaproksimasi nilai fungsi yang diferensiabel di suatu titik menggunakan deret Taylor dengan tingkat kesalahan tertentu;

12. memeriksa letak akar suatu fungsi dengan metode Newton;

13. menentukan kekonveksan suatu fungsi dari turunan kedua.

5.1 Turunan

Untuk membahas turunan fungsi, diawali dengan pengertian turunan fungsi di suatu titik.

Definisi 5.1. *Diberikan selang $I \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f : I \to \mathbb{R}$, dan bilangan $c \in I$. Bilangan L dikatakan* **turunan (derivatif) fungsi f di titik** *c jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $x \in I$ yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta$, maka*

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon. \tag{5.1}$$

Dalam kasus ini, dikatakan bahwa f **diferensiabel** *atau* **dapat diturunkan** *di c, ditulis $f'(c)$, dan L adalah* **nilai turunan** *f di c, ditulis $f'(c) = L$.*

Dengan kata lain, turunan fungsi f di c diberikan

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

asalkan limitnya ada.

Contoh 5.2. *Tentukan turunan fungsi $f(x) = x^2$ di $x = 2$, jika ada.*

Penyelesaian:
Karena $x \neq 2$, maka

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4,$$

sehingga diperoleh $f'(2) = 4$. □

Contoh 5.3. *Tentukan turunan fungsi $g(x) = |x|$ di $x = 0$, jika ada.*

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Karena

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$$

maka $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ tidak ada. Jadi g tidak diferensiabel di $x = 0$. □

Teorema berikut menjelaskan bahwa setiap fungsi yang diferensiabel di suatu titik maka ia kontinu di titik tersebut.

Teorema 5.4. *Jika $f : I \to \mathbb{R}$ diferensiabel di $c \in I$, maka f kontinu di c.*

Bukti. Untuk setiap $x \in I$ dan $x \neq c$, diperoleh

$$f(x) - f(c) = \Big(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\Big)(x - c).$$

Karena $f'(c)$ ada dan dengan menggunakan sifat limit, diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x) - f(c) &= \lim_{x\to c} \big(f(x) - f(c)\big) \\
&= \lim_{x\to c} \Big(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c)\Big) \\
&= \lim_{x\to c} \Big(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\Big) \cdot \lim_{x\to c}(x - c) \\
&= f'(c) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, diperoleh $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Jadi f kontinu di $x = c$. □

Berikutnya dibahas sifat-sifat turunan yang disajikan dalam beberapa teorema.

Teorema 5.5. *Diberikan selang $I \subseteq \mathbb{R}$, bilangan $c \in I$, dan fungsi $f, g : I \to \mathbb{R}$ keduanya diferensiabel di $x = c$. Pernyataan-pernyataan berikut benar:*

(i). jika $\alpha \in \mathbb{R}$, maka fungsi αf diferensiabel di c, dan

$$(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c).$$

(ii). Fungsi $f + g$ diferensiabel di c, dan

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

(iii). Fungsi fg diferensiabel di c, dan

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

(iv). Jika $g(c) \neq 0$, fungsi f/g diferensiabel di c, dan

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}.$$

Bukti. Bukti (i), (ii), dan (iv) digunakan sebagai latihan.
(iii). Diberikan $p = fg$. Oleh karena itu, jika $x \in I, x \neq c$, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{p(x)-p(c)}{x-c} &= \frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c} \\ &= \frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c} \\ &= \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot g(x) + f(c)\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c} \end{aligned}$$

Karena g kontinu di c, maka $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$. Karena f dan g keduanya diferensiabel di c, diperoleh

$$\lim_{x\to c}\frac{p(x)-p(c)}{x-c} = f'(c)g(c)+f(c)g'(c).$$

Jadi, $p = fg$ diferensiabel di c dan berlaku $(fg)'(c) = f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$. □

Akibat 5.6. *Jika $f_1, f_2, \cdots, f_n$ fungsi-fungsi yang terdefinisi pada I dan diferensiabel di $c \in I$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka*

(i). fungsi $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ diferensiabel di c dan

$$(f_1+f_2+\cdots+f_n)'(c) = f_1'(c)+f_2'(c)+\cdots+f_n'(c).$$

(ii). fungsi $f_1f_2\cdots f_n$ diferensiabel di c dan

$$\begin{aligned} (f_1f_2\cdots f_n)'(c) &= f_1'(c)f_2(c)\cdots f_n(c)+f_1(c)f_2'(c)\cdots f_n(c) \\ &\quad +\cdots+f_1(c)f_2(c)\cdots f_n'(c). \end{aligned}$$

Bukti. Bukti dapat menggunakan induksi matematika (sebagai latihan). □

5.2 Aturan Rantai

Mengawali subbab ini dengan satu teorema yang diberi nama Teorema Carathéodory.

Teorema 5.7. Teorema Carathéodory *Diberikan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$, dan bilangan $c \in I$. Fungsi f diferensiabel di c jika dan hanya jika terdapat fungsi ϕ pada I yang kontinu di c dan memenuhi*

$$f(x)-f(c) = \phi(x)(x-c), \qquad \textit{untuk} \qquad x \in I. \tag{5.2}$$

Dalam kasus ini, $\phi(c) = f'(c)$.

Bukti. ($\Rightarrow$) Jika $f'(c)$ ada, didefinisikan fungsi ϕ pada I dengan

$$\phi(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} & , x \neq c \\ f'(c) & , x = c. \end{cases}$$

Karena $\lim_{x\to c} \phi(x) = f'(c)$, maka ϕ kontinu di c. Jika $x = c$ kedua ruas persamaan (5.2) sama dengan 0, sementara itu jika $x \neq c$ kalikan $\phi(x)$ dengan $(x - c)$ diperoleh persamaan (5.2).

($\Leftarrow$) Diberikan fungsi ϕ yang kontinu di c dan memenuhi persamaan (5.2). Jika persamaan (5.2) dibagi dengan $(x - c) \neq 0$, maka berakibat

$$\phi(c) = \lim_{x\to c} \phi(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

ada. Oleh karena itu, f diferensiabel di c dan $f'(c) = \phi(c)$. □

Teorema 5.8. *Diberikan I dan J selang-selang di dalam $\mathbb{R}$, dan diberikan fungsi $f : J \to \mathbb{R}$ sehingga $f(J) \subseteq I$, dan $c \in J$. Jika f diferensiabel di c dan g diferensiabel di $f(c)$, maka fungsi komposisi $g \circ f$ diferensiabel di c dan*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Bukti. Karena $f'(c)$ ada, berdasar Teorema 5.7, berakibat terdapat fungsi ϕ pada J sedemikian hingga ϕ kontinu di c dan $f(x) - f(c) = \phi(x)(x - c)$ untuk $x \in J$, dan $\phi(c) = f'(c)$. Juga, karena $g'(f(c))$ ada, terdapat fungsi ψ terdefinisi pada I sedemikian hingga ψ kontinu di $d = f(c)$ dan $g(y) - g(d) = \psi(y)(y-d)$ untuk $y \in I$ dengan $\psi(d) = g'(d)$. Substitusi $y = f(x)$ dan $d = f(c)$ menghasilkan

$$g(f(x)) - g(f(c)) = \psi(f(x))(f(x) - f(c) = [(\psi \circ f(x)) \cdot \phi(x)](x - c)$$

untuk setiap $x \in J$ sedemikian hingga $f(x) \in I$. Karena fungsi $(\psi \circ f) \cdot \phi$ kontinu di c dan nilainya di c adalah $g'(f(c)) \cdot f'(c)$, berdasarkan Terorema 5.7, memberikan

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$ □

Untuk selanjutnya, jika dikatakan suatu fungsi kontinu pada suatu himpunan itu berarti fungsi tersebut kontinu di setiap titik pada himpunan tersebut.

Contoh 5.9. *Jika $f : I \to \mathbb{R}$ diferensiabel pada I dan $g(y) = y^n$ untuk $y \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka $g'(y) = ny^{n-1}$, mengikuti aturan rantai bahwa*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad \textit{untuk} \;\; x \in I.$$

Oleh karena itu diperoleh $(f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1}f'(x)$ untuk setiap $x \in I$.

5.3 Fungsi Invers dan Turunannya

Sebelum membahas satu teorema yang menjamin suatu fungsi mempunyai invers, terlebih dahulu diberikan pengertian fungsi naik/turun, fungsi monoton, dan fungsi monoton murni.

Definisi 5.10. *Diberikan fungsi f dan selang $I \subseteq \mathbb{R}$.*
(a) Fungsi f dikatakan **naik monoton** *pada selang I jika*

$$f(x_1) \leq f(x_2), \qquad \textit{asalkan } x_1 < x_2 \textit{ untuk setiap } x_1, x_2 \in I;$$

(b) Fungsi f dikatakan **turun monoton** *pada selang I jika*

$$f(x_1) \geq f(x_2), \qquad \textit{asalkan } x_1 < x_2 \textit{ untuk setiap } x_1, x_2 \in I;$$

Pada Definisi 5.10, jika "$f(x_1) \leq f(x_2)$" diganti menjadi "$f(x_1) < f(x_2)$" maka dikatakan fungsi f **naik ketat** atau **naik murni** pada I, dan jika "$f(x_1) \geq f(x_2)$" diganti menjadi "$f(x_1) > f(x_2)$" maka dikatakan fungsi f **turun ketat** atau **turun murni** pada I. Suatu fungsi yang naik murni atau turun murni disebut **monoton ketat** atau **monoton murni**. Diperhatikan bahwa jika f naik murni pada selang I, maka f juga naik pada I, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Begitu juga untuk turun murni.

Contoh 5.11. *Periksa, apakah fungsi-fungsi berikut merupakan fungsi naik, fungsi turun, atau bukan kedua-duanya pada selang $I = [-2, 3]$:*
(a). $f(x) = x^3$ *(b). $g(x) = x^2 + 1$.*

Penyelesaian:
(a). Ambil sebarang $x_1, x_2 \in I = [-2, 3]$ dengan $x_1 < x_2$. Jadi

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1^3 < x_2^3 \\ &\Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2). \end{aligned}$$

Jadi f naik pada $I = [-2, 3]$.
(b). g bukan fungsi naik pada I karena $-2 < 0$ tetapi $g(-2) = 5 > 1 = g(0)$. g juga bukan fungsi turun pada I karena $0 < 1$ tetapi $g(0) = 1 < 2 = g(1)$. □

Teorema 5.12. *Jika f fungsi monoton murni pada domainnya, maka f memiliki invers.*

Bukti. Untuk menunjukkan suatu fungsi mempunyai invers adalah dengan menunjukkan fungsi tersebut merupakan fungsi satu-satu (injektif) dan fungsi pada (surjektif).
Anggap f naik murni pada I, yakni domain fungsi f. Untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$, maka berlaku $f(x_1) < f(x_2)$. Hal ini menunjukkan bahwa jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$ atau dengan kata lain f fungsi satu-satu.
Untuk bukti f merupakan fungsi pada (surjektif), digunakan sebagai latihan.
Bukti untuk kasus fungsi turun murni, serupa. □

Teorema 5.13. *Diberikan selang $I \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ monoton murni dan kontinu pada I. Diberikan $J = f(I)$ dan $g : J \to \mathbb{R}$ fungsi monoton murni dan kontinu yang merupakan invers dari fungsi f. Jika f diferensiabel di c dan $f'(c) \neq 0$, maka g diferensiabel di $d = f(c)$ dan*

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}.$$

Bukti. Diberikan $c \in \mathbb{R}$. Berdasarkan Teorema 5.7, terdapat fungsi ϕ pada I dengan sifat ϕ kontinu di $c, f(x) - f(c) = \phi(x)(x - c)$ untuk $x \in I$, dan $\phi(c) = f'(c)$. Karena $\phi(c) \neq 0$ berdasarkan hipotesis, terdapat persekitaran $V = (c - \delta, c + \delta)$ sedemikian hingga $\phi(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in V \cap I$. Jika $U = f(V \cap I)$, maka fungsi invers g memenuhi $f(g(y)) = y$ untuk setiap $y \in U$, sehingga

$$y - d = f(g(y)) - f(c) = \phi(g(y))(g(y) - g(d))$$

Karena $\phi(g(y)) \neq 0$ untuk $y \in U$, dapat dibagi untuk memperoleh

$$g(y) - g(d) = \frac{1}{\phi(g(y))}(y - d).$$

Karena fungsi $1/(\phi \circ g)$ kontinu di d, dengan menggunakan Teorema Carathéodory dapat disimpulkan bahwa $g'(d)$ ada dan

$$g'(d) = 1/\phi(g(d)) = 1/\phi(c) = 1/f'(c).$$ □

Teorema 5.14. *Diberikan selang $I \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ monoton murni pada I. Diberikan $J = f(I)$ dan $g : J \to \mathbb{R}$ fungsi invers dari f. Jika f diferensiabel pada I dan $f'(x) \neq 0$ untuk $x \in I$, maka g diferensiabel pada J dan*

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Bukti. Jika f diferensiabel pada I, berakibat f kontinu pada I, dan invers fungsi g kontinu pada J. Berdasarkan Teorema 5.13, diperoleh

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}. \qquad \square$$

Contoh 5.15. *Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x^5 + 4x + 3$ kontinu dan naik murni. Oleh karena itu, $f'(x) = 5x^4 + 4$ tidak pernah nol. Jadi, fungsi invers $g = f^{-1}$ diferensiabel di setiap titik. Jika diambil $c = 1$, diperoleh $f(1) = 8$, dan*

$$g'(8) = g'(f(1)) = 1/f'(1) = 1/9.$$

5.4 Teorema Nilai Rata-rata

5.4.1 Ekstrim Relatif

Perlu mengingat kembali pengertian maksimum dan minimum relatif. Fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ dikatakan mempunyai **maksimum relatif** di $c \in I$, jika terdapat persekitaran $V_\delta(c)$ sedemikian hingga $f(x) \le f(c)$ untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap I$. Fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ dikatakan mempunyai **minimum relatif** di $c \in I$, jika terdapat persekitaran $V_\delta(c)$ sedemikian hingga $f(x) \ge f(c)$ untuk setiap $x \in V_\delta(c) \cap I$. Fungsi f dikatakan mempuyai **ekstrim relatif** di $c \in I$ jika f mempunyai maksimum relatif atau minimum relatif di c.

Teorema 5.16. Teorema Ekstrim Interior *Diberikan c titik-dalam selang I yang mana $f : I \to \mathbb{R}$ mempunyai ekstrim relatif. Jika f diferensiabel di c, maka $f'(c) = 0$.*

Bukti. Cukup akan dibuktikan untuk kasus f mempunyai maksimum relatif di c, untuk kasus minimum relatif serupa.
Jika $f'(c) > 0$, maka terdapat persekitaran $V \subseteq I$ di c sehingga

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \qquad \text{untuk} \qquad x \in V, x \neq c.$$

Jika $x \in V$ dan $x > c$, maka diperoleh

$$f(x) - f(c) = (x - c)\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Tetapi ini kontradiksi dengan hipotesis bahwa f mempunyai maksimum relatif di c. Jadi tidak benar $f'(c) > 0$. Dengan cara serupa, juga tidak benar $f'(c) < 0$. Akibatnya disimpulkan $f'(c) = 0$. $\square$

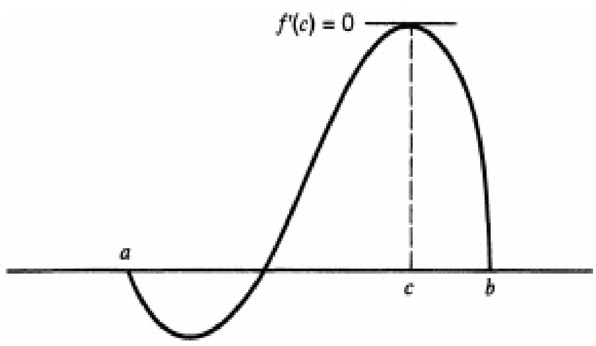
Akibat 5.17. *Diberikan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada selang I. Jika f mempunyai ekstrim relatif di c titik-dalam I, maka f tidak diferensiabel di c atau $f'(c) = 0$.*

5.4.2 Teorema Nilai Rata-rata

Sebelum membahas Teorema Nilai Rata-rata, terlebih dahulu membahas Teorema Rolle.

Teorema 5.18. Teorema Rolle *Diberikan f fungsi kontinu pada selang tertutup $I = [a, b]$ yang diferensiabel di setiap $x \in (a, b)$. Jika $f(a) = f(b) = 0$, maka terdapat titik $c \in (a, b)$ sehingga $f'(c) = 0$.*

Bukti. Jika f konstan pada I, maka untuk sebarang $c \in (a, b)$ akan memenuhi kesimpulan teorema. Oleh karena itu dianggap f tidak konstan; dengan mengganti f dengan $-f$ jika perlu, dianggap f mencapai suatu nilai positif. Dengan Teorema Maksimum Minimum, fungsi f mencapai nilai $\sup\{f(x) : x \in I\} > 0$ di suatu titik $c \in I$. Karena $f(a) = f(b) = 0$, titik c haruslah berada di (a, b); oleh karena itu $f'(c)$ ada. Karena f mempunyai maksimum relatif di c, berdasarkan Teorema 5.16, $f'(c) = 0$. $\square$



Gambar 5.1: Ilustrasi Teorema Rolle

Teorema 5.19. Teorema Nilai Rata-rata *Diberikan f fungsi kontinu pada selang tertutup $I = [a, b]$. Jika f diferensiabel di setiap $x \in (a, b)$, maka terdapat titik $c \in (a, b)$ sehingga berlaku*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Bukti. Pandang fungsi $\phi : I \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Dari Teorema Rolle terpenuhi oleh ϕ karena ϕ kontinu pada $[a, b]$, diferensiabel pada (a, b) dan $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Oleh karena itu, terdapat titik $c \in (a, b)$ sehingga

$$0 = \phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Oleh karena itu, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

Ilustrasi Teorema Rolle dapat dilihat pada Gambar 5.1.

Teorema 5.20. *Diberikan f fungsi kontinu pada selang tertutup $I = [a, b]$. Jika f diferensiabel pada (a, b) dan $f'(x) = 0$, untuk setiap $x \in (a, b)$, maka f merupakan fungsi konstan pada I.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $f(x) = f(a)$ untuk setiap $x \in I$. Jika diberikan sebarang $x \in I$ dan $x > a$, dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk fungsi f pada selang tertutup $[a, x]$, maka terdapat titik $c \in (a, x)$ sedemikian hingga $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$. Karena $f'(c) = 0$, diperoleh $f(x) - f(a) = 0$. Oleh karena itu $f(x) = f(a)$ untuk setiap $x \in I$. □

Akibat 5.21. *Diberikan f fungsi kontinu pada selang tertutup $I = [a, b]$. Jika f diferensiabel pada (a, b) dan $f'(x) = g'(x)$ untuk setiap $x \in (a, b)$, maka $f = g + C$ pada I untuk suatu konstanta C.*

Teorema 5.22. *Diberikan $f : I \to \mathbb{R}$ diferensiabel pada selang I. Pernyataan-pernyataan berikut benar:*

(i). Fungsi f naik pada I jika dan hanya jika $f'(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$.

(ii). Fungsi f turun pada I jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in I$.

Bukti. (i). ($\Rightarrow$) Misalkan f diferensiabel dan naik pada I. Jadi, untuk setiap $x \in I$ dan $x \neq c$, diperoleh

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Oleh karena itu, disimpulkan

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

($\Leftarrow$) Misal diberikan $f'(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$. Jika untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ yang memenuhi $x_1 < x_2$, dengan mengaplikasikan Teorema Nilai Rata-rata fungsi f pada selang tertutup $I = [x_1, x_2]$, terdapat titik $c \in (x_1, x_2)$ sehingga

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Karena $f'(c) \geq 0$ dan $x_2 - x_1 > 0$, akibatnya diperoleh $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Jadi $f(x_1) \leq f(x_2)$, atau dengan kata lain f naik pada I.
(ii) Bukti serupa, mengikuti (i). □

5.4.3 Uji Turunan Pertama Titik Ekstrim

Teorema 5.23. Uji Turunan Pertama *Diberikan f fungsi kontinu pada selang $I = [a, b]$ dan diberikan bilangan $c \in (a, b)$. Jika f diferensiabel pada (a, c) dan (c, b), maka*

(i). Jika terdapat persekitaran $(c - \delta, c + \delta) \subseteq I$ sehingga $f'(x) \geq 0$ untuk $c - \delta < x < c$, dan $f'(x) \leq 0$ untuk $c < x < c + \delta$, maka f mempunyai maksimum relatif di c.

(ii). Jika terdapat persekitaran $(c - \delta, c + \delta) \subseteq I$ sehingga $f'(x) \leq 0$ untuk $c - \delta < x < c$, dan $f'(x) \geq 0$ untuk $c < x < c + \delta$, maka f mempunyai minimum relatif di c.

Bukti. (i). Jika $x \in (c - \delta, c)$, maka berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata terdapat titik $c_x \in (x, c)$ sehingga $f(c) - f(x) = (c - x)f'(c_x)$. Karena $f'(c_x) \geq 0$ dipilih $f(x) \leq f(c)$ untuk $x \in (c - \delta, c)$. Dengan cara serupa, bahwa $f(x) \leq f(c)$ untuk $x \in (c, c + \delta)$. Oleh karena itu $f(x) \leq f(c)$ untuk setiap $x \in (c - \delta, c + \delta)$ sehingga f mempunyai maksimum relatif di c.
(ii) Bukti serupa mengikuti (i). □

Contoh 5.24. *Fungsi eksponensial* $f(x) = e^x$ *mempunyai turunan* $f'(x) = e^x$ *untuk setiap* $x \in \mathbb{R}$*. Jadi* $f'(x) > 1$ *untuk* $x > 0$*, dan* $f'(x) < 1$ *untuk* $x < 0$*. Dari hubungan ini, akan diderivasi ketaksamaan*

$$e^x \geq 1 + x, \qquad \text{untuk setiap } x \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

dengan $e^x = 1 + x$ *terjadi jika dan hanya jika* $x = 0$*.*

Jika $x = 0$*, dipunyai kesamaan dengan kedua ruas sama dengan 1. Jika* $x > 0$*, diterapkan Teorema Nilai Rata-rata ke fungsi* f *pada selang* $[0, x]$*. Untuk suatu* c *dengan* $0 < c < x$ *dipunyai*

$$e^x - e^0 = e^c(x - 0).$$

Karena $e^0 = 1$ *dan* $e^c > 1$*, ini mengakibatkan* $e^x - 1 > x$ *sehingga diperoleh* $e^x > 1 + x$ *untuk* $x > 0$*. Dengan argumen yang serupa, dapat diperlihatkan bahwa* $e^x > 1 + x$ *untuk* $x < 0$*. Jadi ketaksamaan (5.3) terpenuhi untuk setiap* x*, dan nilainya sama terjadi hanya jika* $x = 0$*.*

5.4.4 Sifat Nilai Intermediet Turunan

Teorema 5.25. *Diberikan selang* $I \subseteq \mathbb{R}$*, fungsi* $f : I \to \mathbb{R}$*, dan bilangan* $c \in I$*. Anggap bahwa* f *mempunyai turunan di* c*. Pernyataan-pernyataan berikut benar:*

(i). Jika $f'(c) > 0$*, maka terdapat bilangan* $\delta > 0$ *sedemikian hingga* $f(x) > f(c)$ *untuk* $x \in I$ *sehingga* $c < x < c + \delta$*.*

(ii). Jika $f'(c) < 0$*, maka terdapat bilangan* $\delta > 0$ *sedemikian hingga* $f(x) > f(c)$ *untuk* $x \in I$ *sehingga* $c - \delta < x < c$*.*

Bukti. (i). Karena

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) > 0,$$

terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $x \in I$ dan $0 < |x - c| < \delta$, maka

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Jika $x \in I$ juga memenuhi $x > c$, maka diperoleh

$$f(x) - f(c) = (x - c)\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Oleh karena itu, jika $x \in I$ dan $c < x < c + \delta$, maka $f(x) > f'(c)$.
(ii). Bukti serupa mengikuti (i). □

Teorema 5.26. Teorema Darbox *Jika f diferensiabel pada $I = [a, b]$ dan jika k adalah bilangan antara $f'(a)$ dan $f'(b)$, maka terdapat sedikitnya satu titik $c \in (a, b)$ sedemikian hingga $f'(c) = k$.*

Bukti. Anggap bahwa $f'(a) < k < f'(b)$. Didefinisikan fungsi g pada I dengan $g(x) = kx - f(x)$ untuk setiap $x \in I$. Karena g kontinu, maka g mencapai nilai maksimum pada I. Karena $g'(a) = k - f'(a) > 0$, berdasarkan Teorema 5.25 (i) bahwa maksimum g tidak terjadi di $x = a$. Dengan cara serupa, karena $g'(b) = k - f'(b)$, berdasarkan Teorema 5.25 (ii) bahwa maksimum g tidak terjadi di $x = b$. Oleh karena itu, g mencapai maksimumnya di suatu $c \in (a, b)$. Dengan demikian, dipunyai $0 = g'(c) = k - f'(c)$. Oleh karena itu, $f'(c) = k$. □

Contoh 5.27. *Fungsi $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq 1, \\ 0 & , x = 0, \\ -1 & , -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

jelaslah tidak memenuhi sifat nilai intermediet pada selang $[-1, 1]$. Oleh karena itu, dengan Teorema Darboux, tidak terdapat fungsi f sedemikian hingga $f'(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in [-1, 1]$. Dengan kata lain, g bukan derivatif sebarang fungsi pada selang $[-1, 1]$.

5.5 Aturan L'Hospital

5.5.1 Teorema Nilai Rata-rata Cauchy

Sebelum membahas teorema nilai rata-rata Cauchy, diberikan satu teorema berikut.

Teorema 5.28. *Diberikan f dan g yang terdefinisi pada selang $[a, b]$, dan diberi-kan $f(a) = g(a) = 0$, dan $g(x) \neq 0$ untuk $a < x < b$. Jika f dan g diferensiabel di a dan jika $g'(a) \neq 0$, maka limit f/g di a ada dan nilainya* *sama dengan* $f'(a)/g'(a)$. *Jadi*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Bukti. Karena $f(a)=g(a)=0$, dapat dituliskan $f(x)/g(x)$ untuk $a<x<b$ sebagai berikut:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$ □

Berikut diberikan Teorema Nilai Rata-rata Cauchy, bukti dapat digunakan sebagai latihan.

Teorema 5.29. Teorema Nilai Rata-rata Cauchy *Diberikan f dan g keduanya fungsi kontinu pada $[a,b]$ dan diferensiabel pada (a,b). Jika $g'(x)\neq 0$ untuk setiap $x\in(a,b)$, maka terdapat $c\in(a,b)$ sedemikian hingga*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

5.5.2 Aturan L'Hospital

Teorema 5.30. Aturan L'Hospital I *Diberikan $-\infty<a<b<\infty$ dan diberikan fungsi f dan g yang diferensiabel pada selang (a,b) sedemikian hingga $g'(x)\neq 0$ untuk setiap $x\in(a,b)$. Anggap berlaku*

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=0=\lim_{x\to a^+}g(x).$$

(i). Jika $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}$, *maka* $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

(ii). Jika $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\{-\infty,\infty\}$, *maka* $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

Bukti. Jika $a<\alpha<\beta<b$, maka berdasarkan Teorema Rolle berakibat $g(\beta)\neq g(\alpha)$. Lebih jauh, dengan Teorema Nilai Rata-rata Cauchy, terdapat $u\in(\alpha,\beta)$ sehingga

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(u)}{g'(u)}. \tag{5.4}$$

Kasus 1. Jika $L \in \mathbb{R}$ dan diberikan $\epsilon > 0$ sebarang, terdapat $c \in (a,b)$ sehingga

$$L - \epsilon < \frac{f'(u)}{g'(u)} < L + \epsilon \qquad \text{untuk} \qquad u \in (a,c),$$

oleh karena itu dari (5.4) diperoleh

$$L - \epsilon < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < L + \epsilon \qquad \text{untuk} \qquad a < \alpha < \beta \leq c. \tag{5.5}$$

Jika diambil limit pada (5.5) untuk $\alpha \to a^+$, diperoleh

$$L - \epsilon \leq \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \leq L + \epsilon \qquad \text{untuk} \qquad \beta \in (a,c],$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, ini menunjukkan $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
Kasus 2. Jika $L = \infty$ dan jika $M > 0$ sebarang, terdapat $c \in (a,b)$ sehingga

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} > M \qquad \text{untuk} \qquad u \in (a,c),$$

oleh karena itu dari (5.4) diperoleh

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} > M \qquad \text{untuk} \qquad a < \alpha < \beta < c. \tag{5.6}$$

Jika diambil limit pada (5.6) untuk $\alpha \to a^+$, diperoleh

$$\frac{f(\beta)}{g(\beta)} \geq M \qquad \text{untuk} \qquad \beta \in (a,c).$$

Karena $M > 0$ sebarang, disimpulkan $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
Untuk kasus $L = -\infty$, argumen serupa. $\square$

Contoh 5.31.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\cos x}{1/(2\sqrt{x})}\right] = \lim_{x \to 0^+} 2\sqrt{x}\cos x = 0.$$

Diperhatikan bahwa penyebutnya tidak diferensiabel di $x = 0$, sehingga Teorema 5.28 tidak dapat diterapkan. Namun, $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ keduanya diferensiabel pada $(0,\infty)$ dan keduanya mendekati 0 *apabila $x \to 0^+$. Oleh karena itu, $g'(x) \neq 0$ pada $(0,\infty)$ sehingga Teorema 5.30 dapat diterapkan.*

Teorema 5.32. Aturan L'Hospital II *Diberikan $-\infty \leq a < b < \infty$ dan diberikan f dan g diferensiabel pada selang (a,b) sedemikian hingga $g'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$. Anggap berlaku*

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty.$$

1. *Jika* $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, *maka* $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2. *Jika* $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$, *maka* $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Bukti. Anggap $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$. Jika $a < \alpha < \beta < b$, maka Teorema Rolle berakibat $g(\beta) \neq g(\alpha)$ untuk $\alpha, \beta \in (a, b), \alpha < \beta$. Lebih jauh, dengan Teorema Nilai Rata-rata Cauchy, terdapat $u \in (\alpha, \beta)$ sehingga

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}.$$

terpenuhi untuk suatu $u \in (\alpha, \beta)$.

Kasus 1. Jika $L \in \mathbb{R}$ dengan $L > 0$ dan diberikan $\epsilon > 0$ sebarang, terdapat $c \in (a, b)$ sehingga

$$L - \epsilon < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < L + \epsilon \qquad \text{untuk} \qquad a < \alpha < \beta \leq c.$$

Karena $g(x) \to \infty$, diasumsikan $g(c) > 0$. Dengan mengambil $\beta = c$, diperoleh

$$L - \epsilon < \frac{f(c) - f(\alpha)}{g(c) - g(\alpha)} < L + \epsilon \qquad \text{untuk} \qquad \alpha \in (a, c). \tag{5.7}$$

Karena $g(c)/g(\alpha) \to 0$ untuk $\alpha \to a^+$, diasumsikan bahwa $0 < g(c)/g(\alpha) < 1$ untuk $\alpha \in (a, c)$, oleh karena itu

$$\frac{g(\alpha) - g(c)}{g(\alpha)} = 1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)} > 0 \qquad \text{untuk} \qquad \alpha \in (a, c).$$

Jika (5.7) dikalikan dengan $(g(\alpha) - g(c))/g(\alpha) > 0$, diperoleh

$$(L - \epsilon)\Big(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\Big) < \frac{f\alpha)}{g(\alpha)} - \frac{f(c)}{g(\alpha)} < (L + \epsilon)\Big(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\Big) \tag{5.8}$$

Karena $g(c)/g(\alpha) \to 0$ dan $f(c)/g(\alpha) \to 0$ jika $\alpha \to a^+$, maka untuk sebarang δ dengan $0 < \delta < 1$ terdapat $d \in (a, c)$ sehingga $0 < g(c)/g(\alpha) < \delta$ dan $|f(c)|/g(\alpha) < \delta$ untuk setiap $\alpha \in (a, d)$, oleh karena itu (5.8) memberikan

$$(L - \epsilon)(1 - \delta) - \delta < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} < (L + \epsilon) + \delta. \tag{5.9}$$

Jika diambil $\delta := \min\{1, \epsilon, \epsilon/(|L| + 1)\}$, memberikan

$$L - 2\epsilon \leq \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \leq L + 2\epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = L$.

Untuk kasus $L = 0$ dan $L < 0$, bukti serupa.

Kasus 2. Jika $L = \infty$ dan jika $M > 1$ sebarang dan $c \in (a, b)$ sehingga $f'(u)/g'(u) > M$ untuk setiap $u \in (a, c)$. Seperti sebelumnya, diperoleh

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} > M \qquad \text{untuk} \qquad a < \alpha < \beta \leq c. \tag{5.10}$$

Karena $g(x) \to \infty$ apabila $x \to a^+$, anggap juga c memenuhi $g(c) > 0$, bahwa $|f(c)|/g(\alpha) < \frac{1}{2}$, dan $0 < g(c)/g(\alpha) < \frac{1}{2}$ untuk setiap $\alpha \in (a, c)$. Jika diambil $\beta = c$ di ketaksamaan (5.10) dan dikalikan dengan $(1 - g(c)/g(\alpha)) > \frac{1}{2}$, diperoleh

$$\frac{f(\alpha) - f(c)}{g(\alpha)} > M\Big(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}\Big) > \frac{1}{2}M,$$

sehingga

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} > \frac{1}{2}M + \frac{f(c)}{g(\alpha)} > \frac{1}{2}(M - 1) \qquad \text{untuk} \qquad \alpha \in (a, c),$$

Karena $M > 1$ sebarang, diperoleh $\lim_{\alpha \to a^+} f(\alpha)/g(\alpha) = \infty$.

Jika $L = -\infty$, argumen serupa. $\square$

Contoh 5.33. *a. Pandang*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$$

Di sini diambil $f(x) = \ln x$ *dan* $g(x) = x$ *pada selang* $(0, \infty)$. *Jika diaplikasikan aturan L'Hospital pada ruas kiri persamaan, diperoleh*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

b. Pandang

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} x^2.$$

Di sini diambil $f(x) = x^2$ *dan* $g(x) = e^x$ *pada* $\mathbb{R}$. *Oleh karena itu, diperoleh*

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} x^2 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

c. Pandang

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x}.$$

Di sini diambil $f(x) = \ln \sin x$ *dan* $g(x) = \ln x$ *pada* $(0, \pi)$. *Jika diaplikasikan Aturan L'Hospital II, diperoleh*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} 1/x = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{\sin x}\right) \cdot (\cos x).$$

Karena $\lim_{x \to 0^+} (x/\sin x) = 1$ *dan* $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$, *disimpulkan* $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = 1$.

5.5.3 Bentuk-bentuk Tak Tentu Lain

Bentuk-bentuk tak tentu seperti $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ dapat direduksi seperti bentuk sebelumnya dengan manipulasi aljabar dan menggunakan fungsi logaritma dan eksponensial. Berikut diberikan beberapa contoh.

Contoh 5.34. *(a). Diberikan selang $I = (0, \pi/2)$ dan pandang*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right),$$

yang merupakan bentuk tak tentu $\infty - \infty$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} \\
&= \frac{0}{2} = 0.
\end{aligned}$$

(b). Diberikan selang $I = (0, \infty)$ dan pandang $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$, yang merupakan bentuk tak tentu $0 \cdot (-\infty)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

(c). Diberikan $I = (0, \infty)$ dan pandang $\lim_{x\to 0^+} x^x$, yang merupakan bentuk tak tentu 0^0.

Perhatikan, seperti dalam kalkulus, diperoleh $x^x = e^{x\ln x}$. Oleh karena itu, dari hasil (b) diperoleh

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

(d). Diberikan selang $I = (1, \infty)$ dan pandang $\lim_{x\to\infty}(1 + 1/x)^x$, yang merupakan bentuk tak tentu 1^∞. Di sini dapat dituliskan

$$(1 + 1/x)^x = e^{x\ln(1+1/x)}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\ln(1 + 1/x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(1 + 1/x)^{-1}(-x^{-2})}{-x^{-2}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1 + 1/x} = 1.
\end{aligned}$$

Karena $f(y) = e^y$ kontinu di $y = 1$, disimpulkan bahwa

$$\lim_{x\to\infty}(1 + 1/x)^x = e.$$

(e). Diberikan $I = (0, \infty)$ dan pandang $\lim_{x\to 0^+}(1 + 1/x)^x$, yang merupakan bentuk tak tentu ∞^0. Diperhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1 + 1/x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1 + 1/x} = 0.$$

Oleh karena itu, diperoleh $\lim_{x\to 0^+}(1 + 1/x)^x = e^0 = 1$.

5.6 Teorema Taylor

5.6.1 Teorema Taylor

Teorema 5.35. Teorema Taylor *Diberikan $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$, dan $f : I \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga f dan turunan-turunannya $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ kontinu pada I dan $f^{(n+1)}$ ada pada (a, b). Jika $x_0 \in I$, maka untuk sebarang $x \in I$ terdapat c diantara x dan x_0 sehingga*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Bukti. Diberikan x_0 dan x dan diberikan J merupakan selang tertutup dengan titik-titik ujung x_0 dan x. Didefinisikan fungsi F pada J dengan

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x - t)f'(t) - \cdots - \frac{(x - t)^n}{n!}f^{(n)}(t)$$

untuk setiap $t \in J$. Dengan demikian diperoleh

$$F'(t) = -\frac{(x - t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t).$$

Jika didefinisikan fungsi G pada J dengan

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x - t}{x - x_0}\right)^{n+1}F(x_0)$$

untuk setiap $t \in J$, maka $G(x_0) = G(x) = 0$. Dengan menerapkan Teorema Rolle yang memenuhi c diantara x dan x_0 sehingga

$$0 = G'(c) = F'(c) + (n + 1)\frac{(x - c)^n}{(x - x_0)^{n+1}}F(x_0).$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} F(x_0) &= -\frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}F'(c) \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

yang merupakan hasilnya. □

Selanjutnya, $(n+1)$ suku pertama pada ruas kanan persamaan (5.11) disebut dengan **polinomial Taylor** dan dinotasikan dengan P_n, sedangkan sisanya dinotasikan dengan R_n, dimana

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

untuk suatu bilangan c diantara x dan x_0.

5.6.2 Penerapan Teorema Taylor

Berikut penerapan teorema Taylor dalam contoh-contoh berikut.

Contoh 5.36. *Gunakan Teorema Taylor dengan $n = 2$ untuk mengaproksimasi $\sqrt[3]{1+x}$, untuk $x > -1$.*

Penyelesaian: Ambil fungsi $f(x) = (1+x)^{1/3}$, $x_0 = 0$, dan $n = 2$. Karena $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$ dan $f''(x) = \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(1+x)^{-5/3}$, diperoleh $f'(0) = \frac{1}{3}$ dan $f''(0) = -2/9$. Jadi diperoleh

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + R_2(x),$$

dengan $R_2(x) = \frac{1}{3!}f'''(c)x^3 = \frac{5}{81}(1+c)^{-8/3}x^3$ untuk suatu c antara 0 dan x. Sebagai contoh, jika diambil $x = 0,3$ diperoleh aproksimasi $P_2(0,3) = 1,09$ merupakan pendekatan dari $\sqrt[3]{1,3}$. Oleh karena itu, dalam kasus ini $c > 0$, maka $(1+c)^{-8/3} < 1$ sehingga kesalahannya paling besar adalah

$$R_2(0,3) \leq \frac{5}{81}\left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{1}{600} < 0,17 \times 10^{-2}.$$

Oleh karena itu, diperoleh $|\sqrt[3]{1,3} - 1,09| < 0,5 \times 10^{-2}$, terjamin akurat dalam dua desimal. □

Contoh 5.37. *Aproksimasi nilai e dengan kesalahan kurang dari* 10^{-5}.

Pandang fungsi $g(x) = e^x$ dan ambil $x_0 = 0$ dan $x = 1$ pada Teorema Taylor. Perlu ditentukan n sehingga $|R_n(1)| < 10^{-5}$. Untuk itu, digunakan fakta bahwa $g'(x) = e^x$, dan batas awal $e^x < 3$ untuk $0 \leq x \leq 1$.
Karena $g'(x) = e^x$, hasilnya mengikuti bahwa $g^{(k)}(x) = e^x$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, dan oleh karena itu $g^{(k)}(0) = 1$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Akibatnya, polinomial Taylor ke-n diberikan adalah

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

dan ingat bahwa untuk $x = 1$ diperoleh $R_n(1) = e^c/(n+1)!$ untuk suatu c yang memenuhi $0 < c < 1$. Karena $e^c < 3$, dilihat nilai n sehingga $3/(n+1)! < 10^{-5}$. Perhitungan $9! = 362.880 > 3 \times 10^5$ sehingga nilai $n = 8$ yang akurat. Karena $8! = 40.320$, tidak lebih kecil dari n yang memenuhi. Jadi, diperoleh

$$e \approx P_8(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{8!} = 2,71828$$

dengan kesalahan kurang dari 10^{-5}.

5.6.3 Ekstrim Relatif

Teorema 5.38. *Diberikan selang I, dan x_0 titik-dalam I, dan diberikan $n \geq 2$. Anggap turunan-turunan $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ ada dan kontinu di persekitaran x_0 dan $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, tetapi $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

(i). Jika n genap dan $f^{(n)}(x_0) > 0$, maka f mempunyai minimum relatif di x_0.

(ii). Jika n genap dan $f^{(n)}(x_0) < 0$, maka f mempunyai maksimum relatif di x_0.

(iii). Jika n ganjil, maka f tidak mempunyai minimum relatif maupun maksimum relatif di x_0.

Bukti. Dengan menerapkan Teorema Taylor di titik x_0, dapat ditemukan $x \in I$ sehingga diperoleh

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

dengan c adalah suatu titik antara x_0 dan x. Karena $f^{(n)}$ kontinu, jika $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, maka terdapat selang U yang memuat x_0 sehingga $f^{(n)}(x)$ mempunyai tanda yang sama dengan $f^{(n)}(x_0)$ untuk $x \in U$. Jika $x \in U$, maka titik c juga berada di U dan akibatnya $f^{(n)}(c)$ dan $f^{(n)}(x_0)$ mempunyai tanda yang sama.

(i). Jika n genap dan $f^{(n)}(x_0) > 0$, maka untuk $x \in U$ diperoleh $f^{(n)}(c) > 0$ dan $(x - x_0)^n \geq 0$ sehingga $R_{n-1}(x) \geq 0$. Oleh karena itu, $f(x) \geq f(x_0)$ untuk $x \in U$, dan karena itu f mempunyai minimum relatif di x_0.

(ii). Jika n genap dan $f^{(n)}(x_0) < 0$, maka dengan sendirinya $R_{n-1}(x) \leq 0$ untuk $x \in U$, sehingga $f(x) \leq f(x_0)$ untuk $x \in U$. Oleh karena itu f mempunyai maksimum relatif di x_0.

(iii). Jika n ganjil, maka $(x - x_0)^n > 0$ untuk $x > x_0$ dan $(x - x_0)^n < 0$ untuk $x < x_0$. Akibatnya, jika $x \in U$, maka $R_{n-1}(x)$ berlawanan tanda dengan sebelah kiri maupun kanan x_0. Oleh karena itu, f tidak mempunyai minimum relatif maupun maksimum relatif di x_0. □

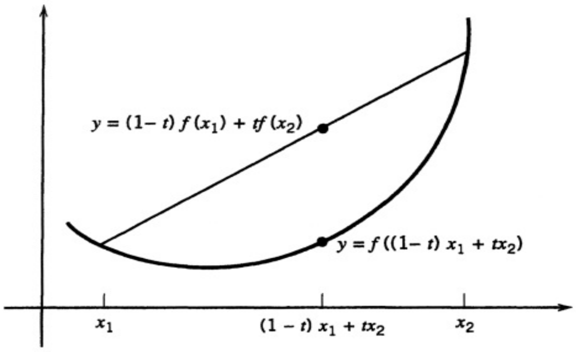
5.6.4 Fungsi Konveks

Definisi 5.39. *Diberikan selang $I \subseteq \mathbb{R}$. Fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ dikatakan* **konveks** *pada I jika untuk setiap t yang memenuhi $0 \leq t \leq 1$ dan sebarang titik x_1 dan x_2 di I, dipunyai*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Perlu dicatat bahwa jika $x_1 < x_2$ dan untuk $t \in [0, 1]$, maka titik $(1 - t)x_1 + tx_2$ berada di dalam interval $[x_1, x_2]$. Jadi, jika f konveks pada I dan jika $x_1, x_2 \in I$, maka tali busur yang menghubungkan dua titik $(x_1, f(x_1))$ dan $(x_2, f(x_2))$ berada di atas grafik f (lihat Gambar 5.2). Fungsi konveks tidak perlu diferensiabel di setiap titik. Sebagai contoh $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$. Namun, dapat ditunjukkan bahwa jika I selang buka dan jika $f : I \to \mathbb{R}$ konveks pada I, maka turunan kiri dan turunan kanan ada di setiap titik pada I. Akibatnya, fungsi konveks pada selang buka perlu kontinu. Selanjutnya akan dibahas hubungan antara fungsi konveks dan turunan keduanya f'', dengan asumsi f'' ada.

Teorema 5.40. *Diberikan selang buka I dan diberikan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang*



Gambar 5.2: Fungsi Konveks

mempunyai turunan kedua pada I. Fungsi f merupakan fungsi konveks pada I jika dan hanya jika $f''(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$.

Bukti. ($\Rightarrow$) Akan digunakan fakta bahwa turunan kedua diberikan oleh limit

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \tag{5.12}$$

untuk setiap $a \in I$.
Diberikan $a \in I$ dan diberikan bilangan h sedemikian hingga $a+h$ dan $a-h$ berada di I. Oleh karena itu $a = \frac{1}{2}((a+h)+(a-h))$, dan karena f konveks pada I, diperoleh

$$f(a) = f\big(\frac{1}{2}(a+h) + \frac{1}{2}(a-h)\big) \leq \frac{1}{2}f(a+h) + \frac{1}{2}f(a-h).$$

Oleh karena itu, diperoleh $f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) \geq 0$. Karena $h^2 > 0$ untuk setiap $h \neq 0$, bisa dilihat bahwa limit (5.12) nonnegatif. Oleh karena itu, disimpulkan $f''(a) \geq 0$ untuk setiap $a \in I$.
($\Leftarrow$) Akan dibuktikan dengan menggunakan Teorema Taylor. Diberikan sebarang $x_1, x_2 \in I$, $0 < t < 1$, dan diberikan $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$. Dengan menerapkan Teorema Taylor ke fungsi f di x_0 diperoleh titik c_1 antara x_0 dan x_1 sehingga

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(c_1)(x_1 - x_0)^2,$$

dan c_2 antara x_0 dan x_2 sehingga

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2}f''(c_2)(x_2 - x_0)^2.$$

Jika f'' nonnegatif pada I, maka suku

$$R = \frac{1}{2}(1-t)f''(c_1)(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2}tf''(c_2)(x_2 - x_0)^2$$

juga nonnegatif. Jadi diperoleh

$$\begin{aligned}(1-t)f(x_1) + tf(x_2) &= f(x_0) + f'(x_0)((1-t)x_1 + tx_2 - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-t)f''(c_1)(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2}tf''(c_2)(x_2 - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + R \\ &\geq f(x_0) = f((1-t)x_1 + tx_2).\end{aligned}$$

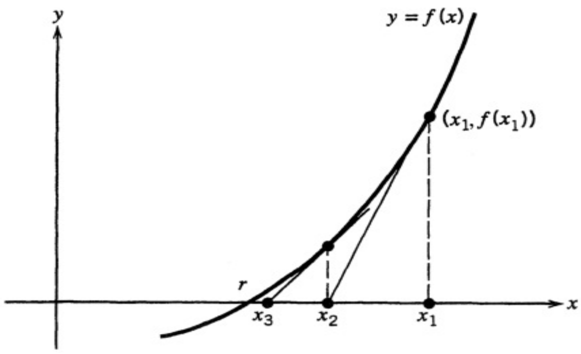
Oleh karena itu, f fungsi konveks pada I. □

5.6.5 Metode Newton

Diberikan fungsi f yang diferensiabel yang mempunyai akar di r dan diberikan x_1 estimasi awal untuk r. Garis singgung grafik fungsi f di $(x_1, f(x_1))$ mempunyai persamaan $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$, dan memotong sumbu-$x$ di titik

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

seperti terlihat pada Gambar 5.3.



Gambar 5.3: Ilustrasi Metode Newton

Jika x_1 diganti dengan x_2 sebagai estimasi kedua bagi r, maka diperoleh titik x_3, dan seterusnya. Di iterasi ke-n, diperoleh titik x_{n+1} dari titik x_n dengan rumus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Barisan $\{x_n\}$ akan konvergen ke akar persamaan $f(x) = 0$.

Teorema 5.41. *Diberikan $I = [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi diferensiabel dua kali pada I. Anggap $f(a)f(b) < 0$ dan terdapat konstanta m, dan M sehingga $|f'(x)| \geq m > 0$ dan $|f''(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in I$ dan diberikan $K = M/2m$. Maka terdapat subselang I' yang memuat r dengan $f(r) = 0$ sehingga untuk setiap $x_1 \in I'$ barisan $\{x_n\}$ yang didefinisikan*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}, \tag{5.13}$$

berada di I' dan $\{x_n\}$ konvergen ke r. Selain itu, diperoleh

$$|x_{n+1} - r| \leq K|x_n - r|^2, \qquad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

Bukti. Karena $f(a)f(b) < 0$, maka nilai $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda. Oleh karena itu, terdapat $r \in I$ sehingga $f(r) = 0$. Karena f' tidak pernah bernilai 0 pada I, hasilnya mengikuti Teorema Rolle.
Selanjutnya, diberikan sebarang $x' \in I$. Dengan Teorema Taylor, terdapat titik c' antara x' dan r sehingga

$$0 = f(r) = f(x') + f'(x')(r - x') + \frac{1}{2}f''(c')(r - x')^2.$$

Karena itu, diperoleh

$$-f(x') = f'(x')(r - x') + \frac{1}{2}f''(c')(r - x')^2.$$

Jika x'' bilangan yang didefinisikan dari x' oleh "prosedur Newton":

$$x'' = x' - \frac{f(x')}{f'(x')}$$

maka dipunyai

$$x'' = x' + (r - x') + \frac{1}{2}\frac{f''(c')}{f'(x')}(r - x')^2,$$

sehingga diperoleh

$$x'' - r = \frac{1}{2}\frac{f''(c')}{f'(x')}(x' - r)^2.$$

Karena $c' \in I$, diasumsikan batas-batas pada f' dan f'' memenuhi, dan dibentuk $K = M/2m$, diperoleh ketaksamaan

$$|x'' - r| \leq K|x' - r|^2. \tag{5.15}$$

Selanjutnya pilih $\delta > 0$ cukup kecil sehingga $\delta < 1/K$ dan bahwa selang $I' = [r - \delta, r + \delta]$ termuat di I. Jika $x_n \in I'$, maka $|x_n - r| \leq \delta$ dan hasilnya mengikuti dari persamaan (5.15), yakni $|x_{n+1}-r| \leq K|x_n-r|^2 \leq K\delta^2$. Dengan demikian $x_n \in I'$ berakibat bahwa $x_{n+1} \in I'$. Oleh karena itu, jika $x_1 \in I'$, dipilih $x_n \in I'$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $x_1 \in I'$, maka dengan menggunakan argumen persamaan (5.15) menunjukkan bahwa $|x_{n+1} - r| < (K\delta)^n|x_1 - r|$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tetapi karena $K\delta < 1$, ini membuktikan bahwa $\lim x_n = r$. □

Contoh 5.42. *Dengan menggunakan metode Newton, akan diilustrasikan aproksimasi* $\sqrt{2}$.

Jika diberikan $f(x) = x^2 - 2$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka dapat dilihat akar positif dari persamaan $f(x) = 0$. Karena $f'(x) = 2x$, rumus iterasinya adalah

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big). \end{aligned}$$

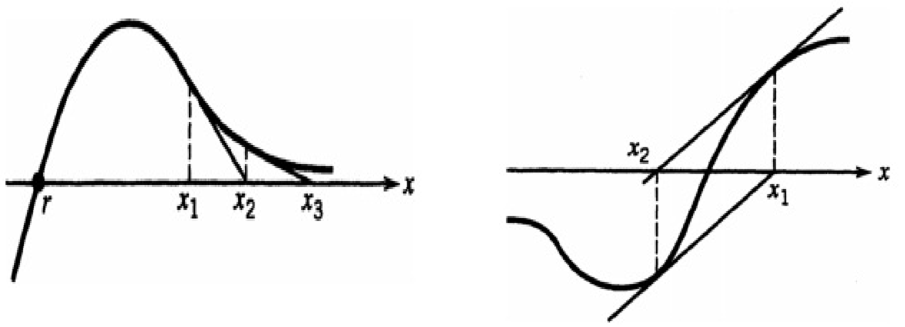
Jika diambil $x_1 = 1$ sebagai estimasi awal, diperoleh nilai-nilai

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{3}{2} = 1,5 \\ x_3 &= \frac{17}{12} = 1,416666\cdots \\ x_4 &= \frac{577}{408} = 1,414215\cdots \\ x_5 &= \frac{665857}{470832} = 1,414213562374\cdots \end{aligned}$$

dimana hasil yang terakhir terlihat akurat sebelas digit di belakang koma. □

Perlu diperhatikan (a). Jika diberikan $e_n = x_n - r$ merupakan kesalahan dalam mengaproksimasi r, maka ketaksamaan (5.14) dapat ditulis dalam bentuk $|Ke_{n+1}| \leq |Ke_n|^2$. Akibatnya, jika $|Ke_n| < 10^{-m}$ maka $|Ke_{n+1}| < 10^{-2m}$ sehingga banyaknya digit-digit signifikan di Ke_n telah digandakan dua kali. Karena penggandaan ini, barisan yang dibangkitkan oleh metode Newton dikatakan konvergen "secara kuadratik".

(b). Dalam prakteknya, bilamana metode Newton diprogram dalam komputer, seringkali memberikan nilai awal x_1 dan membiarkan komputer menjalankannya. Jika x_1 dipilih kurang pas, atau jika akar terlalu dekat dengan titik-titik ujung dari I, prosedur bisa jadi tidak konvergen ke pembuat nol f. Dua kemungkinan yang sulit ini diilustrasikan pada Gambar 5.4. Salah satu cara yang sering digunakan adalah dengan menggunakan metode Biseksi untuk mengestimasi akar.



Gambar 5.4: Kemungkinan-kemungkinan yang terjadi dalam metode Newton

5.7 Bahan Diskusi

1. Gunakan definisi turunan di suatu titik untuk menentukan turunan fungsi-fungsi berikut:

   (a) $f(x) = x^3$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $g(x) = 1/x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

   (c) $h(x) = \sqrt{x}$ untuk setiap $x > 0$.

   (d) $k(x) = 1/\sqrt{x}$ untuk setiap $x > 0$.

2. Jika r bilangan rasional dengan $r > 0$, diberikan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x^r \sin(1/x)$ untuk setiap $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$. Tentukan nilai-nilai r sehingga $f'(0)$ ada.

3. Untuk setiap fungsi-fungsi berikut pada $\mathbb{R}$, tentukan titik-titik ekstrim relatif, selang-selang dimana fungsi naik dan dimana fungsi turun:
   (a). $f(x) = x^2 - 3x + 5$, (b). $g(x) = 3x - 4x^2$
   (c). $h(x) = x^3 - 3x - 4$, (d). $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$.

4. Tentukan titik-titik ekstrim relatif, selang-selang dimana fungsi naik dan dimana fungsi turun:

(a). $f(x) = x + 1/x$, untuk $x \neq 0$;
(b). $g(x) = x/(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$;
(c). $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$, untuk $x > 0$;
(d). $k(x) = 2x + 1/x^2$, untuk $x \neq 0$.

5. Tunjukkan bahwa jika $c > 0$, maka
$$\lim_{x \to c} \frac{x^c - c^x}{x^x - c^c} = \frac{1 - \ln c}{1 + \ln c}.$$

6. Diberikan selang terbuka $I \subseteq \mathbb{R}$, dan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi yang diferensiabel pada I, dan anggap $f''(a)$ ada di $a \in I$. Tunjukkan bahwa
$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$
Berikan satu contoh fungsi yang limitnya ada, tetapi fungsinya tidak mempunyai turunan kedua di a.

7. Anggap bahwa $I \subseteq \mathbb{R}$ selang terbuka dan $f''(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$. Jika $c \in I$, tunjukkan bahwa bagian grafik f pada I tidak pernah berada di bawah garis singgung grafik di titik $(c, f(c))$.

5.8 Rangkuman

1. Diberikan selang $I \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f : I \to \mathbb{R}$, dan $c \in I$. Bilangan L dikatakan turunan fungsi f di titik c jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $x \in I$ yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta$, maka
$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon.$$
Dalam kasus ini, dikatakan bahwa f diferensiabel atau dapat diturunkan di c, ditulis $f'(c)$, dan L adalah nilai turunan f di c, ditulis $f'(c) = L$.

2. Jika $f, g : I \to \mathbb{R}$ fungsi-fungsi yang diferensiabel di c, maka

   (i). jika $\alpha \in \mathbb{R}$, maka fungsi αf diferensiabel di c, dan
$$(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c).$$

(ii). Fungsi $f + g$ diferensiabel di c, dan

$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

(iii). Fungsi fg diferensiabel di c, dan

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

(iv). Jika $g(c) \neq 0$, fungsi f/g diferensiabel di c, dan

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}.$$

3. Diberikan I dan J selang-selang di dalam $\mathbb{R}$, dan diberikan fungsi $f : J \to \mathbb{R}$ sehingga $f(J) \subseteq I$, dan $c \in J$. Jika f diferensiabel di c dan g diferensiabel di $f(c)$, maka fungsi komposisi $g \circ f$ diferensiabel di c dan

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

4. Diberikan selang $I \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ monoton murni pada I. Diberikan $J = f(I)$ dan $g : J \to \mathbb{R}$ fungsi invers dari f. Jika f diferensiabel pada I dan $f'(x) \neq 0$ untuk $x \in I$, maka g diferensiabel pada J dan

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

5. Diberikan c titik-dalam selang I yang mana $f : I \to \mathbb{R}$ mempunyai ekstrim relatif. Jika f diferensiabel di c, maka $f'(c) = 0$.

6. Diberikan f fungsi kontinu pada selang tertutup $I = [a, b]$. Jika f diferensiabel di setiap $x \in (a, b)$, maka terdapat titik $c \in (a, b)$ sehingga berlaku

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

7. Diberikan $f : I \to \mathbb{R}$ diferensiabel pada selang I. Pernyataan-pernyataan berikut benar:

(i). Fungsi f naik pada I jika dan hanya jika $f'(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$.

(ii). Fungsi f turun pada I jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in I$.

8. Jika f diferensiabel pada $I = [a, b]$ dan jika k adalah bilangan antara $f'(a)$ dan $f'(b)$, maka terdapat sedikitnya satu titik $c \in (a, b)$ sedemikian hingga $f'(c) = k$.

9. Diberikan f dan g yang terdefinisi pada selang $[a, b]$, dan diberikan $f(a) = g(a) = 0$, dan $g(x) \neq 0$ untuk $a < x < b$. Jika f dan g diferensiabel di a dan jika $g'(a) \neq 0$, maka limit f/g di a ada dan nilainya sama dengan $f'(a)/g'(a)$. Jadi
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

10. Diberikan $-\infty < a < b < \infty$ dan diberikan fungsi f dan g yang diferensiabel pada selang (a, b) sedemikian hingga $g'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$. Anggap berlaku
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a^+} g(x).$$
   (i). Jika $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, maka $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

   (ii). Jika $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$, maka $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

11. Diberikan $-\infty \leq a < b < \infty$ dan diberikan f dan g diferensiabel pada selang (a, b) sedemikian hingga $g'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$. Anggap berlaku
$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty.$$
   (i). Jika $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, maka $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

   (ii). Jika $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$, maka $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

12. Diberikan $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$, dan $f : I \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga f dan turunan-turunannya $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ kontinu pada I dan $f^{(n+1)}$ ada pada (a, b). Jika $x_0 \in I$, maka untuk sebarang $x \in I$ terdapat c diantara x dan x_0 sehingga
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

13. Diberikan selang I, dan x_0 titik-dalam I, dan diberikan bilangan asli $n \geq 2$. Anggap turunan-turunan $f', f'', \cdots, f^{(n)}$ ada dan kontinu di persekitaran x_0 dan $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, tetapi $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

    (i). Jika n genap dan $f^{(n)}(x_0) > 0$, maka f mempunyai minimum relatif di x_0.

    (ii). Jika n genap dan $f^{(n)}(x_0) < 0$, maka f mempunyai maksmum relatif di x_0.

    (iii). Jika n ganjil, maka f tidak mempunyai minimum relatif atau maksimum relatif di x_0.

14. Diberikan selang buka I dan diberikan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang mempunyai turunan kedua pada I. Fungsi f merupakan fungsi konveks pada I jika dan hanya jika $f''(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$.

15. Diberikan $I = [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi diferensiabel dua kali pada I. Anggap $f(a)f(b) < 0$ dan terdapat konstanta-konstanta m, M sehingga $|f'(x)| \geq m > 0$ dan $|f''(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in I$ dan diberikan $K = M/2m$. Maka terdapat subselang I' yang memuat r dengan $f(r) = 0$ sehingga untuk setiap $x_1 \in I'$ barisan $\{x_n\}$ yang didefinisikan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N},$$

berada di I' dan $\{x_n\}$ konvergen ke r. Selain itu, diperoleh

$$|x_{n+1} - r| \leq K|x_n - r|^2, \qquad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

5.9 Soal-Soal Latihan

1. Tunjukkan bahwa $f(x) = x^{1/3}, x \in \mathbb{R}$, tidak diferensiabel di $x = 0$.

2. Diberikan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x^2 & , x \text{ rasional} \\ 0 & , x \text{ irasional.} \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa f diferensiabel di $x = 0$, dan tentukan $f'(0)$.

3. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferensiabel di c dan $f(c) = 0$. Buktikan bahwa $g(x) = |f(x)|$ diferensiabel di c jika dan hanya jika $f'(c) = 0$.

4. Tentukan dimana saja fungsi-fungsi berikut diferensiabel dan tentukan turunannya.
   (a). $f(x) = |x| + |x+1|$ (b). $g(x) = 2x + |x|$
   (c). $h(x) = x|x|$ (d). $k(x) = |\sin x|$.

5. Buktikan bahwa jika $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi genap yang diferensiabel pada $\mathbb{R}$, maka turunannya merupakan fungsi ganjil.

6. Diberikan fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan
$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$
   Tunjukkan bahwa g diferensiabel pada $\mathbb{R}$, dan tunjukkan pula turunannya tidak terbatas pada interval $[-1, 1]$.

7. Diberikan bilangan rasional $r > 0$, fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan $f(x) = x^r \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$. Tentukan nilai r yang mana $f'(0)$ ada.

8. Diberikan fungsi $h(x) = x^3 + 2x + 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dengan invers h^{-1} pada $\mathbb{R}$. Tentukan nilai $(h^{-1})'(y)$ di titik-titik $y = h(x)$ yang bersesuaian dengan $x = 0, 1, -1$.

9. Tentukan titik-titik ekstrim relatif, selang-selang dimana fungsi naik, dan dimana fungsi turun dari fungsi-fungsi berikut:
   (a). $f(x) = x + 1/x$, untuk $x \neq 0$;
   (b). $g(x) = x/(x^2 + 1)$, untuk $x \in \mathbb{R}$;
   (c). $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$, untuk $x > 0$;
   (d). $k(x) = 2x + 1/x^2$, untuk $x \neq 0$.

10. Diberikan $a_1, a_2, \cdots, a_n$ bilangan-bilangan real dan diberikan f fungsi yang terdefinisi pada $\mathbb{R}$ dengan
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2 \qquad \text{untuk} \qquad x \in \mathbb{R}.$$
    Tentukan titik tunggal minimum relatif untuk f.

11. Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk membuktikan bahwa

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

12. Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk membuktikan bahwa

$$(x-1)/x < \ln x < x - 1 \qquad \text{untuk } x > 1.$$

13. Diberikan fungsi f yang didefinisikan oleh $f(x) = 2x^4 + x^4 \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$. Tunjukkan bahwa f mempunyai minimum mutlak di $x = 0$.

14. Berikan sebuah contoh fungsi kontinu seragam pada selang $[0,1]$ yang diferensiabel pada $(0,1)$ tetapi turunannya tidak terbatas pada $(0,1)$.

15. Diberikan selang I dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang diferensiabel pada I. Tunjukkan jika f' positif pada I maka f naik murni pada I.

16. Anggap bahwa f dan g fungsi-fungsi kontinu terdefinisi pada selang $[a,b]$, f dan g diferensiabel pada (a,b), $c \in [a,b]$, dan $g(x) \neq 0$ untuk $x \in [a,b], x \neq c$. Diberikan $A = \lim_{x\to c} f$ dan $B = \lim_{x\to c} g$. Jika $B = 0$, dan jika $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ ada di $\mathbb{R}$, tunjukkan bahwa $A = 0$ [*Petunjuk*: $f(x) = \{f(x)/g(x)\}g(x)$].

17. Diberikan fungsi f pada $[0,1]$ yang didefinisikan $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ untuk $0 < x \leq 1$ dan $f(0) = 0$ dan diberikan $g(x) = x^2$ untuk $x \in [0,1]$. Tunjukkan bahwa f dan g keduanya fungsi yang diferensiabel pada $[0,1]$ dan $g(x) > 0$ untuk $x \neq 0$. Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$ dan buktikan bahwa $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$ tidak ada.

18. Diberikan $f(x) = x^2$ untuk x bilangan rasional dan $f(x) = 0$ untuk x bilangan irasional, dan diberikan $g(x) = \sin x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Gunakan Teorema 5.28 untuk menunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$. Jelaskan mengapa Teorema Hospital I tidak dapat digunakan.

19. Diberikan $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ untuk setiap $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$, dan diberikan $g(x) = \sin x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa

$$\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0,$$

akan tetapi

$$\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$$

tidak ada.

20. Hitung limit-limit berikut

    (a)
    $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$$

    (b)
    $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$$

21. Evaluasi limit-limit berikut pada domain yang diberikan

    (a)
    $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sin x}, \qquad (0, \pi/2)$$

    (b)
    $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x}, \qquad (0, \pi/2)$$

22. Evaluasi limit-limit berikut pada domain yang diberikan:

    (a)
    $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(\ln x)^2}, \qquad (0, 1)$$

    (b)
    $$\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x, \qquad (0, \infty)$$

23. Evaluasi limit-limit berikut:

    (a)
    $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}, \qquad \text{untuk} \qquad x > 0$$

    (b)
    $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \qquad \text{untuk} \qquad x > 0$$

24. Evaluasi limit-limit berikut:

    (a)
    $$\lim_{x\to 0^+} x^{2x}, \qquad (0, \infty)$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}(1+3/x)^x, \qquad (0,\infty)$$

25. Evaluasi limit-limit berikut:

(a)

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x}, \qquad (0,\infty)$$

(b)

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x, \qquad (0,\pi)$$

26. Diberikan $f(x) = \cos ax$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dengan $a \neq 0$. Tentukan $f^{(n)}(x)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan $x \in \mathbb{R}$.

27. Diberikan $g(x) = |x^3|$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Tentukan $g'(x)$ dan $g''(x)$ untuk $x \neq 0$, dan $g'''(x)$ untuk $x \neq 0$. Tunjukkan bahwa $g'''(0)$ tidak ada.

28. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan aturan Leibniz untuk turunan ke$-n$ dari perkalian

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

29. Tunjukkan bahwa jika $x > 0$, maka $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{1}{2}x$.

30. Gunakan Teorema Taylor dengan $n = 2$ untuk mendapatkan aproksimasi yang akurat untuk $\sqrt{1,2}$ dan $\sqrt{2}$.

31. Jika $x > 0$, tunjukkan bahwa $|(1+x)^{1/3}-(1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2)| \leq \frac{5}{81}x^3$. Gunakan ketaksamaan ini untuk mengaproksimasi $\sqrt[3]{1,2}$ dan $\sqrt[3]{2}$

32. Jika $g(x) = \sin x$, tunjukkan bahwa suku sisa dalam Teorema Taylor konvergen ke 0 apabila $n \to \infty$ untuk setiap titik tetap x_0 dan x.

33. Jika $x \in [0,1]$ dan $n \in \mathbb{N}$, tunjukkan bahwa

$$\left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Gunakan hasil ini untuk mengaproksimasi $\ln 1,5$ dengan kesalahan kurang dari $0,01$.

34. Akan diaproksimasi nilai sinus dengan menggunakan polinomial pada selang $[-1, 1]$ sehingga kesalahannya kurang dari $0,001$. Tunjukkan bahwa

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) \right| < \frac{1}{5040} \qquad \text{untuk} \qquad |x| \le 1.$$

35. Hitung nilai e dengan tepat sampai ketelitian 7 angka di belakang koma.

36. Tentukan apakah $x = 0$ merupakan titik ekstrim relatif fungsi-fungsi berikut:

    (a) $f(x) = x^3 + 2$

    (b) $g(x) = \sin x - x$

    (c) $h(x) = \sin x + \frac{1}{6}x^3$

    (d) $k(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$.

37. Diberikan f fungsi kontinu pada $[a, b]$ dan f'' ada pada (a, b). Anggap grafik fungsi f dan segmen garis yang menghubungkan titik $(a, f(a))$ dan titik $(b, f(b))$ berpotongan di titik $(x_0, f(x_0))$ dengan $a < x_0 < b$. Tunjukkan bahwa terdapat titik $c \in (a, b)$ sedemikian hingga $f''(c) = 0$.

38. Diberikan selang $I \subseteq \mathbb{R}$ dan $c \in I$. Anggap f dan g dua fungsi yang terdefinisi pada I dan turunan $f^{(n)}, g^{(n)}$ ada dan kontinu pada I. Jika $f^{(k)}(c) = 0$ dan $g^{(k)}(c) = 0$ untuk $k = 0, 1, \cdots, n-1$, tetapi $g^{(n)}(c) \neq 0$, tunjukkan bahwa
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$

39. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^3 - 2x - 5$ mempunyai akar r di selang $I = [2,\ 2,2]$. Jika $x_1 = 2$ dan jika didefinisikan barisan $\{x_n\}$ menggunakan prosedur Newton, tunjukkan bahwa $|x_{n+1} - r| \le (0,7)|x_n - r|^2$. Tunjukkan bahwa x_4 akurat hingga enam angka di belakang koma.

40. Aproksimasi akar $g(x) = x^4 - x - 3$.

41. Aproksimasi akar $h(x) = x^3 - x - 1$ dengan menerapkan metode Newton dengan nilai awal (a) $x_1 = 2$, (b) $x_1 = 0$, (c) $x_1 = -2$. Jelaskan apa yang terjadi!

42. Persamaan $\ln x = (x - 2)$ mempunyai dua penyelesaian. Aproksimasi penyelesaian-penyelesaian tersebut dengan menggunakan metode Newton. Apa yang terjadi jika $x_1 = \frac{1}{2}$ sebagai titik awal?

43. Fungsi $f(x) = 8x^3 - 8x^2 + 1$ mempunyai dua akar penyelesaian di selang $[0, 1]$. Aproksimasikan penyelesaian tersebut dengan menggunakan metode Newton, dengan titik awal (a) $x_1 = \frac{1}{8}$, (b) $x_1 = \frac{1}{4}$. Jelaskan apa yang terjadi !

44. Aproksimasi penyelesaian persamaan $x = \cos x$, dengan ketelitian sampai enam angka di belakang koma.

5.10 Bahan Bacaan dan Rujukan Lebih Lanjut

1. Bartle, R.G. dan D.R. Sherbert, 2011, *Introduction to Real Analysis*, edisi keempat, New York: John Wiley & Sons, Inc.

2. Larson, L., 2015, *Introduction to Real Analysis*, University of Louisville

3. Trench, W.F., 2013, *Introduction to Real Analysis*, USA:Pearson Education

Bab 6

Integral Riemann

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. dapat menghitung jumlah Riemann fungsi pada selang tertutup dan terbatas terkait dengan partisi yang diberikan;
2. dapat menunjukkan suatu fungsi terintegral Riemann dengan menggunakan definsi fungsi terintegral;
3. dapat menggunakan sifat-sifat integral Riemann;
4. menggunakan kriteria Cauchy untuk menunjukkan suatu fungsi terintegral Riemann atau tidak;
5. menunjukkan suatu fungsi terintegral Riemann dengan menunjukkan fungsi tersebut masuk dalam salah satu kelas fungsi terintegral Riemann;
6. menunjukkan sifat keaditifan integral Riemann;
7. dapat menggunakan Teorema Dasar Kalkulus bentuk pertama untuk menghitung integral fungsi pada selang tutup dan terbatas;
8. mengetahui integral tak tentu suatu fungsi;
9. dapat menggunakan integral parsial;

10. dapat menghitung/menentukan jumlah atas dan jumlah bawah suatu fungsi yang terdefinisi pada selang tertutup dan terbatas terkait dengan partisi yang diberikan;

11. dapat menghitung/menentukan integral atas dan integral bawah suatu fungsi yang terdefinisi pada selang tertutup dan terbatas;

12. memeriksa apakah suatu fungsi terintegral Darboux atau tidak, dan jika fungsi terintegral Darboux dapat menentukan nilai integralnya;

13. mengatahui dan dapat menunjukkan hubungan antara integral Darboux dan integral Riemann.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (17 September 1826 - 20 Juli 1866) adalah seorang matematikawan berpengaruh asal Jerman. Riemann memberikan banyak kontribusi dalam bidang matematika, salah satunya pada integral. Meskipun teorema dasar kalkulus telah dikemukakan oleh Newton sebelumnya, namun Riemann memberikan definisi mutakhir tentang integral tentu yang bersifat konstruktif. Atas sumbangannya inilah, integral tentu sering disebut sebagai Integral Riemann.

6.1 Definisi dan Sifat-sifat Integral Riemann

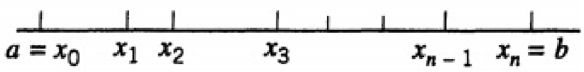
Sebelum memahami integral Riemann, di awal subbab ini akan diberikan terlebih dahulu pengertian partisi pada selang, partisi bertanda, dan jumlah Riemann.

6.1.1 Partisi pada Selang dan Jumlah Riemann

Diberikan $I = [a, b]$ selang tertutup dan terbatas di dalam $\mathbb{R}$. **Partisi** pada I adalah $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ himpunan titik-titik berhingga dan terurut di dalam I sedemikian hingga

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Titik-titik pada $\mathcal{P}$ digunakan untuk membagi selang $I = [a, b]$ ke dalam sub-sub selang yang tidak saling tumpang-tindih, seperti terlihat pada Gambar 6.1. Sering pula notasi partisi $\mathcal{P}$ dinyatakan dengan $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$.



Gambar 6.1: Partisi pada $[a, b]$

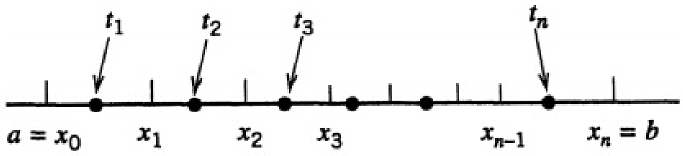
Selanjutnya didefinisikan **norma** pada $\mathcal{P}$, ditulis $||\mathcal{P}||$, merupakan bilangan

$$||\mathcal{P}|| = maks\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Jadi, norma pada $\mathcal{P}$ adalah panjang subselang terbesar yang membagi partisi selang $[a, b]$. Jika dipilih titik t_i di setiap subselang $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$, maka titik-titik tersebut disebut **tag** dari subselang I_i. Himpunan pasangan terurut selang dan titik

$$\dot{\mathcal{P}} = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$$

dari sub-subselang dan bersesuaian dengan tag disebut **partisi bertanda** pada I. Gambar 6.2 merupakan contoh partisi bertanda pada $[a, b]$.

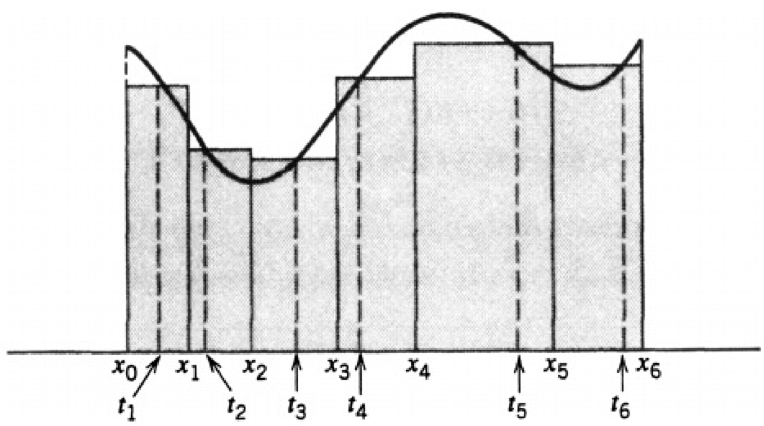


Gambar 6.2: Partisi bertanda pada $[a, b]$

Jika $\dot{\mathcal{P}}$ menyatakan partisi bertanda pada $[a, b]$, didefinisikan **jumlah Riemann** fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ yang bersesuaian dengan $\dot{\mathcal{P}}$, dinotasikan $S(f; \dot{\mathcal{P}})$, adalah bilangan

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{6.1}$$

Bila diperhatikan, jika f merupakan fungsi positif pada $[a, b]$ maka jumlah Riemann (6.1) merupakan jumlah luasan n persegipanjang masing-masing dengan alas subselang I_i dan tinggi $f(t_i)$, lihat Gambar 6.3.



Gambar 6.3: Jumlah Riemann

6.1.2 Integral Riemann: Definisi dan Contoh

Untuk mengawali subbab ini, didefinisikan integral Riemann fungsi f pada selang tertutup dan terbatas $[a, b]$.

Definisi 6.1. *Fungsi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dikatakan* **terintegral Riemann** *pada* $[a, b]$ *jika terdapat bilangan* $L \in \mathbb{R}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $\epsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sehingga jika* $\dot{\mathcal{P}}$ *sebarang partisi bertanda pada* $[a, b]$ *dengan* $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$, *maka*

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| < \epsilon.$$

Selanjutnya, koleksi semua fungsi terintegral Rieman pada $[a, b]$ dinotasikan dengan $\mathcal{R}[a, b]$.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$, maka bilangan L di dalam Definisi 6.1 tunggal adanya, disebut **nilai integral Riemann** atau cukup **nilai integral** f pada $[a, b]$. Bilangan L tersebut biasanya ditulis sebagai

$$L = \int_a^b f \qquad \text{atau} \qquad L = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Teorema 6.2. *Jika* $f \in \mathcal{R}[a, b]$, *maka nilai integralnya tunggal.*

Bukti. Diberikan L_1 dan L_2 keduanya nilai integral f pada $[a, b]$ dan diberikan sebarang bilangan $\epsilon > 0$.
Terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}_1$ sebarang partisi bertanda pada $[a, b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}_1|| < \delta_1$, berlaku

$$\left|S(f; \dot{\mathcal{P}}_1) - L_1\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Terdapat $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}_2$ sebarang partisi bertanda pada $[a, b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}_2|| < \delta_2$, berlaku

$$\left|S(f; \dot{\mathcal{P}}_2) - L_2\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Diambil $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Jika $\dot{\mathcal{P}}$ sebarang partisi bertanda pada $[a, b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$, maka berlaku $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta_1$ dan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta_2$. Dengan demikian berlaku

$$\left|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L_1\right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{dan} \qquad \left|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L_2\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned}\left|L_1 - L_2\right| &= \left|L_1 - S(f;\dot{\mathcal{P}}) + S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_2\right| \\ &\leq \left|L_1 - S(f;\dot{\mathcal{P}})\right| + \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_2\right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $L_1 = L_2$. □

Teorema 6.3. *Jika $g \in \mathcal{R}[a,b]$ dan jika $f(x) = g(x)$ kecuali berhingga titik di $[a,b]$, maka $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Bukti. Akan dibuktikan untuk kasus himpunan $\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ singleton, sedang untuk kasus berhingga titik dapat digunakan induksi matematika (sebagai latihan).

Diberikan $c \in [a,b]$ dengan $f(c) \neq g(c)$ dan $L = \int_a^b g$. Anggap bahwa $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \neq c$. Untuk $\dot{\mathcal{P}}$ sebarang partisi bertanda pada $[a,b]$, suku-suku di dalam jumlah Riemann $S(f;\dot{\mathcal{P}})$ dan $S(g;\dot{\mathcal{P}})$ identik kecuali paling banyak dua suku, yakni jika $c = x_{i-1}$ atau $c = x_i$ sebagai titik ujung subselang. Oleh karena itu, diperoleh

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(g;\dot{\mathcal{P}})\right| = \left|\sum (f(x_i) - g(x_i))(x_i - x_{i-1})\right| \leq 2(|g(c)| + |f(c)|)||\dot{\mathcal{P}}||.$$

Diberikan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang. Pilih $\delta_1 > 0$ yang memenuhi $\delta_1 < \epsilon/(4(|f(c)|+|g(c)|)$ dan $\delta_2 > 0$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta_2$ yang berakibat $|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - L| < \epsilon/2$. Selanjutnya, diberikan $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Jadi, jika $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$, diperoleh

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L\right| \leq \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(g;\dot{\mathcal{P}})\right| + \left|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - L\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ini menunjukkan $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $\int_a^b f = L = \int_a^b g$. □

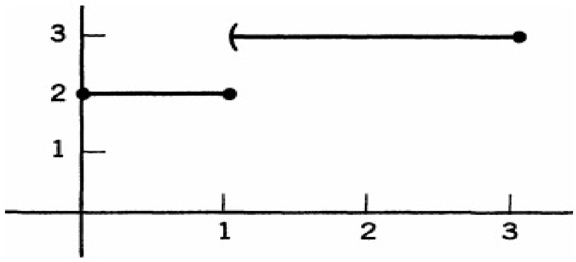
Contoh 6.4. *(a). Jika f fungsi konstan pada $[a,b]$, maka $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*
Diberikan $f(x) = k$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Jika $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ sebarang partisi bertanda pada $[a,b]$, maka diperoleh

$$S(f;\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k(b-a).$$

Jika diberikan bilangan $\epsilon > 0$ *sebarang, maka dipilih* $\delta = 1$ *sehingga jika* $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$*, diperoleh*

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - k(b-a)\right| = 0 < \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ *sebarang, disimpulkan* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *dan* $\int_a^b f = k(b-a)$*.*
(b). Diberikan fungsi $g : [0,3] \to \mathbb{R}$ *yang didefinisikan dengan* $g(x) = 2$ *untuk* $0 \leq x \leq 1$*, dan* $g(x) = 3$ *untuk* $1 < x \leq 3$*. Sebagai dugaan awal, dari grafik* g *yang diberikan pada Gambar 6.4, diklaim* $\int_0^3 g = 8$*.*



Gambar 6.4: Grafik fungsi g

Diberikan $\dot{\mathcal{P}}$ *sebarang partisi bertanda pada* $[0,3]$ *dengan* $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$*. Di sini terlebih dahulu akan ditentukan* $\delta > 0$ *yang menjamin* $|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - 8| < \epsilon$*. Diberikan* $\dot{\mathcal{P}}_1 \subseteq \dot{\mathcal{P}}$ *dengan titik-titik tag di selang* $[0,1]$ *dengan* $g(x) = 2$*, dan diberikan* $\dot{\mathcal{P}}_2 \subseteq \dot{\mathcal{P}}$ *dengan titik-titik tag di selang* $(1,3]$ *dengan* $g(x) = 3$*. Dengan demikian diperoleh*

$$S(g;\dot{\mathcal{P}}) = S(g;\dot{\mathcal{P}}_1) + S(g;\dot{\mathcal{P}}_2) \tag{6.2}$$

Jika diberikan U_1 *yang menyatakan gabungan sub-sub selang di* $\dot{\mathcal{P}}_1$*, maka berlaku*

$$[0, 1-\delta] \subset U_1 \subset [0, 1+\delta]. \tag{6.3}$$

Sebagai contoh, untuk membuktikan inklusi pertama, diberikan $u \in [0, 1-\delta]$*. Maka* u *berada di selang* $I_k = [x_{k-1} - x_k]$ *pada* $\mathcal{P}_1$*, dan karena* $||\mathcal{P}|| < \delta$*, diperoleh* $x_k - x_{k-1} < \delta$*. Oleh karena itu,* $x_{k-1} \leq u \leq 1-\delta$ *mengakibatkan* $x_k \leq x_{k-1} + \delta \leq (1-\delta) + \delta \leq 1$*. Jadi tag* $t_k \in I_k$ *memenuhi* $t_k \leq 1$*, oleh karena itu* u *berada di subselang yang tagnya ada di* $[0,1]$*, yakni* $u \in U_1$*. Ini membuktikan inklusi pertama di (6.3), dan inklusi kedua dapat ditunjukkan dengan cara yang sama. Karena* $g(t_k) = 2$ *untuk tag-tag di* $\mathcal{P}_1$ *dan karena* *selang-selang di (6.3) mempunyai panjang masing-masing* $1 - \delta$ *dan* $1 + \delta$, *akibatnya diperoleh*

$$2(1 - \delta) \leq S(g; \dot{\mathcal{P}}_1) \leq 2(1 + \delta).$$

Dengan argumen serupa menunjukkan bahwa gabungan sub-subselang dengan tag $t_i \in (1, 3]$ *memuat selang* $[1 + \delta, 3]$ *dengan panjang* $2 - \delta$, *dan termuat di* $[1 - \delta, 3]$ *dengan panjang* $2 + \delta$. *Oleh karena itu*

$$3(2 - \delta) \leq S(g; \dot{\mathcal{P}}_2) \leq 3(2 + \delta).$$

Penambahan ketaksamaan-ketaksamaan di atas dan dengan menggunakan kesamaan (6.2), diperoleh

$$8 - 5\delta \leq S(g; \dot{\mathcal{P}}) = S(g; \dot{\mathcal{P}}_1) + S(g; \dot{\mathcal{P}}_2) \leq 8 + 5\delta,$$

sehingga diperoleh

$$|S(g; \dot{\mathcal{P}}) - 8| \leq 5\delta.$$

Agar ketaksamaan terakhir di atas pada ruas kanan kurang dari ϵ, *dipilih* $\delta < \epsilon/5$.
Karena $\epsilon > 0$ *sebarang, disimpulkan* $g \in \mathcal{R}[0, 3]$ *dan* $\int_0^3 g = 8$.
(c). Diberikan $G(x) = 1/n$ *untuk* $x = 1/n (n \in \mathbb{N})$, *dan* $G(x) = 0$ *untuk selainnya pada selang* $[0, 1]$.
Diberikan sebarang bilangan $\epsilon > 0$, *dan dibentuk himpunan*

$$E = \{x \in [0, 1] : G(x) \geq \epsilon\}$$

yang merupakan himpunan berhingga (sebagai contoh jika $\epsilon = 1/10$, *maka* $E = \{1, 1/2, \cdots, 1/10\}$*). Jika* n *menyatakan banyaknya titik-titik di* E, *bisa mungkin sebuah tag dihitung dua kali jika ia merupakan titik ujung dan diberikan* $\delta = \epsilon/2n$. *Jika diberikan* $\dot{\mathcal{P}}$ *sebarang partisi bertanda pada* $[0, 1]$ *sedemikian hingga* $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$, *diberikan* $\dot{\mathcal{P}}_0 \subseteq \dot{\mathcal{P}}$ *dengan semua tag berada di luar* E *dan diberikan* $\dot{\mathcal{P}}_1 \subseteq \dot{\mathcal{P}}$ *dengan satu atau lebih tag-tagnya di* E. *Karena* $G(x) < \epsilon$ *untuk setiap* x *di luar* E *dan* $G(x) \leq 1$ *untuk setiap* $x \in [0, 1]$ *diperoleh*

$$0 \leq S(G; \dot{\mathcal{P}}) = S(G; \dot{\mathcal{P}}_0) + S(G; \dot{\mathcal{P}}_1) < \epsilon + (2n)\delta = 2\epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ *sebarang, disimpulkan* $G \in \mathcal{R}[0, 1]$ *dengan* $\int_0^1 G = 0$.

6.1.3 Sifat-sifat Integral Riemann

Beberapa sifat integral Riemann dituangkan dalam teorema-teorema berikut.

Teorema 6.5. *Diberikan* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$.

(i). Jika $k \in \mathbb{R}$, *maka* $kf \in \mathcal{R}[a, b]$ *dan*

$$\int_a^b kf = k \int_a^b f.$$

(ii). $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ *dan*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(iii). Jika $f(x) \leq g(x)$ *untuk setiap* $x \in [a, b]$, *maka*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Bukti. Jika $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ partisi bertanda pada $[a, b]$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} S(kf; \dot{\mathcal{P}}) &= kS(f; \dot{\mathcal{P}}) \\ S(f + g; \dot{\mathcal{P}}) &= S(f; \dot{\mathcal{P}}) + S(g; \dot{\mathcal{P}}) \\ S(f; \dot{\mathcal{P}}) &\leq S(g; \dot{\mathcal{P}}) \end{aligned}$$

Akan dibuktikan (ii) dan (iii) saja, bukti (i) dapat digunakan sebagai latihan. Diberikan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang. Terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ sebarang partisi bertanda pada $[a, b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$, berlaku

$$\left| S(f; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{dan} \qquad \left| S(g; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b g \right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{6.4}$$

Untuk membuktikan (ii), mengikuti hasil berikut

$$\begin{aligned} \left| S(f + g; \dot{\mathcal{P}}) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| &= \left| S(f; \dot{\mathcal{P}}) + S(g; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f - \int_a^b g \right| \\ &\leq \left| S(f; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \right| + \left| S(g; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b g \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ dan

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Untuk membuktikan (iii), dari sifat ketaksamaan segitiga dan dari (6.4) berakibat

$$\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < S(f;\dot{\mathcal{P}}) \qquad \text{dan} \qquad S(g;\dot{\mathcal{P}}) < \int_a^b g + \frac{\epsilon}{2}.$$

Berdasarkan hasil $S(f;\dot{\mathcal{P}}) \leq S(g;\dot{\mathcal{P}})$, diperoleh

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g + \epsilon$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. □

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa setiap fungsi yang tak terbatas maka tidak terintegral Riemann melalui teorema berikut.

Teorema 6.6. *Jika $f \in \mathcal{R}[a,b]$ maka f terbatas pada $[a,b]$.*

Bukti. Andaikan f fungsi tak terbatas tetapi terintegral Riemann pada $[a,b]$ dengan nilai integralnya L. Terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ sebarang partisi bertanda pada $[a,b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$, maka dipunyai $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < 1$ yang berakibat

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}})| < |L| + 1. \tag{6.5}$$

Diberikan $\mathcal{Q} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ partisi pada $[a,b]$ dengan $||\mathcal{Q}|| < \delta$. Karena $|f|$ tidak terbatas pada $[a,b]$, maka terdapat sedikitnya satu subselang di $\mathcal{Q}$, katakan $[x_{k-1}, x_k]$, yang mana $|f|$ tidak terbatas.
Selanjutnya, pilih tag-tag untuk $\mathcal{Q}$ yang akan memberkan kontradiksi dengan (6.5). Selanjutnya, tag partisi $\mathcal{Q}$ dengan $t_i = x_i$ untuk $i \neq k$ dan pilih $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ sehingga

$$\Big|f(t_k)(x_k - x_{k-1})\Big| > |L| + 1 + \Big|\sum_{i\neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\Big|$$

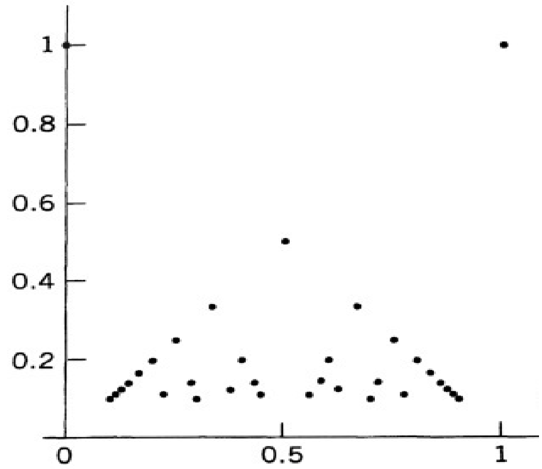
Dengan sifat ketaksamaan segitiga (di sini dalam bentuk $|A+B| \geq |A| - |B|$), diperoleh

$$|S(f;\dot{\mathcal{Q}})| \geq |f(t_k)(x_k - x_{k-1})| - \Big|\sum_{i\neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\Big| > |L| + 1,$$

yang kontradiksi dengan (6.5). Jadi haruslah f terbatas pada $[a,b]$. □

Mengakhiri sub bab ini, akan diberikan contoh fungsi yang tidak kontinu di setiap bilangan rasional dan bukan fungsi monoton tetapi tetap bisa terintegral Riemann.

Contoh 6.7. *Pandang fungsi Thomae* $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ *yang didefinisikan* $h(x) = 0$ *jika* x *irasional dan* $h(x) = 1/n$ *jika* x *rasional di* $[0,1]$ *yang dinyatakan* $x = m/n$ *dengan* m, n *bilangan asli yang keduanya relatif prima, grafik fungsinya diberikan pada Gambar 6.5.*



Gambar 6.5: Grafik fungsi Thomae pada selang $[0,1]$

Untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, dibentuk himpunan $E = \{x \in [0,1] : h(x) \geq \epsilon/2\}$ yang merupakan himpunan hingga (sebagai contoh, jika $\epsilon/2 = 1/5$, maka terdapat sebelas nilai x yang memenuhi $h(x) \geq 1/5$, yakni $0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5$). Misalkan n menyatakan banyaknya anggota di E dan diambil $\delta = \epsilon/(4n)$. Jika diberikan $\dot{\mathcal{P}}$ sebarang partisi bertanda pada $[0,1]$ sedemikian hingga $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$, maka displit dalam dua subhimpunan:

$\dot{\mathcal{P}}_1$ menyatakan koleksi yang tagnya di E, dan

$\dot{\mathcal{P}}_2$ menyatakan koleksi yang tagnya di luar E.

Dapat dimungkinkan bahwa tag di $\dot{\mathcal{P}}_1$ merupakan suatu titik ujung selang yang bertetangga. Diperhatikan bahwa $\dot{\mathcal{P}}_1$ mempunyai paling banyak $2n$ sub-selang dan panjang total sub-sub selang ini dapat mencapai $2n\delta = \epsilon/2$. Begitu juga dipunyai $0 < h(t_i) \leq 1$ untuk setiap tag t_i di $\dot{\mathcal{P}}_1$. Akibatnya dipunyai $S(h; \dot{\mathcal{P}}_1) \leq 1 \cdot 2n\delta \leq \epsilon/2$. Untuk tag t_i di $\dot{\mathcal{P}}_2$, dipunyai $h(t_i) < \epsilon/2$ dan panjang total subselang di $\dot{\mathcal{P}}_2$ kurang dari 1, sehingga $S(h;\dot{\mathcal{P}}_2) < (\epsilon/2)\cdot 1 = \epsilon/2$. Oleh karena itu, dengan mengkombinasikan hasil-hasil ini, diperoleh

$$0 \le S(h;\dot{\mathcal{P}}) = S(h;\dot{\mathcal{P}}_1) + S(h;\dot{\mathcal{P}}_2) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $h \in \mathcal{R}[0,1]$ dengan $\int_0^1 h = 0$.

6.2 Fungsi Terintegral Riemann

Sebelum membahas fungsi-fungsi terintegral Riemann, terlebih dahulu membahas kriteria Cauchy untuk keterintegralan fungsi.

6.2.1 Kriteria Cauchy

Teorema berikut merupakan kriteria untuk menunjukkan suatu fungsi terintegral Riemann atau tidak.

Teorema 6.8. Kriteria Cauchy *$f \in \mathcal{R}[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\eta_\epsilon > 0$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ sebarang dua partisi bertanda pada $[a,b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \eta_\epsilon$ dan $||\dot{\mathcal{Q}}|| < \eta_\epsilon$, maka*

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{Q}})\right| < \epsilon.$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Jika $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dengan $\int_a^b f = L$, diberikan $\eta_\epsilon = \delta_{\epsilon/2} > 0$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ dua partisi bertanda pada $[a,b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \eta_\epsilon$ dan $||\dot{\mathcal{Q}}|| < \eta_\epsilon$, maka

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L\right| < \epsilon/2 \qquad \text{dan} \qquad \left|S(f;\dot{\mathcal{Q}}) - L\right| < \epsilon/2.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}
\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{Q}})\right| &= \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L + L - S(f;\dot{\mathcal{Q}})\right| \\
&\le \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L\right| + \left|L - S(f;\dot{\mathcal{Q}})\right| \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diberikan $\delta_n > 0$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ keduanya partisi bertanda pada $[a,b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta_n$ dan $||\dot{\mathcal{Q}}|| < \delta_n$, maka

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{Q}})\right| < \frac{1}{n}.$$

Anggap bahwa $\delta_n \geq \delta_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, jika tidak seperti itu ganti δ_n dengan $\delta'_n = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$.
Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diberikan $\dot{\mathcal{P}}_n$ partisi bertanda pada $[a, b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}_n|| < \delta_n$. Cukup jelas, jika $m > n$ maka $\dot{\mathcal{P}}_n$ dan $\dot{\mathcal{P}}_m$ keduanya mempunyai norma $< \delta_n$, sehingga berlaku

$$\left|S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) - S(f; \dot{\mathcal{P}}_m)\right| < \frac{1}{n} \qquad \text{untuk} \qquad m > n. \tag{6.6}$$

Akibatnya, barisan $\{S(f; \dot{\mathcal{P}}_m)\}_{m=1}^{\infty}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Oleh karena itu, barisan tersebut konvergen di $\mathbb{R}$, misalkan konvergen ke A.
Ambil limit di (6.6) untuk $m \to \infty$, dipunyai

$$\left|S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) - A\right| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{untuk} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Selanjutnya, diberikan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang dan diambil bilangan $K \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $K > 2/\epsilon$. Jika $\dot{\mathcal{Q}}$ sebarang partisi bertanda pada $[a, b]$ dengan $||\dot{\mathcal{Q}}|| < \delta_K$, maka

$$\begin{aligned} \left|S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - A\right| &\leq \left|S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - S(f; \dot{\mathcal{P}}_K)\right| + \left|S(f; \dot{\mathcal{P}}_K) - A\right| \\ &\leq 1/K + 1/K < \epsilon. \end{aligned}$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, maka $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $\int_a^b f = A$. □

Berikut diberikan contoh penggunaan Kriteria Cauchy.

Contoh 6.9. *Diberikan $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$ fungsi yang diberikan dalam Contoh 6.4 (b). Dalam contoh itu ditunjukkan bahwa jika $\dot{\mathcal{P}}$ partisi bertanda pada $[0, 3]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$, maka*

$$8 - 5\delta \leq S(g; \dot{\mathcal{P}}) \leq 8 + 5\delta.$$

Oleh karena itu, jika $\dot{\mathcal{Q}}$ partisi bertanda pada $[a, b]$ yang lain dengan $||\dot{\mathcal{Q}}|| < \delta$, maka

$$8 - 5\delta \leq S(g; \dot{\mathcal{Q}}) \leq 8 + 5\delta.$$

Jika kedua ketaksamaan terakhir di atas dikurangkan, diperoleh

$$\left|S(g; \dot{\mathcal{P}}) - S(g; \dot{\mathcal{Q}})\right| \leq 10\delta.$$

Agar suku akhir ketaksamaan ini kurang dari ϵ, diterapkan Kriteria Cauchy dengan mengambil $\eta_\epsilon = \epsilon/20$.

Teorema 6.10. Teorema Apit *Diberikan* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\epsilon > 0$ *terdapat fungsi* $\alpha_\epsilon, \omega_\epsilon \in \mathcal{R}[a,b]$ *dengan*

$$\alpha_\epsilon(x) \le f(x) \le \omega_\epsilon(x) \qquad \textit{untuk setiap} \qquad x \in [a,b] \tag{6.7}$$

sedemikian hingga

$$\int_a^b (\omega_\epsilon - \alpha_\epsilon) < \epsilon. \tag{6.8}$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Diambil $\alpha_\epsilon = \omega_\epsilon = f$ untuk setiap $\epsilon > 0$.
($\Leftarrow$) Diberikan bilangan $\epsilon > 0$ sebarang. Karena $\alpha_\epsilon, \omega_\epsilon \in \mathcal{R}[a,b]$, terdapat $\delta_\epsilon > 0$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ sebarang partisi bertanda pada $[a,b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta_\epsilon$, maka

$$\left| S(\alpha_\epsilon; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b \alpha_\epsilon \right| < \epsilon \qquad \text{dan} \qquad \left| S(\omega_\epsilon; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b \omega_\epsilon \right| < \epsilon$$

Dari dua ketaksamaan ini, diperoleh

$$\int_a^b \alpha_\epsilon - \epsilon < S(\alpha_\epsilon; \dot{\mathcal{P}}) \qquad \text{dan} \qquad S(\omega_\epsilon; \dot{\mathcal{P}}) < \int_a^b \omega_\epsilon + \epsilon.$$

Dari ketaksamaan (6.7), diperoleh $S(\alpha_\epsilon; \dot{\mathcal{P}}) \le S(f; \dot{\mathcal{P}}) \le S(\omega_\epsilon; \dot{\mathcal{P}})$, oleh karena itu diperoleh

$$\int_a^b \alpha_\epsilon - \epsilon < S(f; \dot{\mathcal{P}}) < \int_a^b \omega_\epsilon + \epsilon.$$

Jika $\dot{\mathcal{Q}}$ partisi bertanda pada $[a,b]$ yang lain dengan $||\dot{\mathcal{Q}}|| < \delta_\epsilon$, maka dipunyai

$$\int_a^b \alpha_\epsilon - \epsilon < S(f; \dot{\mathcal{Q}}) < \int_a^b \omega_\epsilon + \epsilon.$$

Jika kedua ketaksamaan terakhir di atas dikurangkan dan dengan menggunakan ketaksamaan (6.8), diperoleh

$$\begin{aligned} \left| S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}) \right| &< \int_a^b \omega_\epsilon - \int_a^b \alpha_\epsilon + 2\epsilon \\ &= \int_a^b (\omega_\epsilon - \alpha_\epsilon) + 2\epsilon < 3\epsilon. \end{aligned}$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang dan berdasarkan Kriteria Cauchy, disimpulkan bahwa $f \in \mathcal{R}[a,b]$. $\square$

6.2.2 Kelas Fungsi Terintegral Riemann

Akan dibahas kelas-kelas fungsi terintegral Riemann pada selang tertutup dan terbatas. Sebelum itu, diberikan satu lemma berikut.

Lemma 6.11. *Jika J suatu subselang pada $[a, b]$ dengan titik-titik ujung $c < d$ dan jika $\phi_J(x) = 1$ untuk setiap $x \in J$ dan $\phi_J(x) = 0$ untuk yang lainnya di $[a, b]$, maka $\phi_J \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $\int_a^b \phi_J = d - c$.*

Bukti. Jika $J = [c, d]$ dengan $c \leq d$, dapat dipilih $\delta_\epsilon = \epsilon/4$.
Terdapat tiga sub-sub selang yang lain yang mempunyai titik-titik ujung c dan d, namakan $[c, d), (c, d]$, dan (c, d). Berdasarkan Teorema 6.3, dapat diubah nilai fungsi di tak hingga untuk beberapa titik tanpa mengubah nilai integral, dipunyai hasil yang sama untuk tiga subselang yang lain. Oleh karena itu disimpulkan bahwa empat fungsi ϕ_J terintegral dengan nilai integral sama dengan $d - c$. □

Untuk kelas fungsi terintegral Riemann pertama, diawali dengan kelas fungsi tangga.

Teorema 6.12. *Jika $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi tangga, maka $\phi \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Bukti. Setiap fungsi tangga dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear fungsi tangga elementer:

$$\phi = \sum_{j=1}^{m} k_j \phi_{J_j} \tag{6.9}$$

dengan J_j mempunyai titik-titik ujung $c_j < d_j$. Dari Lemma 6.11 dan Teorema 6.5 (i) dan (ii), berakibat bahwa $\phi \in \mathcal{R}[a, b]$ dan

$$\int_a^b \phi = \sum_{j=1}^{m} k_j (d_j - c_j).$$ □

Contoh 6.13. *(a). Diberikan fungsi g pada $[0, 3]$ dengan $g(x) = 2$ untuk $0 \leq x \leq 1$ dan $g(x) = 3$ untuk $1 < x \leq 3$. Diperhatikan bahwa g merupakan fungsi tangga, oleh karena itu nilai integralnya $\int_0^3 g = 2\dot{(}1-0)+3\dot{(}3-1) = 2+6 = 8$.*
(b). Diberikan $h(x) = x$ pada $[0, 1]$ dan diberikan $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \cdots, (n - 1)/n, n/n = 1\}$. Didefinisikan fungsi tangga α_n dan ω_n pada sub-sub selang saling asing $[0, 1/n), [1/n, 2/n), \cdots, [(n - 1)/n, n]$ sebagai berikut: $\alpha_n(x) =$

$h((k-1)/n) = (k-1)/n$ untuk $x \in [(k-1)/n, k/n)$ untuk $k = 1, 2, \cdots, n-1$, dan $\alpha_n(x) = h((n-1)/n) = (n-1)/n$ untuk $x \in [(n-1)/n, 1]$. Yakni, α_n mempunyai nilai minimum h pada setiap sub selang. Dengan cara serupa, didefinisikan ω_n merupakan nilai maksimum h pada setiap subselangnya, yakni $\omega_n(x) = k/n$ untuk $x \in [(k-1)/n, k/n)$ untuk $k = 1, 2, \cdots, n-1$, dan $\omega_n(x) = 1$ untuk $x \in [(n-1)/n, 1]$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^1 \alpha_n &= \frac{1}{n}(0 + 1/n + 2/n + \cdots + (n-1)/n) \\ &= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}(1 - 1/n)\end{aligned}$$

Dengan cara serupa, didapatkan $\int_0^1 \omega_n = \frac{1}{2}(1 + 1/n)$. Jadi diperoleh

$$\alpha_n(x) \le h(x) \le \omega_n(x)$$

untuk setiap $x \in [0, 1]$ dan

$$\int_0^1 (\omega_n - \alpha_n) = \frac{1}{n}.$$

Karena untuk setiap $\epsilon > 0$, dapat dipilih $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{n} < \epsilon$, dengan menggunakan Teorema Apit disimpulkan $h \in \mathcal{R}[0, 1]$ dan $\int_0^1 h = \frac{1}{2}$. □

Selanjutnya, kelas fungsi terintegral Riemann kedua yakni kelas fungsi kontinu.

Teorema 6.14. *Jika $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu, maka $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Bukti. Jika f fungsi kontinu pada $[a, b]$, maka f kontinu seragam pada $[a, b]$. Oleh karena itu, setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta_\epsilon > 0$ sedemikian hingga jika $u, v \in [a, b]$ dan $|u - v| < \delta_\epsilon$, maka dipunyai $|f(u) - f(v)| < \epsilon/(b - a)$.
Diberikan $\mathcal{P} = \{I_i\}_{i=1}^n$ partisi pada $[a, b]$ sedemikian hingga $||\mathcal{P}|| < \delta_\epsilon$. Dengan menerapkan Teorema Maksimum-Minimum, diambil $u_i \in I_i$ suatu titik dimana f mencapai nilai minimumnya pada I_i, dan diberikan $v_i \in I_i$ dimana f mencapai maksimumnya pada I_i.
Diberikan α_ϵ fungsi tangga yang didefinisikan $\alpha_\epsilon(x) = f(u_i)$ untuk setiap $x \in [x_{i-1}, x_i), (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ dan $\alpha_\epsilon(x) = f(u_n)$ untuk $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Diberikan ω_ϵ didefinisikan $\omega_\epsilon(x) = f(v_i)$ untuk $x \in [x_{i-1}, x_i), (i = 1, 2, \cdots, n-1)$

dan $\omega_\epsilon(x) = f(v_n)$ untuk $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Oleh karena itu, dipunyai

$$\alpha_\epsilon(x) \le h(x) \le \omega_\epsilon(x) \qquad \text{untuk setiap} \qquad x \in [a, b].$$

Dengan demikian jelaslah berlaku

$$\begin{aligned} 0 \le \int_a^b (\omega_\epsilon - \alpha_\epsilon) &= \sum_{i=1}^{n} (f(v_i) - f(u_i))(x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\epsilon}{b-a}\right)(x_i - x_{i-1}) = \epsilon. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, dengan Teorema Apit disimpulkan $f \in \mathcal{R}[a, b]$. □

Kemudian, kelas fungsi terintegral Riemann ketiga adalah kelas fungsi monoton.

Teorema 6.15. *Jika $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi monoton, maka $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Bukti. Anggap f naik monoton pada $I = [a, b]$. Partisi selang $[a, b]$ ke dalam n subselang $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ sama panjang dengan panjang $x_k - x_{k-1} = (b - a)/n, k = 1, 2, \cdots, n$. Karena f naik monoton pada I_k, nilai minimumnya tercapai di ujung kiri subselang x_{k-1} dan nilai maksimumnya dicapai di ujung kanan x_k. Oleh karena itu, didefinisikan dua fungsi tangga $\alpha(x) = f(x_{k-1})$ dan $\omega(x) = f(x_k)$ untuk $x \in [x_{k-1}, x_k), k = 1, 2, \cdots, n - 1$, dan $\alpha(x) = f(x_{n-1})$ dan $\omega(x) = f(x_n)$ untuk $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Dengan demikian dipunyai $\alpha(x) \le f(x) \le \omega(x)$ untuk setiap $x \in I$, dan

$$\int_a^b \alpha = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}))$$

$$\int_a^b \omega = \frac{b-a}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

Kurangkan kedua persamaan terakhir di atas, diperoleh

$$\int_a^b (\omega - \alpha) = \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Jadi, jika diberikan $\epsilon > 0$, dipilih bilangan $n \in \mathbb{N}$ sehingga $n > (b - a)(f(b) - f(a))/\epsilon$. Dengan demikian diperoleh $\int_a^b (\omega - \alpha) < \epsilon$ dan dengan Teorema Apit berakibat f terintegral Riemann pada I. □

Teorema 6.16. Teorema Keaditifan *Diberikan* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dan diberikan* $c \in (a, b)$. $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *jika dan hanya jika* $f \in \mathcal{R}[a, c]$ *dan* $f \in \mathcal{R}[c, b]$. *Dalam kasus ini*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Anggap $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Jika diberikan $\epsilon > 0$, dipilih $\eta_\epsilon > 0$ yang memenuhi Kriteria Cauchy. Diberikan f_1 retriksi f pada $[a, c]$ dan diberikan $\dot{\mathcal{P}}_1, \dot{\mathcal{Q}}_1$ keduanya partisi bertanda pada $[a, c]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}_1|| < \eta_\epsilon$ dan $||\dot{\mathcal{Q}}_1|| < \eta_\epsilon$. Dengan penambahan titik-titik dan tag-tag tambahan dari $[c, b]$, $\dot{\mathcal{P}}_1$ dan $\dot{\mathcal{Q}}_1$ dapat diperluas masing-masing menjadi $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ partisi bertanda pada $[a, b]$ yang memenuhi $||\dot{\mathcal{P}}|| < \eta_\epsilon$ dan $||\dot{\mathcal{Q}}|| < \eta_\epsilon$. Jika digunakan titik dan tag tambahan yang sama di $[c, b]$ untuk kedua $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$, maka

$$S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1; \dot{\mathcal{Q}}_1) = S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}).$$

Karena $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ keduanya mempunyai norma kurang dari η_ϵ, maka $|S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1; \dot{\mathcal{Q}}_1)| < \epsilon$. Oleh karena itu Syarat Cauchy menunjukkan bahwa retriksi $f_1 \in \mathcal{R}[a, c]$. Dengan cara serupa untuk f_2 retriksi f pada $[c, b]$, diperoleh $f_2 \in \mathcal{R}[c, b]$.
($\Leftarrow$) Diberikan $c \in (a, b)$ dan f_1 dan f_2 masing-masing retriksi f pada $[a, c]$ dan $[c, b]$ dengan $f_1 \in \mathcal{R}[a, c]$ dan $f_2 \in \mathcal{R}[c, b]$ dan $\int_a^c f_1 = L_1$ dan $\int_c^b f_2 = L_2$. Untuk setiap $\epsilon > 0$ yang diberikan, pilih $\delta' > 0$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}_1$ sebarang partisi bertanda pada $[a, c]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}_1|| < \delta'$, maka $|S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - L_1| < \epsilon/3$. Pilih $\delta'' > 0$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}_2$ sebarang partisi bertanda pada $[c, b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}_2|| < \delta''$, maka $|S(f_2; \dot{\mathcal{P}}_2) - L_2| < \epsilon/3$. Karena f terintegral Riemann pada $[a, c]$ dan $[c, b]$, maka f terbatas pada $[a, b]$. Diambil $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| < M$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Didefinisikan $\delta_\epsilon = \min\{\delta', \delta'', \epsilon/6M\}$ dan diberikan $\dot{\mathcal{Q}}$ partisi bertanda pada $[a, b]$ dengan $||\dot{\mathcal{Q}}|| < \delta$. Akan dibuktikan bahwa

$$|S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - (L_1 + L_2)| < \epsilon. \tag{6.10}$$

Kasus 1. Jika c titik partisi pada $\dot{\mathcal{Q}}$, split $\dot{\mathcal{Q}}$ ke $\dot{\mathcal{Q}}_1$ pada $[a, c]$ dan $\dot{\mathcal{Q}}_2$ pada $[c, b]$. Karena $S(f; \dot{\mathcal{Q}}) = S(f; \dot{\mathcal{Q}}_1) + S(f; \dot{\mathcal{Q}})$, dan karena $||\dot{\mathcal{Q}}_1|| < \delta'$ dan $||\dot{\mathcal{Q}}_1|| < \delta''$, maka ketaksamaan (6.10) jelas dipenuhi.
Kasus 2. Jika c bukan titik partisi di dalam $\dot{\mathcal{Q}} = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^m$, maka terdapat

$k \leq m$ sehingga $c \in (x_{k-1}, x_k)$. Diberikan $\dot{\mathcal{Q}}_1$ partisi bertanda pada $[a, c]$ yang didefinisikan

$$\dot{\mathcal{Q}}_1 = \{(I_1, t_1), \cdots, (I_{k-1}, t_{k-1}), ([x_{k-1}, c], c)\},$$

dan $\dot{\mathcal{Q}}_2$ partisi bertanda pada $[c, b]$ yang didefinisikan

$$\dot{\mathcal{Q}}_2 = \{([c, x_k], c), (I_{k+1}, t_{k+1}), \cdots, (I_m, t_m)\},$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}_1) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}_2) &= f(t_k)(x_k - x_{k-1}) - f(c)(x_k - x_{k-1}) \\ &= (f(t_k) - f(c))(x_k - x_{k-1}), \end{aligned}$$

yang mana berarti

$$|S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}_1) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}_2)| \leq 2M(x_k - x_{k-1}) < \epsilon/3$$

Tetapi karena $||\dot{\mathcal{Q}}_1|| < \delta \leq \delta'$ dan $||\dot{\mathcal{Q}}_2|| < \delta \leq \delta''$, diperoleh

$$|S(f; \dot{\mathcal{Q}}_1) - L_1| < \epsilon/3 \qquad \text{dan} \qquad |S(f; \dot{\mathcal{Q}}_2) - L_2| < \epsilon/3$$

Dengan demikian

$$|S(f; \dot{\mathcal{Q}}) - (L_1 + L_2)| < \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan

$$\int_a^b f = L_1 + L_2 = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

Akibat 6.17. *Jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan jika $[c, d] \subseteq [a, b]$, maka $f \in \mathcal{R}[c, d]$.*

Bukti. Karena $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $c \in [a, b]$, dari Teorema 6.16 diperoleh $f \in \mathcal{R}[c, b]$. Jika $d \in [c, b]$, juga dengan Teorema 6.16, diperoleh $f \in \mathcal{R}[c, d]$. □

Akibat 6.18. *Jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan jika $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$, maka $f \in \mathcal{R}[c_{i-1}, c_i], i = 1, 2, \cdots, m$ dan*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

6.3 Teorema Dasar Kalkulus

Dalam subbab ini akan dibahas dua teorema dasar, yakni Teorema Dasar Kalkulus bentuk pertama dan bentuk kedua.

6.3.1 Teorema Dasar Kalkulus bentuk pertama

Teorema dasar kalkulus bentuk pertama, diberikan pada teorema berikut.

Teorema 6.19. Teorema Dasar Kalkulus I *Diberikan himpunan berhingga* $E \subset [a,b]$ *dan fungsi-fungsi* $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Jika syarat-syarat berikut dipenuhi:*

(i). F *kontinu pada* $[a,b]$*,*

(ii). $F'(x) = f(x)$ *untuk setiap* $x \in [a,b]\backslash E$*,*

(iii). $f \in \mathcal{R}[a,b]$*,*

maka

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \tag{6.11}$$

Bukti. Pertama, akan dibuktikan untuk kasus $E = \{a,b\}$.
Diberikan sebarang bilangan $\epsilon > 0$. Karena $f \in \mathcal{R}[a,b]$, sesuai asumsi (iii), terdapat $\delta_\epsilon > 0$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ sebarang partisi bertanda dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta_\epsilon$, maka

$$\left| S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \right| < \epsilon. \tag{6.12}$$

Jika subselang di dalam $\dot{\mathcal{P}}$ adalah $[x_{i-1}, x_i]$, dengan menerapkan Teorema Nilai Rata-rata ke F pada $[x_{i-1}, x_i]$ berakibat terdapat $u_i \in (x_{i-1}, x_i)$ sehingga

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(u_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{untuk} \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Jika ditambahkan suku-suku ini dan menggunakan fakta asumsi (iii) bahwa $F'(u_i) = f(u_i)$, diperoleh

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Selanjutnya diberikan $\dot{\mathcal{P}}_u = \{([x_{i-1}, x_i], u_i)\}_{i=1}^n$, sehingga jumlah pada ruas kanan sama dengan $S(f; \dot{\mathcal{P}}_u)$. Jika disubstitusikan $F(b) - F(a) = S(f; \dot{\mathcal{P}}_u)$ ke (6.12), disimpulkan

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f \right| < \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, maka (6.11) terpenuhi.
Untuk kasus umum E berhingga, dapat diperoleh dengan mempartisi selang $[a, b]$ ke dalam berhingga subselang dengan titik-titik ujung subselang merupakan titik-titik di E. □

Pada Teorema Dasar Kalkulus I (Teorema 6.19), jika himpunan $E = \emptyset$, maka fungsi F dikatakan **antiturunan** fungsi f pada $[a, b]$, yakni $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Sebagai contoh $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 3$ adalah antiturunan fungsi $f(x) = x + 1$ pada selang $I = [-1, 2]$, sebab $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [-1, 2]$. Tetapi $G(x) = |x|$ bukan merupakan antiturunan fungsi g pada selang $[-1, 2]$ yang didefinisikan $g(x) = 1$ untuk setiap $x \in [0, 2]$ dan $g(x) = -1$ untuk setiap $x \in [-1, 0)$. Hal ini dikarenakan $g(0) = 1$ tetapi $G'(0)$ tidak ada.

Untuk dapat menggunakan Teorema Dasar Kalkulus bentuk pertama ini, diberikan beberapa contoh berikut.

Contoh 6.20. *(a) Jika $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka $F'(x) = x$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Lebih jauh, $f = F'$ kontinu sehingga $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus I (dengan mengambil $E = \emptyset$) berakibat*

$$\int_a^b x\, dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

(b) Jika $G(x) = \arctan x$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka $G'(x) = 1/(x^2 + 1)$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Diperhatikan bahwa G' kontinu, sehingga $G' \in \mathcal{R}[a, b]$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus I (dengan mengambil $E = \emptyset$) berakibat

$$\int_a^b \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = \arctan b - \arctan a.$$

(c). Jika $A(x) = |x|$ untuk setiap $x \in [-10, 10]$, maka $A'(x) = -1$ jika $x \in [-10, 0)$ dan $A'(x) = 1$ untuk $x \in (0, 10]$ atau dapat dituliskan $A'(x) = sgn(x)$ untuk setiap $x \in [-10, 10] \backslash \{0\}$. Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus

I (dengan mengambil $E = \{0\}$) berakibat

$$\int_{-10}^{10} sgn(x)\ dx = A(10) - A(-10) = 10 - 10 = 0.$$

(d). Jika $H(x) = 2\sqrt{x}$ untuk $x \in [0, b]$, maka H kontinu pada $[0, b]$ dan $H'(x) = 1/\sqrt{x}$ untuk $x \in (0, b]$. Karena $h = H'$ tidak terbatas pada $(0, b]$, maka $h \notin \mathcal{R}[0, b]$. Oleh karena itu, Teorema Dasar Kalkulus I tidak dapat digunakan di sini.

(e). Diberikan $K(x) = x^2 \cos(1/x^2)$ untuk setiap $x \in (0, 1]$ dan $K(0) = 0$. Dengan Aturan Rantai diperoleh

$$K'(x) = 2x \cos(1/x^2) + (2/x) \sin(1/x^2) \qquad \text{untuk} \qquad x \in (0, 1].$$

Lebih jauh, dapat ditunjukkan bahwa $K'(0) = 0$. Jadi K kontinu dan diferensiabel di setiap titik pada $[0, 1]$. Karena fungsi K tidak terbatas pada $[0, 1]$, maka $K \notin \mathcal{R}[0, 1]$ dan Teorema Dasar Kalkulus I tidak dapat diterapkan ke K'.

6.3.2 Teorema Dasar Kalkulus bentuk kedua

Untuk membahas teorema dasar kalkulus bentuk kedua, diperkenalkan suatu definisi dan teorema untuk mengawalinya.

Definisi 6.21. *Diberikan $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Fungsi $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh*

$$F(z) = \int_a^z f \qquad \text{untuk} \qquad z \in [a, b], \tag{6.13}$$

disebut **integral tak tentu** *dari f dengan* **basepoint** *a.*

Dari penjelasan definisi di atas, bahwasannya fungsi F merupakan integral tak tentu dari fungsi f pada selang $[a, b]$ jika memenuhi persamaan (6.13). Ada perbedaan antara integral tak tentu dengan antiturunan, yakni jika F adalah antiturunan fungsi f pada selang $[a, b]$, maka F adalah integral tak tentu dari f pada selang $[a, b]$. Namun, jika F adalah integral tak tentu fungsi f pada selang $[a, b]$, maka F tidak perlu antiturunan dari f pada selang $[a, b]$. Sebagai contoh, $F(x) = |x| + 1$ adalah integral tak tentu dari fungsi f pada selang $[-1, 2]$ yang didefinisikan $f(x) = 1$ untuk setiap $x \in [0, 2]$ dan $f(x) = -1$ untuk setiap $x \in [-1, 0)$, tetapi F bukan merupakan antiturunan dari f pada selang $[-1, 2]$, sebab $F'(0)$ tidak ada sedangkan $f(0) = 1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika $f \in \mathcal{R}[a,b]$, maka integral tak tentu F memenuhi syarat Lipschitz, oleh karenanya F kontinu pada $[a,b]$.

Teorema 6.22. *Integral tak tentu F dari f yang didefinisikan pada (6.13) kontinu pada $[a,b]$. Kenyataannya, jika $|f(x)| \le M$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka $|F(z) - F(w)| \le M|z-w|$ untuk setiap $z, w \in [a,b]$.*

Bukti. Dari Teorema 6.16, jika $z, w \in [a,b]$ dan $w \le z$, diperoleh

$$F(z) = \int_a^z f = \int_a^w f + \int_w^z f = F(w) + \int_w^z f,$$

oleh karena itu dipunyai

$$F(z) - F(w) = \int_w^z f.$$

Selanjutnya, jika $-M \le f(x) \le M$ untuk setiap $x \in [a,b]$, dengan menggunakan Teorema 6.5 (iii), berakibat

$$-M(z-w) \le \int_w^z f \le M(z-w),$$

oleh karena itu

$$|F(z) - F(w)| = \left| \int_w^z f \right| \le M|z-w|$$

untuk setiap $z, w \in [a,b]$. □

Teorema 6.23. Teorema Dasar Kalkulus II *Diberikan $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Jika f kontinu di titik $c \in [a,b]$, maka integral tak tentu yang didefinisikan pada (6.13) diferensiabel di c dan $F'(c) = f(c)$.*

Bukti. Diberikan $c \in [a,b)$ dan pandang turunan kanan F di c. Karena f kontinu di c, untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\eta_\epsilon > 0$ sedemikian hingga jika $c \le x < c + \eta_\epsilon$, maka

$$f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon. \tag{6.14}$$

Diberikan h yang memenuhi $0 < h < \eta_\epsilon$. Berdasarkan Teorema 6.16 berakibat bahwa f terintegral pada selang $[a,c], [a,c+h]$ dan $[c,c+h]$ dan

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

Selanjutnya, pada selang $[c, c+h]$, fungsi f memenuhi ketaksamaan (6.14), sehingga dipunyai

$$(f(c)-\epsilon)h \leq F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f \leq (f(c)+\epsilon)h.$$

Jika semua ruas dibagi dengan $h > 0$ lalu dikurangi $f(c)$, diperoleh

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| \leq \epsilon.$$

Tetapi, karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan limit ruas kanan yang diberikan oleh

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c).$$

Dengan cara serupa, untuk $c \in (a, b]$ diperoleh

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c).$$

Jadi, ini membuktikan bahwa F diferensiabel di c dan $F'(c) = f(c)$. $\square$

Teorema 6.24. *Jika f kontinu pada $[a, b]$, maka integral tak tentu F yang didefinisikan pada (6.13), diferensiabel pada $[a, b]$ dan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.*

Teorema 6.24 dapat diringkas: jika f kontinu pada $[a, b]$ maka integral tak tentunya merupakan anti turunan f. Akan ditunjukkan secara umum, bahwa integral tak tentu tidak perlu merupakan anti turunan.

Contoh 6.25. *(a). Jika $f(x) = sign(x)$ pada selang $[-1, 1]$, maka $f \in \mathcal{R}[-1, 1]$ dan integral tak tentunya adalah $F(x) = |x| - 1$ dengan basepoint -1. Namun, karena $F'(0)$ tidak ada, maka F bukan antiturunan dari f pada $[-1, 1]$.*
(b). Jika h menyatakan fungsi Thomae, seperti diberikan pada Contoh 6.7, maka integral tak tentunya $H(x) = \int_0^x h$ identik dengan 0 pada selang $[0, 1]$. Di sini, turunan dari integral tak tentunya ada di setiap titik dan $H'(x) = 0$. Tetapi $H'(x) \neq h(x)$ bilamana $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, sehingga H bukanlah anti turunan h pada $[0.1]$.

Teorema 6.26. *Diberikan $J = [\alpha, \beta]$ dan diberikan $\phi : J \to \mathbb{R}$ mempunyai turunan yang kontinu pada J. Jika $f : I \to \mathbb{R}$ kontinu pada selang I yang memuat $\phi(J)$, maka*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)\ dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\ dx. \tag{6.15}$$

Contoh 6.27. *(a) Pandang integral*

$$\int_1^4 \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\ dt$$

Di sini, dengan mensubtitusikan $\phi(t) = \sqrt{t}$ untuk $t \in [1, 4]$ sehingga $\phi'(t) = 1/(2\sqrt{t})$ kontinu pada $[1, 4]$. Jika diberikan $f(x) = 2\sin x$, maka integrannya mempunyai bentuk $(f \circ \phi) \cdot \phi'$. Dengan Teorema 6.26 diperoleh

$$\int_1^4 \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\ dt = \int_1^2 2\sin x\ dx = -2\cos x\Big|_1^2 = 2(\cos 1 - \cos 2).$$

(b). Pandang integral

$$\int_0^4 \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\ dt$$

Karena $\phi(t) = \sqrt{t}$ tidak mempunyai turunan yang kontinu pada $[0, 4]$, Teorema 6.26 tidak dapat digunakan, paling tidak dengan substitusi ini. (Dapat menerapkan Teorema Dasar Kalkulus I untuk $F(t) = -2\cos\sqrt{t}$ dengan $E = \{0\}$ untuk mengevaluasi integral ini.)

6.3.3 Integral Parsial

Sebagai sub-subbab terakhir pada subbab ini, dibahas integral parsial.

Teorema 6.28. *Jika F dan G keduanya fungsi yang diferensiabel pada $[a, b]$ dan jika $f = F'$ dan $g = G'$ dengan $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $g \in \mathcal{R}[a, b]$, maka*

$$\int_a^b fG = FG\Big|_a^b - \int_a^b Fg. \tag{6.16}$$

Bukti. Dengan menggunakan Aturan Rantai, turunan $(FG)'$ ada pada $[a, b]$ dan dipunyai

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg.$$

Karena F dan G keduanya kontinu dan $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $g \in \mathcal{R}[a,b]$, dengan menggunakan sifat integral dan kenyataan $fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$, berakibat bahwa fG dan Fg keduanya terintegral. Oleh karena itu, dengan Teorema Dasar Kalkulus I diperoleh

$$FG\Big|_a^b = \int_a^b (FG)' = \int_a^b fG + \int_a^b Fg,$$

sehingga berlaku persamaan (6.16). □

Teorema 6.29. *Jika $f', f'', \cdots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ ada pada $[a,b]$ dan $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a,b]$, maka berlaku*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n, \tag{6.17}$$

dengan

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t) \cdot (b-t)^n \; dt. \tag{6.18}$$

Bukti. Dengan menerapkan integral parsial ke persamaan (6.18), dengan $F(t) = f^{(n)}(t)$ dan $G(t) = (b-t)^n/n!$, sehingga $g(t) = -(b-t)^{n-1}/(n-1)!$, didapatkan

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(t) \cdot (b-t)^n \Big|_{t=a}^{t=b} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t) \cdot (b-t)^{n-1} \; dt \\ &= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (b-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t) \cdot (b-t)^{n-1} \; dt. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan integral parsial, diperoleh persamaan (6.17). □

6.4 Integral Darboux

Dalam subbab ini akan dibahas integral Darboux dan dalam hubungannya dengan integral Riemann. Integral Darboux dikenalkan oleh seorang matematikawan Perancis bernama Gaston Darboux (1842-1917) yang dipublikasikan tahun 1875.

6.4.1 Jumlah Atas dan Jumlah Bawah

Diberikan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas pada $I = [a,b]$ dan diberikan $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ partisi pada I. Untuk $k = 1, 2, \cdots, n$ diberikan

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \qquad \text{dan} \qquad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

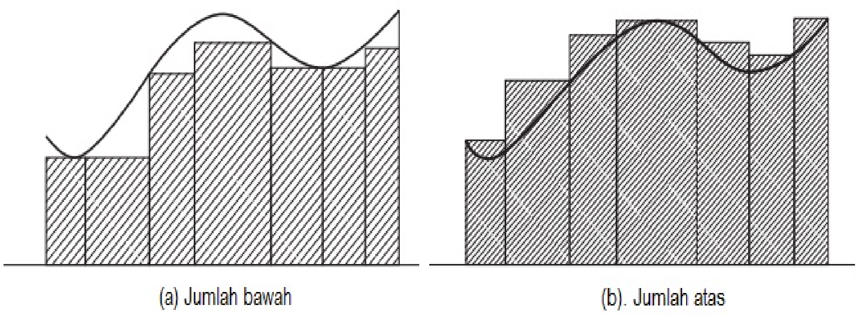
Jumlah bawah (*lower sum*) yang bersesuaian dengan partisi $\mathcal{P}$, ditulis $L(f;\mathcal{P})$, adalah bilangan yang didefinisikan sebagai

$$L(f;\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

dan **jumlah atas** (*upper sum*) yang bersesuaian dengan partisi $\mathcal{P}$, ditulis $U(f;\mathcal{P})$, adalah bilangan yang didefinisikan sebagai

$$U(f;\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Jika f adalah fungsi positif, maka jumlah bawah $L(f;\mathcal{P})$ dapat dinyatakan sebagai luasan dari gabungan persegi-persegipanjang dengan alas $[x_{k-1}, x_k]$ dan tinggi m_k (Gambar 6.6 (a)). Dengan cara serupa, jumlah atas $U(f;\mathcal{P})$ dapat dinyatakan sebagai luasan dari gabungan persegi-persegipanjang dengan alas $[x_{k-1}, x_k]$ dan tinggi M_k (Gambar 6.6 (b)).



Gambar 6.6: Jumlah bawah dan jumlah atas: (a) Jumlah bawah $L(f;\mathcal{P})$, dan (b) Jumlah atas $U(f;\mathcal{P})$

Lemma 6.30. *Jika $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas pada I dan $\mathcal{P}$ sebarang partisi pada I, maka*

$$L(f;\mathcal{P}) \leq U(f;\mathcal{P}).$$

Bukti. Diberikan $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. Karena $m_k \leq M_k$ untuk setiap $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ dan karena $x_k - x_{k-1} > 0$ untuk $k = 1, 2, \cdots, n$, maka diperoleh

$$L(f;\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = U(f;\mathcal{P}). \qquad \square$$

Jika $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ dan $\mathcal{Q} = \{y_0, y_1, \cdots, y_m\}$ keduanya partisi pada I, dikatakan bahwa $\mathcal{Q}$ merupakan **penghalusan** (*refinement*) dari $\mathcal{P}$ jika setiap titik partisi $x_k \in \mathcal{P}$ maka $x_k \in \mathcal{Q}$, yakni $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$.

Lemma 6.31. *Jika $f : I \to \mathbb{R}$ terbatas, $\mathcal{P}$ partisi pada I, dan jika $\mathcal{Q}$ penghalusan $\mathcal{P}$, maka*

$$L(f;\mathcal{P}) \leq L(f;\mathcal{Q}) \qquad \textit{dan} \qquad U(f;\mathcal{Q}) \leq U(f;\mathcal{P}).$$

Bukti. Diberikan $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. Pertama, diperiksa pengaruh oleh penambahan satu titik ke $\mathcal{P}$. Diberikan $z \in I$ yang memenuhi $x_{k-1} < z < x_k$ dan diberikan $\mathcal{P}'$ partisi pada I dengan

$$\mathcal{P}' = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, z, x_k, \cdots, x_n\},$$

yang diperoleh dari $\mathcal{P}$ dengan menambahkan z ke $\mathcal{P}$. Diberikan m_k' dan m_k'' dengan

$$m_k' = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, z]\}, \qquad m_k'' = \inf\{f(x) : x \in [z, x_k]\}.$$

Oleh karena itu $m_k \leq m_k'$ dan $m_k \leq m_k''$, karenanya diperoleh

$$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(z - x_{k-1}) + m_k(x_k - z) \leq m_k'(z - x_{k-1}) + m_k''(x_k - z).$$

Jika ditambahkan suku-suku $m_j(x_j - x_{j-1})$ untuk $j \neq k$ ke ketaksamaan terakhir di atas, diperoleh $L(f;\mathcal{P}) \leq L(f;\mathcal{P}')$.
Selanjutnya, jika $\mathcal{Q}$ sebarang penghalusan dari $\mathcal{P}$, maka $\mathcal{Q}$ dapat diperoleh dari $\mathcal{P}$ dengan menambahkan sejumlah hingga titik-titik ke $\mathcal{P}$. Oleh karena itu, dengan mengulangi cara serupa, didapatkan $L(f;\mathcal{P}) \leq L(f;\mathcal{Q})$.
Untuk kasus $U(f;\mathcal{Q}) \leq U(f;\mathcal{P})$, serupa. □

Lemma 6.32. *Diberikan $f : I \to \mathbb{R}$ terbatas. Jika $\mathcal{P}_1$ dan $\mathcal{P}_2$ sebarang dua partisi pada I, maka $L(f;\mathcal{P}_1) \leq U(f;\mathcal{P}_2)$*

Bukti. Diberikan $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, yakni partisi pada I yang diperoleh dari kombinasi titik-titik pada $\mathcal{P}_1$ dan titik-titik pada $\mathcal{P}_2$. Oleh karena itu, $\mathcal{Q}$ merupakan penghalusan dari $\mathcal{P}_1$ maupun $\mathcal{P}_2$. Dengan Lemma 6.30 dan Lemma 6.31, diperoleh

$$L(f;\mathcal{P}_1) \leq L(f;\mathcal{Q}) \leq U(f;\mathcal{Q}) \leq U(f;\mathcal{P}_2)$$ □

6.4.2 Integral Atas dan Integral Bawah

Dalam tulisan ini, koleksi semua partisi pada selang I dinyatakan dengan $\mathscr{P}(I)$. Jika $f : I \to \mathbb{R}$ terbatas, maka setiap $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)$ menentukan dua bilangan: $L(f;\mathcal{P})$ dan $U(f;\mathcal{P})$. Jadi, koleksi $\mathscr{P}(I)$ menentukan dua himpunan bilangan-bilangan: himpunan jumlah-jumlah bawah $L(f;\mathcal{P})$ untuk $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)$, dan himpunan jumlah-jumlah atas $U(f;\mathcal{P})$ untuk $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)$.

Definisi 6.33. *Diberikan $I = [a,b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas.* **Integral bawah** *(lower integral) f pada I, ditulis $L(f)$, adalah bilangan*

$$L(f) = \sup\{L(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\},$$

dan **integral atas** *(upper integral) f pada I, ditulis $U(f)$, adalah bilangan*

$$U(f) = \inf\{U(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\},$$

Karena f fungsi terbatas, ini menjamin eksistensi bilangan

$$m_1 = \inf\{f(x) : x \in I\} \qquad \text{dan} \qquad M_1 = \sup\{f(x) : x \in I\}.$$

Untuk sebarang $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)$, berlaku

$$m_1(b-a) \le L(f;\mathcal{P}) \le U(f;\mathcal{P}) \le M_1(b-a).$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$m_1(b-a) \le L(f) \qquad \text{dan} \qquad U(f) \le M_1(b-a).$$

Teorema 6.34. *Diberikan selang $I = [a,b]$. Jika $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas pada I, maka integral bawah, $L(f)$, dan integral atas, $U(f)$, fungsi f pada I ada. Selain itu diperoleh,*

$$L(f) \le U(f).$$

Bukti. Jika $\mathcal{P}_1$ dan $\mathcal{P}_2$ sebarang dua partisi pada I, maka berdasarkan Lemma 6.32, diperoleh $L(f;\mathcal{P}_1) \le U(f;\mathcal{P}_2)$. Oleh karena itu bilangan $U(f;\mathcal{P}_2)$ adalah batas atas himpunan $\{L(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\}$. Akibatnya, $L(f) = \sup\{L(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\}$ yang memenuhi $L(f) \le U(f;\mathcal{P}_2)$. Karena $\mathcal{P}_2$ sebarang partisi pada I, maka $L(f)$ adalah batas bawah himpunan $\{U(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\}$. Akibatnya, $U(f) = \inf\{U(f;\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\}$ dan memenuhi $L(f) \le U(f)$. $\square$

6.4.3 Integral Darboux

Jika I selang tertutup dan terbatas, dan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas, telah dibuktikan bahwa $L(f)$ dan $U(f)$ selalu ada. Di samping itu, diperoleh hubungan $L(f) \leq U(f)$. Dari hubungan itu diperoleh dua kelas fungsi f yang berlaku $L(f) < U(f)$ dan kelas lain yang berlaku $L(f) = U(f)$.

Definisi 6.35. *Diberikan $I = [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas. Fungsi f dikatakan* **terintegral Darboux** *pada I jika $L(f) = U(f)$. Dalam kasus ini, integral Darboux f pada I didefinisikan nilai $L(f) = U(f)$.*

Nilai integral Darboux pada suatu selang adalah unik. Karena akan dicari hubungan antara integral Darboux dan integral Riemann, di sini digunakan notasi baku $\int_a^b f$ atau $\int_a^b f(x)\, dx$ untuk integral Darboux fungsi f pada $[a, b]$.

Contoh 6.36. *(a). Fungsi konstan pada selang $[a, b]$ terintegral Darboux.*
Diberikan $f(x) = c$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Jika $\mathcal{P}$ sebarang partisi pada $[a, b]$, maka diperoleh $L(f; \mathcal{P}) = U(f; \mathcal{P})$. Oleh karena itu $L(f) = c(b - a) = U(f)$. Akibatnya, f terintegral Darboux pada I dan $\int_a^b f = c(b - a)$.
(b). Diberikan g fungsi yang terdefinisi pada selang $[0, 3]$ sebagai berikut: $g(x) = 2$ jika $0 \leq x \leq 1$ dan $g(x) = 3$ jika $1 < x \leq 3$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, jika didefinisikan $\mathcal{P}_\epsilon = \{0, 1, 1 + \epsilon, 3\}$, maka didapatkan jumlah atas

$$U(g; \mathcal{P}_\epsilon) = 2(1 - 0) + 3(1 + \epsilon - 1) + 3(2 - \epsilon) = 2 + 3\epsilon + 6 - 3\epsilon = 8.$$

Oleh karena itu, integral atas memenuhi $U(g) \leq 8$. Dengan cara serupa, diperoleh jumlah bawah

$$L(g; \mathcal{P}_\epsilon) = 2 + 2\epsilon + 3(2 - \epsilon) = 8 - \epsilon,$$

sehingga integral bawah memenuhi $L(g) \geq 8$, sehingga dipunyai $8 \leq L(g) \leq U(g) \leq 8$. Oleh karena itu $L(g) = U(g) = 8$. Jadi g terintegral Darboux pada $[0, 3]$ dan $\int_0^3 g = 8$.
(c). Fungsi $h(x) = x$ terintegral Darboux pada $[0, 1]$.
Diberikan $\mathcal{P}_n$ partisi pada $[0, 1]$ dengan sebanyak n subselang yang diberikan oleh

$$\mathcal{P}_n = \Big\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\Big\}.$$

Karena h fungsi monoton naik, infimum dan supremum h pada setiap subselang $[(k - 1)/n, k/n]$ dicapai masing-masing di titik ujung kiri dan kanan, *dengan* $m_k = (k-1)/n$ *dan* $M_k = k/n$. *Di samping itu, karena* $x_k - x_{k-1} = 1/n$ *untuk setiap* $k = 1, 2, \cdots, n$, *dipunyai*

$L(h; \mathcal{P}_n) = (0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1))/n^2$ *dan* $U(h; \mathcal{P}_n) = (1 + 2 + \cdots + n)/n^2$.

Karena $1 + 2 + \cdots + m = m(m+1)/2$ *untuk setiap* $m \in \mathbb{N}$, *diperoleh*

$$L(h; \mathcal{P}_n) = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}\big(1 - \frac{1}{n}\big) \qquad \text{dan} \qquad U(h; \mathcal{P}_n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{n}\big)$$

Karena himpunan partisi $\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *merupakan himpunan bagian semua partisi pada* $\mathscr{P}(I)$, *hasilnya mengikuti*

$$\frac{1}{2} = \sup\{L(h; \mathcal{P}_n) : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{L(h; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\} = L(h),$$

dan

$$U(h) = \inf\{U(h; \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\} \leq \inf\{U(h; \mathcal{P}_n) : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}.$$

Karena $\frac{1}{2} \leq L(h) \leq U(h) \leq \frac{1}{2}$, *disimpulkan bahwa* $L(h) = U(h) = \frac{1}{2}$. *Oleh karena itu,* h *terintegral Darboux pada* $[0, 1]$ *dan* $\int_0^1 h = \frac{1}{2}$.
(d). Didefinisikan fungsi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *dengan* $f(x) = 1$ *untuk* x *rasional di selang* $[0, 1]$ *dan* $f(x) = 0$ *untuk* x *irasional di selang* $[0, 1]$.
Jika $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ *sebarang partisi pada* $[0, 1]$, *maka untuk setiap selang nontrivial yang memuat kedua bilangan rasional dan bilangan irasional, dipunyai* $m_k = 0$ *dan* $M_k = 1$. *Oleh karena itu, dipunyai* $L(f; \mathcal{P}) = 0, U(f; \mathcal{P}) = 1$ *untuk setiap* $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([0, 1])$, *sehingga* $L(f) = 0$ *dan* $U(f) = 1$. *Karena* $L(f) \neq U(f)$, *maka fungsi* f *tidak terintegral Darboux pada selang* $[0, 1]$.

Teorema 6.37. Kriteria Keterintegralan *Diberikan* $I = [a, b]$ *dan* $f : I \to \mathbb{R}$ *fungsi terbatas pada* I. *Fungsi* f *terintegral Darboux pada* I *jika dan hanya jika untuk setiap* $\epsilon > 0$ *terdapat* $\mathcal{P}_\epsilon$ *partisi pada* I *sehingga*

$$U(f; \mathcal{P}_\epsilon) - L(f; \mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon. \tag{6.19}$$

Bukti. $(\Rightarrow)$ Jika f terintegral Darboux pada I, maka dipunyai $L(f) = U(f)$. Jika diberikan sebarang $\epsilon > 0$, maka dari definisi integral bawah sebagai supremum, terdapat $\mathcal{P}_1$ partisi pada I sehingga $L(f) - \epsilon/2 < L(f; \mathcal{P}_1)$. Dengan cara serupa, terdapat $\mathcal{P}_2$ partisi pada I sehingga $U(f; \mathcal{P}_2) < U(f) + \epsilon/2$. Jika diberikan $\mathcal{P}_\epsilon = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, maka $\mathcal{P}_\epsilon$ merupakan penghalusan dari $\mathcal{P}_1$ maupun $\mathcal{P}_2$. Akibatnya, dengan Lemma 6.30 dan Lemma 6.31, dipunyai

$$\begin{aligned} L(f) - \epsilon/2 &< L(f;\mathcal{P}_1) \leq L(f;\mathcal{P}_\epsilon) \\ &\leq U(f;\mathcal{P}_\epsilon) \leq U(f;\mathcal{P}_2) < U(f) + \epsilon/2. \end{aligned}$$

Karena $L(f) = U(f)$, disimpulkan ketaksamaan (6.19) terpenuhi.
($\Leftarrow$) Pertama amati bahwa untuk setiap $\mathcal{P}$ partisi pada I dipunyai $L(f;\mathcal{P}) \leq L(f)$ dan $U(f) \leq U(f;\mathcal{P})$. Oleh karena itu,

$$U(f) - L(f) \leq U(f;\mathcal{P}) - L(f;\mathcal{P}).$$

Selanjutnya anggap bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\mathcal{P}_\epsilon$ partisi pada I sedemikian hingga ketaksamaan (6.19) terpenuhi. Oleh karena itu, diperoleh

$$U(f) - L(f) \leq U(f;\mathcal{P}_\epsilon) - L(f;\mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon.$$

Karena $\epsilon > 0$ sebarang, disimpulkan $U(f) \leq L(f)$. Karena ketaksamaan $L(f) \leq U(f)$ selalu benar, disimpulkan $L(f) = U(f)$.
Jadi, f terintegral Darboux pada I. □

Akibat 6.38. *Diberikan selang $I = [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas. Jika $\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ barisan partisi pada I sedemikian hingga*

$$\lim_{n\to\infty} \big(U(f;\mathcal{P}_n) - L(f;\mathcal{P}_n)\big) = 0,$$

maka f terintegral Darboux pada I dan

$$\lim_{n\to\infty} L(f;\mathcal{P}_n) = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f;\mathcal{P}_n).$$

Bukti. Jika diberikan $\epsilon > 0$ sebarang, maka terdapat bilangan asli K sedemikian hingga jika $n \geq K$ maka $U(f;\mathcal{P}_n) - L(f;\mathcal{P}_n) < \epsilon$. yang mana keterintegralan f pada I mengikuti Kriteria Keterintegralan. □

Sebagai bagian akhir dari subbab ini dan bagian paling penting dari bab ini adalah hubungan antara integral Darboux dan integral Riemann, yang dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 6.39. *Fungsi f pada selang $I = [a, b]$ terintegral Darboux pada I jika dan hanya jika f terintegral Riemann pada I.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diberikan f fungsi terintegral Darboux pada $I = [a, b]$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, diberikan $\mathcal{P}_\epsilon$ partisi pada $[a, b]$ sedemikian hingga $U(f; \mathcal{P}_\epsilon) - L(f; \mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon$. Untuk partisi ini, didefinisikan fungsi tangga α_ϵ dan ω_ϵ pada $[a, b]$ dengan $\alpha_\epsilon(x) = m_k$ dan $\omega_\epsilon(x) = M_k$ untuk setiap $x \in [x_{k-1}, x_k), k = 1, 2, \cdots, n-1$, dan $\alpha_\epsilon(x) = m_n, \omega_\epsilon(x) = M_n$ untuk $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Cukup jelas, diperoleh

$$\alpha_\epsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\epsilon(x) \qquad \text{untuk setiap } x \in [a, b]. \tag{6.20}$$

Di samping itu, dengan Teorema 6.12, fungsi α_ϵ dan ω_ϵ ini terintegral Riemann dan masing-masing integralnya sama dengan

$$\int_a^b \omega_\epsilon = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = U(f; \mathcal{P}_\epsilon), \int_a^b \alpha_\epsilon = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = L(f; \mathcal{P}_\epsilon). \tag{6.21}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\int_a^b (\omega_\epsilon - \alpha_\epsilon) = U(f; \mathcal{P}_\epsilon) - L(f; \mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon.$$

Dengan menggunakan Teorema Apit, hasilnya mengikuti bahwa f terintegral Riemann. Di samping itu, bahwa (6.20) dan (6.21) benar untuk sebarang partisi dan oleh karena itu nilai integral Riemann dari f antara $L(f; \mathcal{P})$ dan $U(f; \mathcal{P})$ untuk sebarang partisi $\mathcal{P}$. Oleh karena itu nilai integral Riemann f pada I dan integral Darboux f pada I sama.

($\Leftarrow$) Anggap f terintegral Riemann pada $I = [a, b]$ dan diberikan $A = \int_a^b f$ yang menyatakan nilai integral Riemann f pada $[a, b]$. Berdasarkan Teorema 6.6, maka f terbatas. Diberikan $\epsilon > 0$ sebarang, maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $\dot{\mathcal{P}}$ partisi bertanda pada I dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$, dipunyai $\left|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - A\right| < \epsilon$, dapat dituliskan

$$A - \epsilon < S(f; \dot{\mathcal{P}}) < A + \epsilon. \tag{6.22}$$

Jika $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, karena $M_k = \sup\{f(x) : x \in I_k\}$ merupakan supremum, dapat dipilih tag $t_k \in I_k$ sedemikian hingga $f(t_k) > M_k - \epsilon/(b-a)$. Dengan menjumlahkan $\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = b - a$, diperoleh

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) > \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) - \epsilon = U(f; \dot{\mathcal{P}}) - \epsilon \geq U(f) - \epsilon. \tag{6.23}$$

Dengan mengkombinasikan ketaksamaan (6.22) dan (6.23), diperoleh

$$A + \epsilon > S(f; \dot{\mathcal{P}}) \geq U(f) - \epsilon,$$

oleh karena itu dipunyai $U(f) < A + 2\epsilon$. Karena $\epsilon > 0$ sebarang, ini mengakibatkan $U(f) \leq A$. Dengan cara serupa, dipunyai $L(f) \geq A$. Jadi diperoleh ketaksamaan $A \leq L(f) \leq U(f) \leq A$, yang mana memberikan hasil $L(f) = U(f) = A = \int_a^b f$. Oleh karena itu, f terintegral Darboux pada selang $I = [a, b]$ dan nilai integralnya sama dengan nilai integral Riemann. □

6.5 Bahan Diskusi

1. Gunakan induksi matematik dan sifat integral untuk menunjukkan bahwa jika $f_i \in \mathcal{R}[a, b], i = 1, 2, \cdots, n$ dan jika $k_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n$ maka kombinasi linear $f = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i \in \mathcal{R}[a, b]$ dan
$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \Big(k_i \int_a^b f_i \Big).$$

2. Berikan contoh fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ yang terintegral Riemann pada $[c, b]$ untuk setiap $c \in (a, b)$ tetapi tidak terintegral Riemann pada $[a, b]$.

3. Jika f terbatas oleh M pada $[a, b]$ dan jika retriksi f untuk setiap selang $[c, b]$ dengan $c \in (a, b)$ terintegral Riemann, tunjukkan bahwa $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f = \int_a^b f$.

4. Jika f dan g keduanya kontinu pada $[a, b]$ dan $g(x) > 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, buktikan terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$. Tunjukkan bahwa kesimpulan ini gagal jika tidak dipunyai $g(x) > 0$.

5. Telah ditunjukkan bahwa fungsi Thomae terintegral Riemann pada selang $[0, 1]$, dengan nilai integral sama dengan 0. Dapatkah Teorema Dasar Kalkulus I digunakan untuk mendapatkan kesimpulan ini? Jelaskan!.

6. Jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $c \in [a, b]$, fungsi yang didefinisikan oleh $F_c(z) = \int_c^z f$ untuk setiap $z \in [a, b]$ disebut **integral tak tentu** f dengan **basepoint** c. Tentukan hubungan F_a dan F_c.

7. Berikan contoh fungsi f_1 dan f_2 yang keduanya terbatas pada $[a, b]$ sehingga berlaku
$$L(f_1) + L(f_2) < L(f_1 + f_2).$$

8. Jika f fungsi monoton pada $[a, b]$ dan $\mathcal{P}$ sebarang partisi pada $[a, b]$, hitunglah $L(f; \mathcal{P}), U(f; \mathcal{P})$, dan $S(f; \mathcal{P})$. Setelah itu hitung
$$\lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} L(f; \mathcal{P}), \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} U(f; \mathcal{P}), \text{ dan } \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} S(f; \mathcal{P}).$$

9. Periksa/buktikan, bahwa fungsi monoton pada $[a, b]$ terintegral Darboux.

6.6 Rangkuman

1. Jika $g \in \mathcal{R}[a, b]$ dan jika $f(x) = g(x)$ kecuali berhingga titik di $[a, b]$, maka $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $\int_a^b f = \int_a^b g$.

2. Sifat-sifat integral Riemann:
Diberikan $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$.

   (i). Jika $k \in \mathbb{R}$, maka $kf \in \mathcal{R}[a, b]$ dan
$$\int_a^b kf = k \int_a^b f.$$

   (ii). $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ dan
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

   (iii). Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

3. Jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$ maka f terbatas pada $[a, b]$.

4. **Kriteria Cauchy** $f \in \mathcal{R}[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\eta_\epsilon > 0$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ sebarang dua partisi bertanda pada $[a, b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < \eta_\epsilon$ dan $||\dot{\mathcal{Q}}|| < \eta_\epsilon$, maka
$$\left| S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}) \right| < \epsilon.$$

5. **Teorema Apit** Diberikan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. $f \in \mathcal{R}[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat $\alpha_\epsilon, \omega_\epsilon \in \mathcal{R}[a, b]$ dengan

$$\alpha_\epsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\epsilon(x) \qquad \text{untuk setiap} \qquad x \in [a, b]$$

dan sedemikian hingga

$$\int_a^b (\omega_\epsilon - \alpha_\epsilon) < \epsilon.$$

6. Beberapa kelas fungsi terintegral Riemann:

   (a) Jika f fungsi tangga pada $[a, b]$, maka $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

   (b) Jika f fungsi kontinu pada $[a, b]$, maka $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

   (c) Jika f fungsi monoton pada $[a, b]$, maka $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

7. **Sifat aditif** Diberikan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan diberikan $c \in (a, b)$. $f \in \mathcal{R}[a, b]$ jika dan hanya jika $f \in \mathcal{R}[a, c]$ dan $f \in \mathcal{R}[c, b]$. Dalam kasus ini

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

8. **Teorema Dasar Kalkulus I** Diberikan himpunan berhingga $E \subset [a, b]$ dan fungsi-fungsi $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Jika syarat-syarat berikut dipenuhi:

   (i). F kontinu pada $[a, b]$,

   (ii). $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b] \backslash E$,

   (iii). $f \in \mathcal{R}[a, b]$,

   maka

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

9. Integral tak tentu F yang didefinisikan pada (6.13) kontinu pada $[a, b]$. Kenyataannya, jika $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka $|F(z) - F(w)| \leq M|z - w|$ untuk setiap $z, w \in [a, b]$.

10. **Teorema Dasar Kalkulus II** Diberikan $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Jika f kontinu di titik $c \in [a, b]$, maka integral tak tentu yang didefinisikan pada (6.13) diferensiabel di c dan $F'(c) = f(c)$.

11. Jika F dan G keduanya fungsi yang diferensiabel pada $[a,b]$ dan jika $f = F'$ dan $g = G'$ dengan $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $g \in \mathcal{R}[a,b]$, maka

$$\int_a^b fG = FG\Big|_a^b - \int_a^b Fg.$$

12. **Kriteria Keterintegralan** Diberikan $I = [a,b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas pada I. Fungsi f terintegral Darboux pada I jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\mathcal{P}_\epsilon$ partisi pada I sehingga

$$U(f;\mathcal{P}_\epsilon) - L(f;\mathcal{P}_\epsilon) < \epsilon,$$

dengan

$$L(f;\mathcal{P}_\epsilon) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \;\text{ dan }\; U(f;\mathcal{P}_\epsilon) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

dimana m_k dan M_k masing-masing menyatakan nilai infimum f pada subselang $[x_{k-1}, x_k]$ dan nilai supremum f pada subselang $[x_{k-1}, x_k]$ di dalam partisi $\mathcal{P}_\epsilon$.

13. Fungsi f pada selang $I = [a,b]$ terintegral Darboux pada I jika dan hanya jika f terintegral Riemann pada I.

14. Diberikan selang $I = [a,b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas. Jika $\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ barisan partisi pada I sedemikian hingga

$$\lim_{n\to\infty} \big(U(f;\mathcal{P}_n) - L(f;\mathcal{P}_n)\big) = 0,$$

maka f terintegral Darboux pada I dan

$$\lim_{n\to\infty} L(f;\mathcal{P}_n) = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f;\mathcal{P}_n).$$

6.7 Latihan Soal

1. Jika $I = [0,4]$, hitunglah norma-norma partisi berikut:
   (a). $\mathcal{P}_1 = \{0,1,2,4\}$ (b). $\mathcal{P}_2 = \{0,2,3,4\}$
   (c). $\mathcal{P}_3 = \{0,1,3/2,17/5,4\}$ (d). $\mathcal{P}_4 = \{0,1/2,5/2,7/2,4\}$

2. Jika $f(x) = x^2$ untuk $x \in [0, 4]$, hitung jumlah Riemann berikut, dimana $\dot{\mathcal{P}}_i$ mempunyai titik-titik partisi yang sama seperti dalam soal (1), dan tag-tagnya dipilih sebagai berikut:
   (a). $\dot{\mathcal{P}}_1 =$ dengan tag di titik ujung kiri dari setiap sub-sub selang.
   (b). $\dot{\mathcal{P}}_1 =$ dengan tag di titik ujung kanan dari setiap sub-sub selang.
   (c). $\dot{\mathcal{P}}_2 =$ dengan tag di titik ujung kiri dari setiap sub-sub selang.
   (d). $\dot{\mathcal{P}}_2 =$ dengan tag di titik ujung kanan dari setiap sub-sub selang.

3. Tunjukkan bahwa fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika terdapat bilangan $L \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ sebarang partisi bertanda pada $[a, b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| \leq \delta$, maka $|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| \leq \epsilon$.

4. Diberikan $\dot{\mathcal{P}}$ partisi bertanda pada $[0, 3]$.
   (a) Tunjukkan bahwa U_1 gabungan semua subselang di $\dot{\mathcal{P}}$ dengan tag di $[0, 1]$ memenuhi $[0, 1 - ||\dot{\mathcal{P}}||] \subseteq U_1 \subseteq [0, 1 + ||\dot{\mathcal{P}}||]$.
   (b) Tunjukkan bahwa U_2 gabungan semua subselang di $\dot{\mathcal{P}}$ dengan tag di $[1, 2]$ memenuhi $[1 + ||\dot{\mathcal{P}}||, 2 - ||\dot{\mathcal{P}}||] \subseteq U_2 \subseteq [1 - ||\dot{\mathcal{P}}||, 2 + ||\dot{\mathcal{P}}||]$.

5. Diberikan $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ partisi bertanda pada $[a, b]$ dan diberikan $c_1 < c_2$.
   (a) Jika $u \in I_i$ dengan tag memenuhi $c_1 \leq t_i \leq c_2$, tunjukkan bahwa $c_1 - ||\dot{\mathcal{P}}|| \leq u \leq c_2 + ||\dot{\mathcal{P}}||$.
   (b) Jika $v \in [a, b]$ yang memenuhi $c_1 + ||\dot{\mathcal{P}}|| \leq v \leq c_2 - ||\dot{\mathcal{P}}||$, maka tag t_i dari sebarang I_i yang memuat v memenuhi $t_i \in [c_1, c_2]$.

6. Jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [a, b]$, tunjukkan bahwa $\left| \int_a^b f \right| \leq M(b - a)$.

7. Jika $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan jika $\{\dot{\mathcal{P}}_n\}$ sebarang barisan partisi bertanda pada $[a, b]$ sedemikian hingga $||\dot{\mathcal{P}}_n|| \to 0$, buktikan bahwa
$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f; \dot{\mathcal{P}}_n).$$

8. Diberikan $g(x) = 0$ jika $x \in [0, 1]$ rasional dan $g(x) = 1/x$ jika $x \in [0, 1]$ irasional. Jelaskan, mengapa $g \notin \mathcal{R}[0, 1]$. Di sisi lain, tunjukkan bahwa

terdapat $\{\dot{\mathcal{P}}_n\}$ barisan partisi bertanda pada $[a, b]$ sehingga $||\dot{\mathcal{P}}_n|| \to 0$ dan $\lim_n S(g; \dot{\mathcal{P}}_n)$ ada.

9. Anggap f terbatas pada $[a, b]$ dan terdapat $\{\dot{\mathcal{P}}_n\}$ dan $\{\dot{\mathcal{Q}}_n\}$ dua barisan partisi bertanda pada $[a, b]$ sedemikian hingga $||\dot{\mathcal{P}}_n|| \to 0$ dan $||\dot{\mathcal{Q}}_n|| \to 0$, tetapi $\lim_n S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) \neq \lim_n S(f; \dot{\mathcal{Q}}_n)$. Tunjukkan bahwa $f \notin \mathcal{R}[a, b]$.

10. Pandang fungsi Dirichlet yang didefinisikan $f(x) = 1$ untuk setiap $x \in [0, 1]$ rasional dan $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0, 1]$ irasional. Gunakan hasil soal sebelumnya untuk menunjukkan bahwa $f \notin \mathcal{R}[0, 1]$.

11. Diberikan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $f \notin \mathcal{R}[a, b]$ jika dan hanya jika terdapat $\epsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat $\dot{\mathcal{P}}_n$ dan $\dot{\mathcal{Q}}_n$ dua partisi bertanda pada $[a, b]$ dengan $||\dot{\mathcal{P}}|| < 1/n$ dan $||\dot{\mathcal{Q}}|| < 1/n$ sedemikian hingga $|S(f; \dot{\mathcal{P}}_n) - S(f; \dot{\mathcal{Q}}_n)| \geq \epsilon_0$.

12. Pandang fungsi h yang didefinisikan oleh $h(x) = x + 1$ untuk $x \in [0, 1]$ rasional, dan $h(x) = 0$ untuk $x \in [0, 1]$ irasional. Tunjukkan bahwa h tidak terintegral Riemann pada $[0, 1]$.

13. Diberikan $H(x) = k$ untuk $x = 1/k$ ($k \in \mathbb{N}$) dan $H(x) = 0$ untuk yang lainnya di $[0, 1]$. Tunjukkan bahwa H tidak terintegral Riemann pada $[0, 1]$.

14. Jika $\alpha(x) = -x$ dan $\omega(x) = x$ dan jika $\alpha(x) \leq f(x) \leq \omega(x)$ untuk setiap $x \in [0, 1]$, apakah f mengikuti Teorema Apit yang menyimpulkan $f \in \mathcal{R}[0, 1]$?

15. Jika J sebarang subselang pada $[a, b]$ dan jika $\phi_J(x) = 1$ untuk $x \in J$ dan $\phi_J(x) = 0$ untuk x yang lain pada $[a, b]$, dikatakan bahwa ϕ_J adalah *fungsi tangga elementer* pada $[a, b]$. Buktikan bahwa setiap fungsi tangga merupakan kombinasi linear dari fungsi-fungsi tangga elementer.

16. Jika $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mempunyai range berhingga, apakah ψ merupakan fungsi tangga?

17. Jika $S(f; \dot{\mathcal{P}})$ adalah sebarang jumlah Riemann dari $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa terdapat fungsi tangga $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ sehingga $\int_a^b \phi = S(f; \dot{\mathcal{P}})$.

18. Anggap f fungsi kontinu pada $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $\int_a^b f = 0$. Buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

19. Tunjukkan bahwa hipotesis kekontinuan dalam soal nomer 18 tidak dapat dihilangkan.

20. Jika f dan g keduanya fungsi kontinu pada $[a,b]$ dan jika $\int_a^b f = \int_a^b g$, buktikan bahwa terdapat $c \in [a,b]$ sedemikian hingga $f(c) = g(c)$.

21. Tunjukkan bahwa $g(x) = \sin(1/x)$ untuk setiap $x \in (0,1]$ dan $g(0) = 0$, maka $g \in \mathcal{R}[0,1]$.

22. Diberikan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ dan $f \in \mathcal{R}[c_{i-1}, c_i]$ untuk $i = 1, 2, \cdots, m$. Buktikan bahwa $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan berlaku
$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

23. Jika f terbatas dan terdapat himpunan E berhingga sedemikian hingga f kontinu pada $[a,b] \backslash E$, tunjukkan bahwa $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

24. Jika f kontinu pada $[a,b]$, tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a,b]$ sedemikian hingga berlaku $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

25. Diberikan f fungsi kontinu pada $[a,b]$. $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, dan $M_n = (\int_a^b f^n)^{1/n}$. Tunjukkan bahwa
$$\lim M_n = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

26. Diberikan $a > 0$ dan $f \in \mathcal{R}[-a,a]$.
    (a) Jika f fungsi genap, tunjukkan bahwa $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.
    (b) Jika f fungsi ganjil, tunjukkan bahwa $\int_{-a}^a f = 0$.

27. Jika f fungsi kontinu pada $[-a,a]$, tunjukkan bahwa
$$\int_{-a}^a f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx.$$

28. Jika $n \in \mathbb{N}$ dan $H_n(x) = x^{n+1}/(n+1)$ untuk setiap $x \in [a,b]$, tunjukkan bahwa Teorema Dasar Kalkulus I berakibat
$$\int_a^b x^n \, dx = (b^{n+1} - a^{n+1})/(n+1).$$
Apa himpunan E yang dimaksud dalam Teorema Dasar Kalkulus I di sini?

29. Jika $g(x) = x$ untuk $|x| \geq 1$ dan $g(x) = -x$ untuk $|x| < 1$ dan jika $G(x) = \frac{1}{2}|x^2 - 1|$, tunjukkan bahwa $\int_{-2}^{3} g(x)dx = G(3) - G(-2) = 5/2$.

30. Diberikan $B(x) = -\frac{1}{2}x^2$ untuk $x < 0$ dan $B(x) = \frac{1}{2}x^2$ untuk $x \geq 0$. Tunjukkan bahwa $\int_a^b |x|dx = B(b) - B(a)$.

31. Diberikan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dan $c \in \mathbb{R}$.
    (a) Jika $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ adalah anti turunan f pada $[a,b]$, tunjukkan bahwa $\phi_c(x) = \phi(x) + c$ juga anti turunan f pada $[a,b]$.
    (b) Jika ϕ_1 dan ϕ_2 keduanya anti turunan f pada $[a,b]$, tunjukkan bahwa $\phi_1 - \phi_2$ fungsi konstan pada $[a,b]$.

32. Diberikan fungsi F yang didefinisikan oleh $F(x) = (n-1)x - (n-1)n/2$ untuk setiap $x \geq 0$ dengan $x \in [n-1, n), n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa F kontinu dan evaluasi $F'(x)$ di titik-titik dimana turunannya ada. Gunakan hasil ini untuk mengevaluasi $\int_a^b [[x]]dx$ untuk $0 \leq a < b$, dimana $[[x]]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang atau sama dengan x.

33. Diberikan $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan didefinisikan $F(x) = \int_a^x f$ untuk $x \in [a,b]$.
    (a) Evaluasi $G(x) = \int_c^x f$ dalam suku-suku F, dimana $c \in [a,b]$
    (b) Evaluasi $H(x) = \int_x^b f$ dalam suku-suku F.
    (c) Evaluasi $S(x) = \int_x^{\sin x} f$ dalam suku-suku F.

34. Diberikan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada $[a,b]$ dan diberikan $v : [c,d] \to \mathbb{R}$ fungsi diferensiabel pada $[c,d]$ dengan $v([c,d]) \subseteq [a,b]$. Jika didefinisikan $G(x) = \int_a^{v(x)} f$, tunjukkan bahwa $G'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x)$ untuk setiap $x \in [c,d]$.

35. Tentukan $F'(x)$ bilamana F didefinisikan pada $[0,1]$ oleh:
(a). $F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^3)^{-1}\, dt$ (b). $F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2}\, dt$.

36. Diberikan $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x$ untuk $0 \le x < 1$ dan $f(x) = 1$ untuk $1 \le x < 2$ dan $f(x) = x$ untuk $2 \le x \le 3$. Dapatkan rumus untuk $F(x) = \int_0^x f$ dan sketsakan grafik f dan F. Dimanakah F diferensiabel? Evaluasi $F'(x)$ di setiap titik.

37. Diberikan $g : [0,3] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $g(x) = -1$ untuk $0 \le x < 2$ dan $g(x) = 1$ untuk $2 \le x \le 3$. Tentukan integral tak tentu $G(x) = \int_0^x g$ untuk $0 \le x \le 3$, dan sketsakan grafik g dan G. Apakah $G'(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in [0,3]$?.

38. Tunjukkan bahwa tidak terdapat fungsi f diferensiabel yang kontinu pada $[0,2]$ sedemikian hingga $f(0) = -1, f(2) = 4$, dan $f'(x) \le 2$ untuk $0 \le x \le 2$. (Terapkan Teorema Dasar Kalkulus).

39. Jika $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu dan $c > 0$, didefinisikan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oleh $g(x) = \int_{x-c}^{x+c} f(t)dt$. Tunjukkan bahwa g diferensiabel pada $\mathbb{R}$ dan tentukan $g'(x)$.

40. Jika f kontinu dan $\int_0^x f = \int_x^1 f$ untuk setiap $x \in [0,1]$, tunjukkan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$.

41. Diberikan $f(x) = |x|$ untuk $-1 \le x \le 2$. Hitung $L(f;\mathcal{P})$ dan $U(f;\mathcal{P})$ untuk partisi-partisi berikut:
(a). $\mathcal{P}_1 = \{-1, 0, 1, 2\}$, (b). $\mathcal{P}_2 = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$

42. Buktikan, jika $f(x) = c$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka integral Darboux f pada $[a,b]$ sama dengan $c(b-a)$.

43. Diberikan f dan g keduanya fungsi terbatas pada $I = [a,b]$. Jika $f(x) \le g(x)$ untuk setiap $x \in I$, tunjukkan bahwa $L(f) \le L(g)$ dan $U(f) \le U(g)$.

44. Diberikan f fungsi terbatas pada $[a,b]$ dan diberikan $k > 0$. Tunjukkan bahwa $L(kf) = kL(f)$ dan $U(kf) = kU(f)$.

45. Diberikan f, g dan h ketiganya fungsi terbatas pada $I = [a, b]$ sedemikian hingga $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap $x \in I$. Tunjukkan bahwa jika f dan h keduanya terintegral Darboux pada I dan jika $\int_a^b f = \int_a^b h$, maka g terintegral Darboux pada I dengan $\int_a^b g = \int_a^b f$.

46. Diberikan f fungsi yang terdefinisi pada selang $[0, 2]$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 1$ jika $x \neq 1$ dan $f(1) = 0$. Tunjukkan bahwa f terintegral Darboux pada $[0, 2]$ dan tentukan nilai integralnya.

47. Buktikan bahwa jika $g(x) = 0$ untuk $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ dan $g(x) = 1$ untuk $\frac{1}{2} < x \leq 1$, maka integral Darboux g pada selang $[0, 1]$ sama dengan $\frac{1}{2}$.

48. Diberikan f fungsi kontinu pada $I = [a, b]$ dan misalkan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$. Buktikan bahwa jika $L(f) = 0$, maka $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in I$.

49. Diberikan f_1 dan f_2 keduanya fungsi terbatas pada $[a, b]$. Tunjukkan bahwa $L(f_1) + L(f_2) \leq L(f_1 + f_2)$.

50. Jika f fungsi terbatas pada $[a, b]$ sedemikian hingga $f(x) = 0$ kecuali untuk $x \in \{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \subset [a, b]$, tunjukkan bahwa $U(f) = L(f) = 0$.

51. Diberikan $f(x) = x^2$ untuk $0 \leq x \leq 1$. Untuk $\mathcal{P}_n = \{0, 1/n, 2/n, \cdots, (n-1)/n, 1\}$ partisi pada $[0, 1]$, hitunglah $L(f; \mathcal{P}_n)$ dan $U(f; \mathcal{P}_n)$, dan tunjukkan bahwa $L(f) = U(f) = \frac{1}{3}$. (Gunakan rumus $1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$.

52. Diketahui fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap fungsi $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ yang terintegral Darboux pada $[a, b]$ berakibat fg juga terintegral Darboux pada $[a, b]$ dan $\int_a^b fg = 0$. Buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

53. Jika f dan g keduanya terintegral Darboux pada $[a, b]$ dan jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, buktikan bahwa $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

54. Buktikan, jika f kontinu pada selang $[a, b]$ maka f terintegral Darboux pada $[a, b]$. Jika $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in [0, 1]$ dan $\mathcal{P} = \{0, h, 2h, \cdots, nh = 1\}$, hitunglah $L(f; \mathcal{P}), U(f; \mathcal{P})$, dan $S(f; \mathcal{P})$. Setelah itu hitung

$$\lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} L(f; \mathcal{P}), \quad \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} U(f; \mathcal{P}), \quad \text{dan} \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} S(f; \mathcal{P}).$$

Bandingkan nilai limit-limit itu.

55. Diberikan f fungsi yang terdefinisi pada $I = [a, b]$ dan misalkan f memenuhi syarat Lipschitz $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ untuk setiap $x, y \in I$. Jika $\mathcal{P}_n$ partisi pada I dengan sebanyak n subselang sama panjang, tunjukkan bahwa $0 \leq U(f; \mathcal{P}_n) - \int_a^b f \leq K(b - a)^2/n$.

6.8 Bahan Bacaan dan Rujukan Lebih Lanjut

1. Bartle, R.G. dan D.R. Sherbert, 2011, *Introduction to Real Analysis*, edisi keempat, New York: John Wiley & Sons, Inc.

2. Larson, L., 2015, *Introduction to Real Analysis*, University of Louisville

3. Trench, W.F., 2013, *Introduction to Real Analysis*, USA:Pearson Education

Bibliografi

[1] Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R, 2011, *Introduction to Real Analysis*, 4th, New York: John Wiley & Sons, Inc.

[2] Larson, L., 2015. *Introduction to Real Analysis.* University of Louisville

[3] Trench, W.F., 2013, *Introduction to Real Analysis*, USA:Pearson Education

[4] Ubaidillah, F., 2020. Fungsi Simetri Terhadap Garis $x = a$ dan Sifat-sifatnya, *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, Volume 20 (2), hal: 45-52.

.

Glosarium

A

Antiturunan Antiturunan fungsi f adalah suatu fungsi F yang bersifat $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x pada domainnya.

B

Bilangan rasional Bilangan real yang dapat dinyatakan dalam bentuk m/n dengan m dan n keduanya bilangan bulat dan $n \neq 0$.

Barisan terbatas Barisan yang setiap nilai mutlak sukunya lebih kecil dari suatu bilangan real tertentu.

F

Fungsi terbatas Fungsi yang rangenya (daerah jelajahnya) merupakan himpunan terbatas.

Fungsi naik Fungsi yang bersifat untuk setiap $x < y$ di domainnya maka berlaku $f(x) \leq f(y)$.

Fungsi turun Fungsi yang bersifat untuk setiap $x < y$ di domainnya maka berlaku $f(x) \geq f(y)$.

H

Himpunan terbatas Himpunan yang setiap nilai mutlak setiap anggotanya lebih kecil dari suatu bilangan real tertentu.

I

Infimum Infimum himpunan S adalah batas bawah terbesar himpunan S, asalkan $S \neq \emptyset$ dan S terbatas ke bawah.

Integral tak tentu Integral tak tentu fungsi f pada $[a, b]$ adalah suatu fungsi F yang bersifat $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

S

Supremum Supremum himpunan S adalah batas atas terkecil himpunan S, asalkan $S \neq \emptyset$ dan S terbatas ke atas.

Indeks

Biografi Penulis

Firdaus Ubaidillah lahir di Lamongan tanggal 6 Juni 1970, menempuh pendidikan dasar di SD Alun-alun II Lamongan dan SD Dinoyo III Malang, pendidikan menengah di MTsN Malang II dan MAN Malang II Batu. Tahun 1989 melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya (UB) Malang lulus tahun 1994. Studi S2 ditempuh di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Institut Teknologi Bandung (ITB) lulus tahun 2004. Pendidikan S3 ditempuh di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta dan memperoleh gelar Doktor bidang matematika tahun 2016.

Dalam kesehariannya, penulis aktif mengajar di prodi S1 dan S2 Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember dengan matakuliah yang diampu adalah Kalkulus, Analisis Real, Fungsi Peubah Kompleks, Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Aljabar Linear, Analisis Numerik, dan lain-lain. Selain buku Analisis Real, karya buku lain yang telah ditulis adalah Kalkulus Fungsi Satu Peubah (2018), Analisis Kompleks (2019), Kalkulus Integral (2019), dan Persamaan Diferensial Biasa (2020).