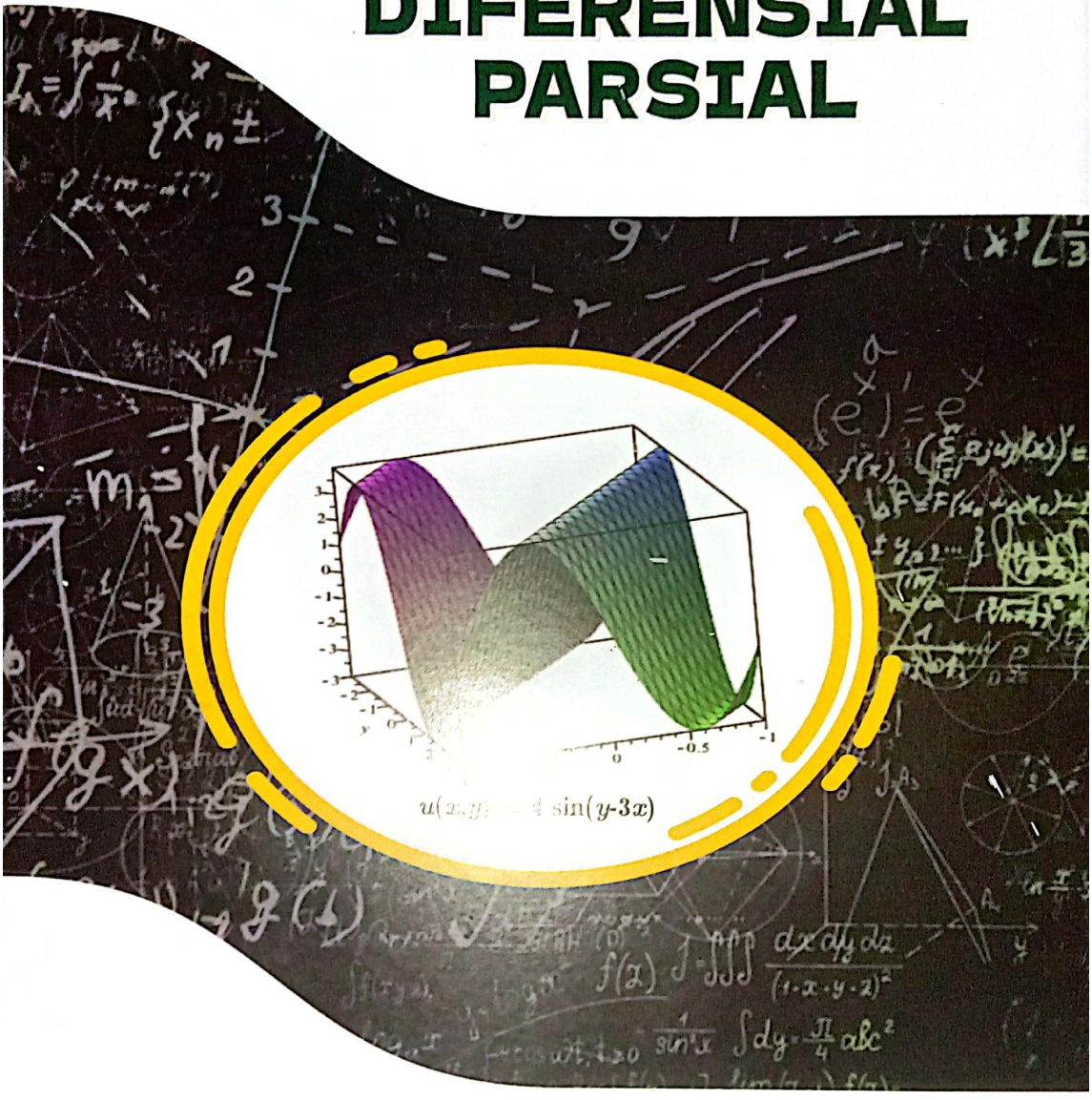
PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL



Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.
Millatuz Zahroh, S.Pd., M.Sc.
Drs. Moh. Hasan, M.Sc., Ph.D.

Membangun Generasi Menuju Insan Berprestasi

Dipindai dengan CamScanner

PERSAMAAN
DIFERENSIAL PARSIAL

Disusun Oleh:

Firdaus Ubaidillah
Millatuz Zahroh
Moh. Hasan

UPT PENERBITAN
UNIVERSITAS JEMBER
2023

PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

Penulis:

Firdaus Ubaidillah
Millatuz Zahroh
Moh. Hasan

ISBN: 978-623-477-052-0

Penjamin Mutu:

Arifin, Hosim,Satria Janu P.

Cetakan Pertama: Februari 2023

Penerbit:

UPT Percetakan & Penerbitan Universitas Jember

Redaksi:

Jl. Kalimantan 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip 00319
e-mail : upt-penerbitan@unej.ac.id

Distributor Tunggal:

UNEJ Press
Jl. Kalimantan 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip 0319
e-mail : upt-penerbitan@unej.ac.id

Hak Cipta dilindungi Undang-Undang. Dilarang memperbanyak tanpa ijin tertulis dari penerbit, sebagian atau seluruhnya dalam bentuk apapun, baik cetak, *photoprint*, maupun *microfilm*

Kata Pengantar

Puji dan syukur kita panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan nikmat, rahmat, dan hidayahNya sehingga kita dapat beraktivitas sesuai dengan apa yang telah direncanakan. Shalawat beserta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita nabi Muhammad SAW.

Penyusunan buku ajar Persamaan Diferensial Parsial ini dimulai dengan mengenalkan pengertian persamaan diferensial parsial. Setelah itu diberikan klasifikasi persamaan diferensial parsial. Dalam penjabaran persamaan diferensial parsial, Anda akan diajak untuk mengenali bentuk-bentuk persamaan diferensial parsial, kemudian penyelesaian persamaan diferensial mulai dari orde satu hingga persamaan diferensial orde tinggi linier dengan koefisien konstan. Pada umumnya yang dibahas di buku ajar ini adalah persamaan diferensial berbentuk linier, namun untuk persamaan diferensial orde satu diberikan dalam bentuk linier maupun nonlinier. Selain itu, diberikan penerapannya pada permasalahan sehari-hari misalkan persamaan konduksi panas, persamaan gelombang, dan lain-lain. Dengan demikian, saya merekomendasikan buku ajar ini bisa juga digunakan oleh mahasiswa di luar program studi matematika misalkan dari program studi fisika, teknik pertanian, program-program studi di fakultas teknik, dan lain-lain. Beberapa metode dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial juga diberikan di sini. Selain itu, pada bab-bab terakhir dibahas metode penyelesaian masalah nilai batas dan nilai awal dengan metode pemisahan peubah, transformasi Laplace, dan metode numerik.

Secara umum, Anda akan menemukan bahwa penyajian materi dalam buku ajar ini mengikuti alur penyajian pada perkuliahan Persamaan Diferensial Parsial di kelas. Dengan demikian, bisa dikatakan bahwa untuk memahami materi perkuliahan Persamaan Diferensial Parsial perlu mempelajari buku ajar ini.

Selain pembahasan materinya yang disajikan secara terstruktur, buku ajar ini juga dilengkapi dengan contoh-contoh penyelesaian persamaan diferensial maupun masalah nilai awal dan nilai batas, yang hasilnya sebagian dilengkapi dengan visualisasi dalam bentuk gambar. Penyajian tersebut akan memudahkan pembaca untuk merelasikan apa yang dijelaskan dalam contoh dengan bentuk tampilan grafik penyelesaiannya. Buku ajar ini juga menyediakan rangkuman materi, bahan

diskusi, dan soal-soal latihan yang dapat Anda gunakan untuk mengetahui sejauh mana Anda memahami materi yang telah dipelajari di tiap-tiap bab.

Jember, September 2022
Dr. Mohammad Fatekurrohman, S.Si., M.Si.

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya sehingga penulisan buku ajar **Persamaan Diferensial Parsial** ini dapat diselesaikan dengan baik tanpa kendala yang berarti. Tidak lupa, ucapan terima kasih disampaikan kepada rekan-rekan dosen tim pengajar matakuliah Persamaan Diferensial Parsial di Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah ikut memberikan kontribusi dalam penulisan buku ajar ini.

Persamaan Diferensial Parsial merupakan matakuliah wajib semester keempat pada program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember semenjak diberlakukan Kurikulum 2017, terdiri dari 3 sks (2 sks kuliah dan 1 sks praktikum). Matakuliah ini mempunyai prasyarat mahasiswa telah menempuh matakuliah Kalkulus Peubah Banyak dan Persamaan Diferensial Biasa.

Buku ajar Persamaan Diferensial Parsial ini ditulis untuk digunakan pada perkuliahan Persamaan Diferensial Parsial di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, meskipun tidak menutup kemungkinan bisa dipakai pada perkuliahan di program studi lain bahkan di luar fakultas MIPA. Penyusunan buku ajar ini dalam rangka untuk mengefektifkan proses pembelajaran. Pada proses pembelajaran di kelas secara daring, biasanya dosen menjelaskan perkuliahan dengan mencatat atau melalui media presentasi atau bahkan video. Mahasiswa umumnya menyalin catatan tersebut sambil menyimak dan mengikuti penjelasan dosen. Proses pembelajaran lebih banyak mendengarkan ceramah dari dosen.

Fungsi dari buku ajar ini, untuk dosen digunakan dalam menjelaskan materi kuliah, sedangkan untuk mahasiswa sebagai pengganti catatan kuliah. Oleh karena itu waktu pembelajaran di kelas dapat digunakan lebih efektif untuk caramah dan diskusi. Pada buku ajar ini, diberikan banyak contoh soal yang dilengkapi dengan penyelesaiannya. Harapannya soal-soal yang diberikan di tiap akhir bab dapat diselesaikan oleh mahasiswa sebagai alat ukur keberhasilan memahami materi, begitu juga bahan diskusi yang sudah diberikan di tiap bab.

Buku ajar ini dalam penyusunannya didasarkan pada beberapa buku teks mutakhir yang digunakan seperti dituliskan dalam Bibliografi (Daftar Pustaka). Semoga buku ajar ini dapat berguna untuk meningkatkan kualitas pembelajaran matakuliah Persamaan Diferensial

Parsial, terlebih khusus di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Jember, September 2022
Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar **iii**

Prakata **v**

Daftar Isi **vii**

Daftar Tabel **xi**

Daftar Gambar **xiii**

Tinjauan Matakuliah **xiv**

1 Pendahuluan **1**
1.1 Pengertian dan Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial 2
1.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dan Metode Penyelesaian 6
1.2.1 Metode Integral Langsung 6
1.2.2 Metode Pemisalan $u(x, y) = e^{ax+by}$ 8
1.2.3 Metode Pemisahan Peubah 9
1.2.4 Metode Trasformasi 12
1.2.5 Metode Numerik 12
1.3 Rangkuman 12
1.4 Soal-soal Latihan 14
1.5 Bahan Diskusi 17
1.6 Daftar Rujukan 18

2 PDP Orde Satu **19**
2.1 PDP Linier Orde Satu 20
2.2 PDP Nonlinier Orde Satu 27
2.3 Penyelesaian Tipe-tipe Khusus 31

2.3.1 Tipe I 31
2.3.2 Tipe II 32
2.3.3 Tipe III 33
2.4 Rangkuman 35
2.5 Soal-soal Latihan 36
2.6 Bahan Diskusi 38
2.7 Daftar Rujukan 38

3 PDP Linier Orde Tinggi dengan Koefisien Konstan 39
3.1 Penyelesaian PDP Linier Homogen 40
3.2 Penyelesaian PDP Linier Nonhomogen 44
3.3 PDP Linier yang Dapat Direduksi 51
3.4 PDP Linier yang Tidak Dapat Direduksi 54
3.5 Rangkuman 56
3.6 Soal-soal Latihan 58
3.7 Bahan Diskusi 59
3.8 Daftar Rujukan 59

4 Tipe-tipe Khusus PDP Linier Orde Dua 61
4.1 Klasifikasi PDP Linier Orde Dua 62
4.2 Persamaan Hiperbolik 66
4.3 Persamaan Parabolik 68
4.4 Persamaan Eliptik 70
4.5 Masalah Syarat Awal dan Masalah Syarat Batas 72
4.5.1 Masalah syarat awal 72
4.5.2 Masalah syarat batas 73
4.5.3 Masalah Syarat Awal dan Syarat Batas 75
4.6 Rangkuman 76
4.7 Soal-soal Latihan 77
4.8 Bahan Diskusi 78
4.9 Daftar Rujukan 78

5 Metode Pemisahan Peubah 79
5.1 Deret Fourier 80
5.2 Persamaan Parabolik 84
5.3 Persamaan Hiperbolik 92
5.4 Persamaan Eliptik 100
5.5 Rangkuman 103
5.6 Soal-soal Latihan 104
5.7 Bahan Diskusi 106

5.8 Daftar Rujukan 107

6 Transformasi Laplace **109**
6.1 Transformasi Laplace Fungsi Satu Peubah Bebas 110
6.2 Sifat-sifat Transformasi Laplace 113
6.3 Transformasi Laplace dari Fungsi dengan Dua atau Lebih Peubah Bebas 116
6.4 Transformasi Laplace Invers 118
6.5 Penyelesaian Persamaan Konduksi Panas dengan Transformasi Laplace 120
6.5.1 Panjang berhingga, permukaan terisolasi, dan suhu kedua penampang dipertahankan konstan . 120
6.5.2 Panjang berhingga dan permukaan serta salah satu penampang terisolasi 122
6.5.3 Panjang berhingga, salah satu penampang terjadi fluks panas, dan suhu penampang lain konstan 123
6.5.4 Panjang semi tak hingga dengan suhu penampang dipertahankan konstan 126
6.6 Rangkuman 127
6.7 Soal-soal Latihan 128
6.8 Bahan Diskusi 129
6.9 Daftar Rujukan 129

7 Metode Beda Hingga **131**
7.1 Persamaan Parabolik 133
7.1.1 Metode FTCS (*Forward Time Center Space*) . . 134
7.1.2 Metode BTCS (*Backward Time Center Space*) . 138
7.1.3 Metode Crank-Nicolson 142
7.2 Persamaan Eliptik 146
7.2.1 Metode Langsung 147
7.2.2 Metode Iterasi 150
7.3 Rangkuman 153
7.4 Soal-soal Latihan 155
7.5 Bahan Diskusi 156
7.6 Daftar Rujukan 156

Daftar Pustaka **156**

Glosarium **158**

Indeks **160**

Biografi **162**

Daftar Tabel

1.1 Persamaan Diferensial Parsial dengan Nama-nama Khusus 3
1.2 Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial pada Tabel 1.1 5

6.1 Transformasi Laplace Fungsi-fungsi Khusus 112

Daftar Gambar

1.1 Grafik fungsi $u(x, y) = 4 \sin (y - 3x)$ 10

2.1 Grafik paraboloida $4z = x^2 + y^2$ 30
2.2 Grafik silinder parabolik $8z = (x + y)^2$ 31
2.3 Grafik permukaan kerucut $z^2 = x^2 - y^2$ 32
2.4 Grafik permukaan paraboloida $3z = xy - x^2 - y^2$ 34
2.5 Grafik permukaan $z^3 + 1 = 0$. 35

6.1 Suhu kedua penampang dipertahankan konstan 120

7.1 Sebatang logam yang selimutnya diisolasi sempurna . . 133
7.2 Sistem grid persamaan parabolik 133
7.3 Stencil metode FTCS persamaan (7.4) 135
7.4 Diskritisasi batang 135
7.5 Sistem grid batang 136
7.6 Distribusi suhu batang metode FTCS 137
7.7 Ilustrasi ketidakstabilan dari Soal Contoh 7.1 dengan nilai $\lambda = 0,735$ 137
7.8 Limitasi grid metode FTCS 138
7.9 Stencil metode eksplisit FTCS dan implisit BTCS . . . 139
7.10 Stencil metode implisit Crank Nicolson 143
7.11 Distribusi panas lempengan logam berbentuk persegi . . 146
7.12 Sistem grid persamaan Laplace 147
7.13 Stencil persamaan Laplace 148
7.14 Alur Bobot Persamaan (7.15) 148
7.15 Lempengan Logam yang Dipanaskan 149
7.16 Distribusi suhu pada lempengan yang dipanaskan 153

Tinjauan Matakuliah

Matakuliah Persamaan Diferensial Parsial (MAM1420) merupakan matakuliah yang wajib ditempuh bagi setiap mahasiswa Program Studi S1 Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember dengan beban 3 sks yang terdiri dari 2 sks tatap muka perkuliahan dan 1 sks praktikum. Matakuliah Persamaan Diferensial Parsial mempunyai prasyarat matakuliah yang harus telah ditempuh, yakni Kalkulus Peubah Banyak dan Persamaan Diferensial Biasa.

Matakuliah Persamaan Diferensial Parsial dirancang terdiri atas 16 kali tatap muka perkuliahan dan 16 kali praktikum. Mata kuliah Persamaan Diferensial Parsial membahas konsep-konsep persamaan diferensial parsial, penyelesaian persamaan diferensial orde satu linier maupun nonlinier, penyelesaian persamaan diferensial linier orde tinggi baik homogen maupun nonhomogen, penyelesaian masalah nilai awal dan nilai batas dengan metode pemisahan peubah dan metode transformasi Laplace, dan penyelesaian persamaan diferensial secara numerik dengan metode beda hingga.

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK) ini adalah mahasiswa mampu:

- CPMK-1: menganalisis konsep persamaan diferensial parsial khususnya tentang klasifikasi persamaan diferensial dan metode-metode penyelesaian melalui pengembangan pemikiran matematis dan penalaran logis yang mandiri, bermutu, dan terukur.

- CPMK-2: menyelesaikan persamaan diferensial parsial baik penyelesaian analitik maupun numerik melalui pengembangan pemikiran matematis dan penalaran logis yang mandiri, bermutu, dan terukur.

- CPMK-3: mengaplikasikan konsep persamaan diferensial parsial khususnya penyelesaian masalah nilai awal dan nilai batas melalui pengembangan pemikiran matematis dan penalaran logis yang mandiri, bermutu, dan terukur.

- CPMK-4: bertanggung jawab dan berkomitmen terhadap etika akademik dalam mengerjakan permasalahan dalam persamaan diferensial parsial.

Bab 1

Pendahuluan

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian persamaan diferensial parsial dan memberikan contoh-contohnya.
2. Mahasiswa dapat mengklasifikasikan persamaan diferensial parsial berdasarkan orde, derajat, dan kelinearan persamaan.
3. Mahasiswa dapat membedakan persamaan diferensial linier homogen dan nonhomogen.
4. Mahasiswa dapat mengklasifikasikan persamaan diferensial linier orde dua berdasarkan tipe persamaan.
5. Mahasiswa dapat menggunakan metode-metode penyelesaian dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial.
6. Mahasiswa dapat menentukan penyelesaian umum dan penyelesaian khusus persamaan diferensial parsial kasus-kasus sederhana.

1.1 Pengertian dan Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua peubah bebas atau lebih. Beberapa contoh persamaan diferensial parsial diantaranya:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1.2}$$

Persamaan (1.1) merupakan contoh persamaan diferensial parsial dengan peubah terikat u dan dua peubah bebas x dan t. Sedangkan persamaan (1.2) merupakan contoh persamaan diferensial parsial dengan peubah terikat u dan tiga peubah bebas x, y dan t. Jika suatu persamaan diferensial tidak muncul turunan parsial terhadap suatu peubah bebas tertentu, maka peubah terikatnya terkadang dituliskan sebagai fungsi dari peubah-peubah bebasnya, seperti penulisan persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u = x - y^2,$$

yang maksudnya adalah

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + u(x,y) = x - y^2.$$

Turunan parsial kedua u terhadap x, yakni $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, mempunyai makna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big),$$

turunan parsial ketiga u terhadap x, yakni $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, mempunyai makna

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big) \quad \text{atau} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big),$$

dan seterusnya. Sedangkan turunan parsial kedua u terturut-turut terhadap x dan y dinotasikan dengan $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, mempunyai makna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big).$$

Terkadang penulisan turunan parsial dinotasikan dengan subskrip sebagai berikut

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{xxy} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y},$$

dan sebagainya. Sebagai contoh, persamaan (1.2) dapat ditulis sebagai

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}.$$

Secara umum $u_{xy} \neq u_{yx}$, namun dalam banyak kasus berlaku $u_{xy} = u_{yx}$. Untuk selanjutnya dalam buku ini diasumsikan $u_{xy} = u_{yx}, u_{xyx} = u_{xxy}$, dan sebagainya.

Terkadang suatu persamaan diferensial parsial mempunyai nama khusus, seperti persamaan diferensial

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dikenal dengan nama persamaan konduksi panas dimensi satu. Beberapa persamaan diferensial parsial lain dengan nama-nama khusus diberikan pada Tabel 1.1.

Tabel 1.1: Persamaan Diferensial Parsial dengan Nama-nama Khusus

No.	Bentuk persamaan	Nama persamaan
1.	$u_x + u_t = 0$	Persamaan transpor
2.	$u_t + uu_x = 0$	Persamaan Burger
3.	$u_x^2 + u_y^2 = 1$	Persamaan eikonal
4.	$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$	Persamaan gelombang dengan interaksi
5.	$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$	Persamaan Korteweg-deVries (KdV)
6.	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Persamaan gelombang dimensi satu
7.	$u_{tt} + du_t - u_{xx} = 0$	Persamaan telegraf
8.	$u_{xxt} + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} = 0$	Persamaan Hunter-Saxton

Selanjutnya dibahas klasifikasi PDP berdasarkan orde, derajat, linearitas, dan homogenitas. **Orde** atau tingkat PDP adalah orde/tingkat tertinggi dari turunan yang ada dalam PDP. **Derajat** PDP adalah

pangkat tertinggi dari turunan tingkat tertinggi yang muncul dalam PDP. Sebagai contoh, persamaan (1.1) merupakan PDP orde satu tingkat satu, sedangkan persamaan (1.2) merupakan PDP orde dua tingkat satu.

PDP dikatakan **linier** jika hanya memuat derajat pertama dari peubah-peubah bebasnya dan turunan-turunan parsialnya. Sebagai contoh, persamaan (1.1) dan persamaan (1.2) merupakan PDP linier, sedangkan persamaan diferensial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0,$$

dan

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 2x + y,$$

keduanya bukan merupakan PDP linier atau lebih dikenal dengan PDP **nonlinier**. Persamaan diferensial parsial linier orde satu dengan peubah terikat u dan dua peubah bebas x dan y, dinyatakan dalam bentuk

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y). \tag{1.3}$$

Sedangkan persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan peubah terikat u dan dua peubah bebas x dan y, dinyatakan dalam bentuk

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g(x,y), \tag{1.4}$$

dengan $a, b, c, d, e,$ dan f fungsi-fungsi dari x dan y saja. Klasifikasi persamaan diferensial pada Tabel 1.1 berdasarkan orde, derajat, dan kelinierannya selengkapnya diberikan pada Tabel 1.2.

Persamaan diferensial parsial linier orde satu dengan peubah terikat u dan dua peubah bebas x dan y yang diberikan pada persamaan (1.3) dikatakan **homogen** jika $d(x,y) = 0$, dan dikatakan **nonhomogen** jika $d(x,y) \neq 0$. Persamaan diferensial parsial linier orde satu dengan peubah terikat u dan dua peubah bebas x dan y (1.4) dikatakan **homogen** jika $g(x,y) = 0$, dan dikatakan **nonhomogen** jika $g(x,y) \neq 0$. Demikian pula pengertian homogen dan nonhomogen untuk persamaan diferensial linier orde tiga, empat, dan seterusnya. Persamaan diferensial

$$u_{xx} + xyu_y = u,$$

merupakan contoh persamaan diferensial linier homogen. Sedangkan

$$u_{xx} + 2xu_y = \sin x,$$

Tabel 1.2: Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial pada Tabel 1.1

Nomor PDP	Orde	Derajat	linier/nonlinier
1	1	1	linier
2	1	1	nonlinier
3	2	1	nonlinier
4	2	3	nonlinier
5	3	1	nonlinier
6	2	1	linier
7	2	1	linier
8	3	1	nonlinier

merupakan contoh persamaan diferensial linier nonhomogen.

Kembali lagi ke persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan peubah terikat u dan dua peubah bebas x dan y, dinyatakan dalam bentuk

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g(x, y), \tag{1.5}$$

dengan $a, b, c, d, e,$ dan f fungsi-fungsi dari x dan y saja. Berdasarkan tipenya, klasifikasi PDP linier orde dua ada tiga tipe. Pertama, PDP linier orde dua (1.5) dikatakan **parabolik** jika $b^2 - 4ac = 0$, **hiperbolik** jika $b^2 - 4ac > 0$, dan **eliptik** jika $b^2 - 4ac < 0$. Sebagai contoh, persamaan panas dimensi satu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

merupakan persamaan parabolik. Persamaan gelombang dimensi satu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

merupakan persamaan hiperbolik. Sedangkan persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

merupakan persamaan eliptik.

1.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dan Metode Penyelesaian

Misal diberikan suatu persamaan diferensial parsial, harapannya adalah mengetahui fungsi yang memenuhi persamaan diferensial tersebut atau selanjutnya disebut dengan **penyelesaian persamaan diferensial**. Pada persamaan diferensial, terkadang untuk mendapatkan penyelesaian persamaan diferensial tersebut diperoleh dengan mengintegralkan persamaan. Hasil integral dari persamaan tersebut akan memuat suatu parameter dan penyelesaiannya disebut dengan **penyelesaian umum**. Apabila parameter tersebut merujuk terhadap nilai tertentu, maka dibutuhkan suatu nilai awal atau syarat batas dan penyelesaianinya kemudian disebut **penyelesaian khusus**. Salah satu contoh penyelesaian umum dan penyelesaian khusus persamaan diferensial parsial diberikan pada Contoh 1.1.
Untuk mendapatkan penyelesaian persamaan diferensial parsial, diperlukan suatu cara atau metode penyelesaian. Beberapa metode penyelesaian PDP, diantaranya adalah : integral langsung, pemisalan, pemisahan peubah, transformasi, metode numerik, metode perturbasi, dan lain-lain.

1.2.1 Metode Integral Langsung

Pada persamaan diferensial biasa

$$\frac{dy}{dx} = x + 1,$$

untuk mendapatkan penyelesaiannya adalah dengan cara mengintegralkan secara langsung kedua ruas persamaan terhadap peubah x sehingga diperoleh penyelesaian umum persamaan diferensial

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C,$$

dengan C konstanta sebarang. Namun pada persamaan diferensial parsial dengan peubah terikat u dan dua peubah bebas x dan y, untuk mendapatkan penyelesaian persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + 1,$$

dengan cara mengintegralkan secara langsung kedua ruas persamaan terhadap peubah x diperoleh

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x + f(y),$$

dengan f fungsi sebarang. Jika u adalah fungsi dari x, y, dan z, maka persamaan diferensial

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + 1,$$

mempunyai penyelesaian

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + x + g(y, z),$$

dengan g fungsi sebarang.
Berikut beberapa contoh penyelesaian persamaan diferensial parsial.

Contoh 1.1. *Diberikan persamaan diferensial*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y.$$

a. *Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial tersebut.*

b. *Tentukan penyelesaian khusus persamaan diferensial tersebut yang memenuhi* $u(x, 0) = x^2$ *dan* $u(1, y) = \cos y$.

Penyelesaian:
a. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut, integralkan kedua ruas persamaan terhadap peubah x, diperoleh:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}x^3 y + F(y).$$

Selanjutnya, integralkan kedua ruas persamaan terakhir di atas terhadap peubah y, sehingga diperoleh

$$u(x, y) = \frac{1}{6}x^3 y^2 + \int F(y)dy + G(x) = \frac{1}{6}x^3 y^2 + H(y) + G(x).$$

Oleh karena itu diperoleh penyelesaian umum persamaan diferensial

$$u(x, y) = \frac{1}{6}x^3 y^2 + H(y) + G(x), \tag{1.6}$$

dengan G dan H fungsi sebarang.
b. Untuk mendapatkan penyelesaian khusus, syarat $u(x,0) = x^2$ disubstitusikan ke penyelesaian umum yang diperoleh pada butir a, sehingga diperoleh

$$u(x,0) = H(0) + G(x) = x^2,$$

yang menghasilkan

$$G(x) = x^2 - H(0). \tag{1.7}$$

Substitusi persamaan (1.7) ke persamaan (1.6) menghasilkan

$$u(x,y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + H(y) + x^2 - H(0). \tag{1.8}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan syarat yang lain $u(1,y) = \cos y$ ke persamaan (1.8) diperoleh

$$u(1,y) = \frac{y^2}{6} + H(y) + 1 - H(0) = \cos y.$$

yang menghasilkan

$$H(y) = \cos y - \frac{y^2}{6} - 1 + H(0). \tag{1.9}$$

Terakhir, dengan mensubstitusikan persamaan (1.9) ke persamaan (1.8), diperoleh penyelesaian khusus persamaan diferensial

$$u(x,y) = \frac{1}{6}x^3y^2 + \cos y - \frac{1}{6}y^2 - 1 + x^2.$$

1.2.2 Metode Pemisalan $u(x,y) = e^{ax+by}$

PDP linier orde satu dengan koefisien konstan dalam bentuk umum dapat dinyatakan

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu = 0,$$

dengan A, B, dan C konstan. Penyelesaian umum persamaan diferensial ditentukan dengan memisalkan $u(x,y) = e^{ax+by}$ dengan a dan b konstanta-konstanta yang akan dicari.

Contoh 1.2. *Selesaikan PDP berikut*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

dengan syarat batas $u(0,y) = 4\sin y$. *Sketsakan grafik penyelesaian persamaan diferensial.*

Penyelesaian:
Dengan memisalkan $u(x, y) = e^{ax+by}$, diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax+b} \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = be^{ax+b}.$$

Substitusi ke PDP diperoleh

$$ae^{ax+b} + 3be^{ax+b} = 0$$

atau

$$(a + 3b)e^{ax+b} = 0.$$

Karena $e^{ax+b} > 0$, maka diperoleh

$$a + 3b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3b.$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian persamaan diferensial

$$u(x, y) = e^{-3bx+by} = e^{b(-3x+y)} = F(-3x + y), \tag{1.10}$$

dengan F fungsi yang akan dicari.
Dengan memasukkan syarat $u(0, y) = 4 \sin y$, diperoleh

$$u(0, y) = F(y) = 4 \sin y$$

Substitusikan hasil ini ke persamaan (1.10), diperoleh penyelesaian khusus persamaan diferensial

$$u(x, y) = 4 \sin(-3x + y),$$

yang grafiknya diberikan pada Gambar 1.1.

1.2.3 Metode Pemisahan Peubah

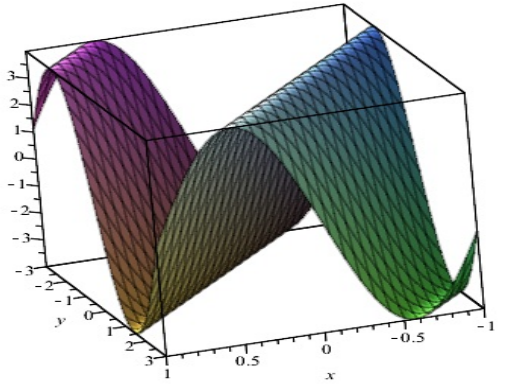
Metode pemisahan peubah merupakan cara klasik dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial yang disajikan sebagai bentuk perkalian $U(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0$ atau sebagai penjumlahan $U(x, y) = X(x) + Y(y)$ dengan $X(x)$ dan $Y(y)$ masing-masing fungsi dari x dan y.

Contoh 1.3. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 4\frac{\partial U}{\partial y}$$

yang memenuhi

$$U(0, y) = 8e^{-3y}.$$



Gambar 1.1: Grafik fungsi $u(x, y) = 4 \sin(y - 3x)$

Penyelesaian:
Misal $U(x, y) = X(x)Y(y)$, diperoleh

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X'Y, \frac{\partial U}{\partial y} = XY'.$$

Jadi PDP menjadi $X'Y = 4XY'$ atau

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = 4\frac{Y'(y)}{Y(y)} \tag{1.11}$$

Sekarang perhatikan persamaan (1.11), di mana ruas kiri merupakan fungsi dari x saja dan ruas kanan fungsi dari y saja. Hal itu menyatakan bahwa kedua ruas merupakan fungsi konstan. Oleh karena itu persamaan (1.11) dapat dituliskan

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = 4\frac{Y'(y)}{Y(y)} = k \text{ (konstanta)},$$

sehingga didapatkan dua persamaan diferensial

$$X' - kX = 0 \qquad \text{dan} \qquad 4Y' - kY = 0.$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan diferensial yang merupakan PDB tersebut, diperoleh

$$X = C_1 e^{kx} \quad \text{dan} \quad Y = C_2 e^{\frac{ky}{4}},$$

sehingga penyelesaian umum persamaan diferensial adalah

$$U(x,y) = C_1 e^{kx} C_2 e^{\frac{ky}{4}} = Ce^{kx+\frac{ky}{4}}$$

dengan $C = C_1 C_2$.
Karena $U(0,y) = 8e^{-3y} = Ce^{\frac{ky}{4}}$, maka diperoleh $C = 8$ dan $k = -12$.
Jadi penyelesaian khusus persamaan diferensial

$$U(x,y) = 8e^{-12x-3y}.$$

Contoh 1.4. *Gunakan pemisahan $u(x,y) = f(x)+g(y)$ untuk menyelesaikan persamaan diferensial*

$$u_x^2 + u_y + x^2 = 0. \tag{1.12}$$

Penyelesaian:
Persamaan (1.12) mempunyai bentuk pemisahan

$$\big(f'(x)\big)^2 + x^2 = -g'(y) = \lambda^2,$$

dengan λ^2 konstanta.
Akibatnya, diperoleh

$$f'(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2} \qquad \text{dan} \qquad g'(y) = -\lambda^2.$$

Dengan mengintegralkan kedua persamaan, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \sqrt{\lambda^2 - x^2}\,dx + A, \qquad (A \text{ konstanta}) \\ &= \lambda^2 \int \cos^2\theta\, d\theta + A, \qquad (x = \lambda \sin\theta) \\ &= \frac{1}{2}\lambda^2 \Big(\sin^{-1}(x/\lambda) + \frac{x}{\lambda}\sqrt{1 - \frac{x^2}{\lambda^2}}\Big) + A \end{aligned}$$

dan

$$g(y) = -\lambda^2 y + B. \quad (B \text{ konstanta})$$

Oleh karena itu, diperoleh penyelesaian umum

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^{-1}(x/\lambda) + \frac{x}{2}\sqrt{\lambda^2 - x^2} - \lambda^2 y + C,$$

dengan $C = A + B$ konstanta sebarang.

Penyelesaian PDP dengan menggunakan metode pemisahan peubah untuk persamaan orde dua kasus-kasus khusus diberikan pada Bab 5.

1.2.4 Metode Trasformasi

Pandang PDP linier orde satu fungsi dua peubah $u(x, y)$

$$Au_x + Bu_y + Cu = D, \tag{1.13}$$

dengan A, B, C dan D fungsi-fungsi dari x dan y saja dan anggap $A \neq 0$. Ruas kiri persamaan (1.13) merupakan kombinasi linier dari u_x dan u_y sehingga ruas kiri merupakan turunan berarah yang diberikan oleh $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$. Sekarang yang menjadi pertanyaan adalah mungkinkah dapat dipilih peubah baru, sebut saja $\xi = \xi(x, y)$ dan $\eta = \eta(x, y)$ sehingga (1.13) dapat diubah menjadi persamaan diferensial

$$w_\xi + f(\xi, \eta)w = g(\xi, \eta) \tag{1.14}$$

dengan $w(\xi, \eta) = u(x, y)$.
Untuk mencari penyelesaian persamaan (1.14) dilakukan dengan menggunakan meode yang sudah dipelajari pada materi perkuliahan PDB. Penjelasan lebih lanjut beberapa metode transformasi dapat dilihat pada Bab 2, 4 dan 6.

1.2.5 Metode Numerik

Metode numerik merupakan cara atau metode penyelesaian permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan. Dalam metode numerik ini dilakukan operasi hitungan dalam jumlah yang banyak dan prosesnya berulang. Sehingga dalam prakteknya perlu bantuan komputer untuk menyelesaikan hitungan tersebut. Salah satu metode numerik yang sering digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial adalah metode beda hingga. Prinsipnya adalah dengan mengganti turunan menjadi bentuk diskritisasi beda hingga berdasarkan deret Taylor. Hasil diskritisasi akan merubah persamaan diferensial menjadi bentuk sistem persamaan linier sehingga dapat dievalusi dengan menggunakan bantuan komputer. Penjelasan lebih lanjut metode numerik ini dapat dilihat pada Bab 7.

1.3 Rangkuman

1. Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua peubah bebas

atau lebih. Orde atau tingkat persamaan diferensial parsial adalah orde tertinggi dari turunan yang ada dalam persamaan diferensial.

2. PDP dikatakan linier jika hanya memuat derajat pertama dari peubah-peubah bebasnya dan turunan-turunan parsialnya.
   Persamaan diferensial linier orde satu fungsi dua peubah berbentuk

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y),$$

   dan persamaan diferensial linier orde dua fungsi dua peubah berbentuk

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g(x,y),$$

   dengan a, b, c, d, e,dan f fungsi-fungsi dari x dan y saja.

3. a. PDP linier orde satu

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y),$$

      dikatakan homogen jika $d(x,y) = 0$, dan dikatakan nonhomogen jika $d(x,y) \neq 0$.

   b. PDP linier orde dua

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g(x,y),$$

      dengan a, b, c, d, e,dan f fungsi-fungsi dari x dan y saja, dikatakan homogen jika $g(x,y) = 0$, dan dikatakan nonhomogen jika $g(x,y) \neq 0$.

4. Penyelesaian persamaan diferensial adalah fungsi yang memenuhi persamaan diferensial. Penyelesaian umum persamaan diferensial adalah penyelesaian persamaan diferensial yang biasanya memuat parameter-parameter tertentu. Penyelesaian khusus persamaan diferensial adalah penyelesaian persamaan diferensial yang sudah tidak lagi memuat parameter-parameter tertentu.

5. Beberapa metode penyelesaian PDP, diantaranya adalah : integral langsung, pemisalan, pemisahan peubah, transformasi, metode numerik, dan lain-lain.

6. Berdasarkan tipenya, persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan peubah terikat u dan dua peubah bebas x dan y dalam bentuk

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g(x, y),$$

dengan a, b, c, d, e,dan f fungsi-fungsi dari x dan y saja, merupakan **parabolik** jika $b^2 - 4ac = 0$, **hiperbolik** jika $b^2 - 4ac > 0$, dan **eliptik** jika $b^2 - 4ac < 0$.

1.4 Soal-soal Latihan

1. Klasifikasikan persamaan diferensial parsial berikut berdasarkan orde, derajat, dan kelinearannya.

No.	Bentuk Persamaan	Orde	Derajat	linier/Tidak
1.	$u_x + u_t = 0$			
2.	$u_t + uu_x = 0$			
3.	$u_x^2 + u_y^2 = 1$			
4.	$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$			
5.	$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$			
6.	$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$			

2. Untuk masing-masing persamaan berikut, nyatakan apakah merupakan persamaan diferensial linier atau nonlinier. Jika linier, apakah homogen atau nonhomogen.
   a. $u_{xx} + xu_y = y$,
   b. $uu_x - 2xyu_y = 0$,
   c. $u_x^2 + uu_y = 1$,
   d. $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$,
   e. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$,
   f. $u_{xxx} + u_{xyx} + \log u = 0$,
   g. $u_{xx}^2 + u_x^2 + \sin u = e^y$,
   h. $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$.

3. Klasifikasikan persamaan diferensial linier orde dua berikut berdasarkan tipenya.
   a. $u_{xx} + u_{yy} = 1$.
   b. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$
   c, $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$.

4. Buktikan bahwa $u(x, t) = f(bx - at)$, untuk sebarang fungsi f, memenuhi persamaan transpor

$$au_x + bu_t = 0.$$

Misalkan diketahui $a = 2, b = 1$, dan

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Sketsakan $u(x,0), u(x,1), u(x,2)$ pada satu sumbu koordinat. Amati apa yang terjadi.

5. Buktikan melalui substitusi langsung bahwa

$$u_n(x,y) = \sin nx \sinh ny$$

adalah penyelesaian dari $u_{xx} + u_{yy} = 0$ untuk setiap $n > 0$.

6. Jika u adalah suatu fungsi khusus yang berbentuk $u(r,\theta) = \frac{1}{r^3} f(\theta)$ dengan f adalah fungsi tertentu, dan memenuhi

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

Tentukanlah fungsi f.

7. Buktikan bahwa fungsi-fungsi

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= x^2 - y^2, \\ u_2(x,y) &= e^x \sin y, \\ u_3(x,y) &= 2xy, \end{aligned}$$

adalah penyelesaian dari persamaan diferensial

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

8. Tunjukkan bahwa $u = f(xy)$, dengan f fungsi sebarang yang diferensiabel, memenuhi persamaan diferensial

$$xu_x - yu_y = 0,$$

dan periksa apakah fungsi-fungsi $\sin(xy), \log(xy), e^{xy}$, dan $(xy)^3$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial tersebut?

9. Tunjukkan bahwa $u = f(x)g(y)$ dengan f dan g fungsi sebarang yang diferensiabel dua kali memenuhi persamaan diferensial

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0.$$

10. Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$u_{yy} + u = 0.$$

11. Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$u_{xx} + u_x = 0,$$

dengan melakukan pemisalan $u_x = v$.

12. Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

13. Tunjukkan bahwa penyelesaian umum dari persamaan diferensial

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

dengan c konstanta, adalah $u(x,t) = f(x-ct)+g(x+ct)$, dengan f dan g dua fungsi sebarang yang diferensiabel dua kali.

14. Perhatikan persamaan Laplace $u_{xx}+u_{yy} = 0$ dengan syarat batas

$$u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = -1, \quad u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,1) = 1.$$

Carilah penyelesaian eksak masalah di atas yang berbentuk polinom derajat dua.

15. Tunjukkan, melalui diferensiasi, bahwa fungsi

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0,$$

adalah penyelesaian persamaan difusi

$$u_t = k u_{xx},$$

dengan k suatu konstanta.

16. Tunjukkan bahwa $u(x,y) = f(2y + x^2) + g(2y - x^2)$ adalah penyelesaian umum dari persamaan

$$u_{xx} - \frac{1}{x} u_x - x^2 u_{yy} = 0.$$

17. Tunjukkan bahwa
$$u(x,y) = \exp\Big(-\frac{x}{b}\Big) f(ax-by),$$
memenuhi persamaan diferensial
$$bu_x + au_y + u = 0.$$

18. Tunjukkan bahwa
$$c^2\Big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\Big) - u_{tt} = 0,$$
mempunyai penyelesaian berbentuk
$$u(r,t) = \frac{G(r)}{r}\cos(nct), \qquad n = 0,1,2,\cdots.$$

19. Tentukan penyelesaian persamaan
$$yu_x - 2xyu_y = 2xu,$$
yang memenuhi kondisi $u(0,y) = y^3$.

20. Gunakan metode pemisahan peubah $u(x,y) = f(x)+g(y)$ untuk menyelesaikan persamaan
$$yu_x + xu_y = 0,$$
yang memenuhi kondisi $u(0,y) = y^2$.

21. Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial
$$u_x - u_y = u,$$
yang memenuhi kondisi $u(x,0) = 4e^{-3x}$.

1.5 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu!

1. Bagaimana bentuk umum persamaan diferensial linier orde satu dan orde dua dengan peubah terikat u dan tiga peubah bebas x, y, dan z.

2. Bagaimana penyelesaian umum persamaan diferensial linier orde dua dengan koefisien konstan
$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0,$$
dengan metode pemisalan $u(x,y) = e^{ax+by}$.

1.6 Daftar Rujukan

1. Jurgen Jost, 2013, *Partial Differential Equations*, 3rd, New York: Springer Science+Business Media

2. Peter J. Olver, 2014. *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer International Publishing Switzerland tem J. David Logan, 2015, *Applied Partial Differential Equations*, 3rd, Springer International Publishing Switzerland

3. David Borthwick , 2016, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer International Publishing Switzerland

4. Victor Ivrii , 2021, *Partial Differential Equations*, Department of Mathematics, University of Toronto

Bab 2

PDP Orde Satu

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa mampu menentukan bentuk transformasi persamaan diferensial parsial linier orde satu sedemikian hingga hasil transformasinya dapat diselesaikan seperti menyelesaikan persamaan diferensial biasa.

2. Mahasiswa mampu menyelesaikan persamaan diferensial parsial linier orde satu dengan koefisien konstan maupun koefisien peubah baik berupa persamaan homogen maupun nonhomogen.

3. Mahasiswa mampu menentukan penyelesaian lengkap dan penyelesaian singular persamaan diferensial parsial orde satu nonlinier.

4. Mahasiswa mampu menentukan penyelesaian umum persamaan diferensial parsial orde satu nonlinier.

Bentuk umum persamaan diferensial orde satu dengan peubah terikat u dan dua peubah bebas x dan y adalah

$$f(x, y, u, u_x, x_y) = 0.$$

Dalam bab ini akan dibahas penyelesaian persamaan diferensial orde satu linier maupun nonlinier dengan metode transformasi.

2.1 PDP Linier Orde Satu

Bentuk umum persamaan diferensial linier orde satu dengan dua peubah bebas x, y dan peubah terikat u adalah

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = d(x, y). \tag{2.1}$$

Untuk mendapatkan penyelesaian persamaan (2.1), terlebih dahulu dipandang kasus persamaan homogen, yakni $d(x, y) = 0$. Untuk itu diperoleh persamaan diferensial linier orde satu berbentuk

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0. \tag{2.2}$$

Pandang transformasi

$$\xi = \xi(x, y) \qquad \text{dan} \qquad \eta = \eta(x, y)$$

dengan Jacobian

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Karena

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \qquad \text{dan} \qquad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

maka persamaan (2.2) ditransformasi menjadi

$$(a\xi_x + b\xi_y)u_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)u_\eta + cu = 0, \tag{2.3}$$

dengan koefisien-koefisien yang dinyatakan dalam suku-suku peubah ξ dan η. Persamaan (2.3) dapat disederhanakan dengan memilih η sedemikian hingga

$$a\eta_x + b\eta_y = 0.$$

Pandang persamaan diferensial biasa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}, \qquad a(x,y) \neq 0. \tag{2.4}$$

Penyelesaian umum persamaan (2.4) adalah

$$\eta(x,y) = C, \tag{2.5}$$

dengan C konstanta sebarang. Koleksi kurva-kurva pada persamaan (2.5) yang didefinisikan oleh persamaan (2.4) disebut **kurva-kurva karakteristik** dari persamaan diferensial (2.2).

Selanjutnya, pilih

$$\xi = \xi(x,y) = x.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$J = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \eta_y \neq 0.$$

Dengan demikian diperoleh transformasi peubah

$$\xi = x \qquad \text{dan} \qquad \eta = \eta(x,y)$$

yang memiliki balikan (invertibel).

Dari hasil transformasi tersebut, persamaan (2.3) direduksi menjadi

$$a^*(\xi,\eta)w_\xi + c^*(\xi,\eta)w = 0, \tag{2.6}$$

dengan $a^*(\xi,\eta) = a(x,y)$, $c^*(\xi,\eta) = c(x,y)$, dan $w(\xi,\eta) = u(x,y)$. Persamaan (2.6) disebut **bentuk kanonik** dari persamaan diferensial linier (2.1), dan dapat diselesaikan seperti penyelesaian persamaan diferensial biasa. Selanjutnya, hasil penyelesaian akhir peubah ξ dan η dikembalikan ke peubah x dan y.

Contoh 2.1. *Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial*

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Penyelesaian:
Dengan menggunakan persamaan (2.4) diperoleh persamaan karakteristik persamaan diferensialnya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} = -2,$$

dengan penyelesaian $y + 2x =$ konstan. Dengan mengambil $\eta(x,y) = y + 2x$ dan $\xi(x,y) = x$, maka syarat Jacobian tidak sama dengan nol terpenuhi. Oleh karena itu, diperoleh persamaan

$$w_\xi = 0,$$

dengan penyelesaian

$$w(\xi,\eta) = f(\eta)$$

sehingga dengan transformasi balik $\eta = y + 2x$, diperoleh penyelesaian akhir

$$u(x,y) = f(y + 2x),$$

dengan f fungsi sebarang.

Contoh 2.2. *Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + b(x)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Penyelesaian:
Dengan menggunakan persamaan (2.4) diperoleh persamaan karakteristik persamaan diferensialnya

$$\frac{dy}{dx} = b(x),$$

dengan penyelesaian $y - \int b(x)dx =$ konstan. Dengan mengambil $\eta(x,y) = y - \int b(x)dx$ dan $\xi(x,y) = x$, maka syarat Jacobian tidak sama dengan nol terpenuhi. Oleh karena itu, diperoleh persamaan

$$w_\xi = 0,$$

dengan penyelesaian

$$w(\xi,\eta) = f(\eta)$$

sehingga diperoleh penyelesaian akhir

$$u(x,y) = w(\xi,\eta) = f(\eta) = f(y - \int b(x)dx),$$

dengan f fungsi sebarang.

Contoh 2.3. *Tentukan penyelesaian persamaan diferensial*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Penyelesaian:
Dengan mengikuti hasil penyelesaian Contoh (2.2), diperoleh penyelesaian akhir

$$u(x, y) = f(y - \int x dx) = f(y - \frac{x^2}{2}),$$

dengan f fungsi sebarang.

Contoh 2.4. *Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Penyelesaian:
Dengan menggunakan persamaan (2.4) diperoleh persamaan karakteristik persamaan diferensialnya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)} = -\frac{2x}{y},$$

dengan penyelesaian $\frac{1}{2}y^2 + x^2 =$ konstan. Dengan mengambil $\eta(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + x^2$ dan $\xi(x, y) = x$, maka syarat Jacobian tidak sama dengan nol terpenuhi. Oleh karena itu, diperoleh persamaan

$$w_\xi = 0,$$

dengan penyelesaian

$$w(\xi, \eta) = f(\eta)$$

sehingga diperoleh penyelesaian akhir

$$u(x, y) = f(\frac{1}{2}y^2 + x^2),$$

dengan f fungsi sebarang.

Contoh 2.5. *Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0.$$

Penyelesaian:
Dengan menggunakan persamaan (2.4) diperoleh persamaan karakteristik persamaan diferensialnya

$$\frac{dy}{dx} = 3,$$

dengan penyelesaian $y - 3x =$ konstan. Dengan mengambil $\eta(x, y) = y - 3x$ dan $\xi(x, y) = x$, maka syarat Jacobian tidak sama dengan nol terpenuhi. Oleh karena itu, diperoleh persamaan

$$w_\xi + 2w = 0,$$

dengan penyelesaian

$$w(\xi, \eta) = f(\eta)e^{-2\xi}$$

sehingga diperoleh penyelesaian akhir

$$u(x, y) = f(y - 3x)e^{-2x},$$

dengan f fungsi sebarang.

Contoh 2.6. *Tentukan penyelesaian persamaan diferensial*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} - 3u = 0,$$

yang memenuhi $u(0, y) = 2e^{-y}$.

Penyelesaian:
Dengan mengikuti cara penyelesaian Contoh 2.5, diperoleh penyelesaian umum persamaan diferensial

$$u(x, y) = f(y - 2x)e^{3x},$$

dengan f fungsi yang akan dicari. Dengan memasukkan syarat $u(0, y) = 2e^{-y}$, diperoleh

$$f(y) = 2e^{-y}.$$

Oleh karena itu, diperoleh hasil akhir penyelesaian

$$u(x, y) = 2e^{2x-y}e^{3x} = 3e^{5x-y}.$$

Selanjutnya pandang bentuk persamaan diferensial linier nonhomogen

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = d(x,y) \neq 0. \tag{2.7}$$

Dengan melakukan transformasi yang sama seperti pada persamaan homogen, persamaan (2.7) direduksi menjadi

$$a^*(\xi,\eta)w_\xi + c^*(\xi,\eta)w = d^*(\xi,\eta), \tag{2.8}$$

dengan $a^*(\xi,\eta) = a(x,y)$, $c^*(\xi,\eta) = c(x,y), d^*(\xi,\eta) = d(x,y)$, dan $w(\xi,\eta) = u(x,y)$. Persamaan (2.8) dapat diselesaikan seperti menyelesaikan persamaan diferensial biasa yang berbentuk persamaan diferensial linier nonhomogen dengan bentuk penyelesaian

$$w = w_h + w_p,$$

dengan w_h penyelesaian homogen dan w_p penyelesaian partikular persamaan (2.8). Penyelesaian akhir u diperoleh dengan transformasi balik $u(x,y) = w(\xi,\eta)$.

Contoh 2.7. *Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial*

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = x + 1.$$

Penyelesaian:
Dengan transformasi $\eta = y + 2x$ dan $\xi = x$, diperoleh bentuk reduksi persamaan diferensial

$$w_\xi = \xi + 1. \tag{2.9}$$

Persamaan (2.9) mempunyai penyelesaian homogen

$$w_h = f(\eta),$$

dan penyelesaian partikular

$$w_p = \frac{1}{2}\xi^2 + \xi.$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian akhir

$$u(x,y) = w(\xi,\eta) = w_h + w_p = u_h + u_p = f(y+2x) + \frac{1}{2}x^2 + x,$$

dengan f fungsi sebarang.

Contoh 2.8. *Tentukan penyelesaian persamaan diferensial*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} - 3u = e^{x+y}.$$

Penyelesaian:
Dengan transformasi $\eta = y - 2x$ dan $\xi = x$, diperoleh bentuk reduksi persamaan diferensial

$$w_\xi - 3w = e^{3\xi+\eta}. \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) mempunyai penyelesaian homogen

$$w_h = f(\eta)e^{3\xi},$$

dan penyelesaian partikular

$$w_p = \xi e^{3\xi+\eta}.$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian akhir

$$\begin{aligned} u(x,y) &= w(\xi,\eta) \\ &= w_h + w_p \\ &= u_h + u_p \\ &= f(y-2x)e^{3x} + xe^{x+y}, \end{aligned}$$

dengan f fungsi sebarang.

Contoh 2.9. *Tentukan penyelesaian persamaan diferensial*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + y^2 u = y^2, \qquad x, y \neq 0.$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristiknya adalah

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad \text{atau} \qquad xy = \text{konstan}.$$

Dengan transformasi $\eta = xy$ dan $\xi = x$ (periksa bahwa Jacobiannya tidak sama dengan nol), diperoleh bentuk reduksi persamaan diferensial

$$\xi w_\xi + \frac{\eta^2}{\xi^2} w = \frac{\eta^2}{\xi^2}. \tag{2.11}$$

Persamaan (2.11) mempunyai penyelesaian homogen

$$w_h = f(\eta)e^{\frac{\eta^2}{2\xi^2}},$$

dan penyelesaian partikular

$$w_p = 1.$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian akhir

$$\begin{aligned} u(x,y) &= w(\xi,\eta) \\ &= w_h + w_p \\ &= u_h + u_p \\ &= f(xy)e^{\frac{y^2}{2}} + 1, \end{aligned}$$

dengan f fungsi sebarang.

2.2 PDP Nonlinier Orde Satu

Sebelum membahas penyelesaian persamaan diferensial orde satu nonlinier, terlebih dahulu diberikan pengertian penyelesaian lengkap persamaan diferensial.
Diberikan $u = a$ dan $v = b$ merupakan dua penyelesaian yang bebas dari persamaan diferensial dengan sistem Lagrange, $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$, dan jika c dan d adalah konstanta-konstanta sebarang, maka $u = cv + d$ disebut **penyelesaian lengkap** dari $Pp + Qq = R$. Penyelesaian lengkap ini merupakan keluarga/koleksi permukaan yang berparameter dua, yang bisa atau tidak bisa mempunyai sebuah selubung. Sebagai contoh, persamaan diferensial parsial $xu_x + yu_y = 2u$ dengan penyelesaian umumnya $f(x/y, x^2/u) = 0$ maka penyelesaian lengkapnya adalah $x/y = cx^2/u + d$.

Misalkan persamaan diferensial nonlinier orde satu dinyatakan dalam

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{2.12}$$

yang didapatkan dengan cara mengeliminasi konstanta-konstanta sebarang a dan b dari persamaan

$$g(x, y, z, a, b) = 0.$$

Untuk mendapatkan selubung jika ada, dilakukan dengan mengeliminasi a dan b dari persamaan

$$g = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial b} = 0. \tag{2.13}$$

Misalkan hasil eliminasi persamaan (2.13) adalah persamaan

$$\lambda(x, y, z) = 0 \tag{2.14}$$

yang memenuhi persamaan (2.12), maka persamaan (2.14) disebut **persamaan singular** dari persamaan (2.12).

Diberikan PDP nonlinier orde satu

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{2.15}$$

dengan $z = u(x, y), p = \frac{\partial z}{\partial x}$ dan $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Penyelesaian lengkap persamaan (2.15) adalah

$$g(x, y, z, a, b) = 0 \tag{2.16}$$

dengan a dan b seperti penjelasan sebelumnya. Penyelesaian lengkap ini merupakan keluarga permukaan yang berparameter dua, yang dapat mempunyai selubung atau tidak. Untuk mendapatkan selubung ini (jika ada), dilakukan dengan cara mengeliminasi a dan b dari persamaan berikut

$$g = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial b} = 0. \tag{2.17}$$

Substitusi persamaan (2.17) ke persamaan (2.15), diperoleh

$$\lambda(x, y, z) = 0 \tag{2.18}$$

yang merupakan penyelesaian singular dari persamaan (2.15).
Jika persamaan (2.18) berbentuk

$$\lambda(x, y, z) = \xi(x, y, z)\eta(x, y, z)$$

dan jika $\xi(x, y, z) = 0$ memenuhi persamaan (2.15), namun $\eta(x, y, z) = 0$ tidak ada, maka $\xi(x, y, z) = 0$ adalah penyelesaian singularnya. Penyelesaian singular dapat diperoleh dengan mengeliminasi p dan q dari

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

Contoh 2.10. *Tentukan penyelesaian singular dari PDP nonlinier berikut*

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - \left[(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2\right]$$

Penyelesaian:
Penyelesaian lengkap dari PDP tersebut adalah

$$z = ax + by - (a^2 + b^2).$$

Untuk mendapatkan penyelesaian singular dari PDP tersebut dengan cara mengeliminasi a dan b dari persamaan-persamaan berikut

$$\begin{aligned} g &= z - ax - by + (a^2 + b^2) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial a} &= -x + 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{x}{2} \\ \frac{\partial g}{\partial b} &= -y + 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{y}{2} \end{aligned}$$

Kemudian substitusi nilai a dan b ini ke g sehingga diperoleh penyelesaian singular

$$4z = x^2 + y^2$$

yang merupakan keluarga bidang berparameter dua dengan selubungnya berbentuk paraboloida yang grafiknya diberikan pada Gambar 2.1.

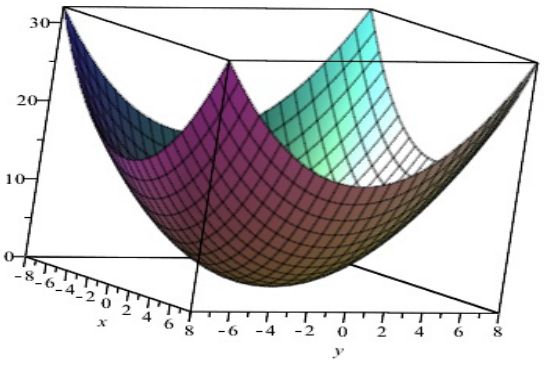
Jika penyelesaian lengkap persamaan (2.16) satu dari konstanta-konstantanya dapat dinyatakan sebagai fungsi konstanta yang lain, misal $b = \phi(a)$ maka persamaan (2.16) menjadi

$$g(x, y, z, a, \phi(a)) = 0 \tag{2.19}$$

yang hanya bergantung dari satu parameter saja. Jika keluarga ini mempunyai selubung, maka persamaan dapat diperoleh dengan mengeliminasi a dari persamaan berikut

$$g(x, y, z, a, \phi(a)) = 0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial g}{\partial a} = 0$$

dengan menentukan hasil dari persamaan tersebut yang memenuhi persamaan (2.15).



Gambar 2.1: Grafik paraboloida $4z = x^2 + y^2$

Contoh 2.11. *Tentukan penyelesaian umum dari PDP nonlinier berikut*

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - \left[(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2\right]$$

Penyelesaian:
Penyelesaian lengkap dari PDP tersebut adalah

$$z = ax + by - (a^2 + b^2).$$

Misal $\phi(a) = a$, maka penyelesaian lengkapnya menjadi

$$g = z - a(x + y) + 2a^2 = 0.$$

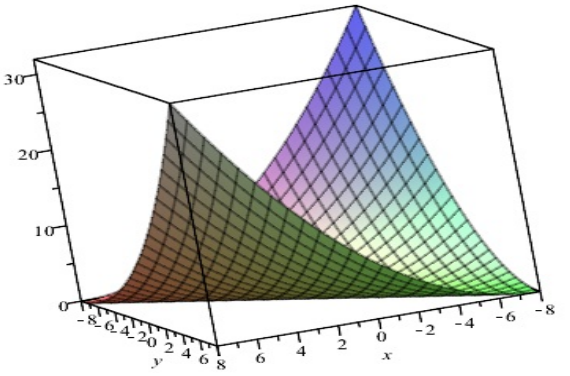
Selanjutnya, turunan fungsi g terhadap a diperoleh

$$\frac{\partial g}{\partial a} = -(x + y) + 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{x + y}{4}.$$

Subtitusikan nilai a ini ke penyelesaian lengkap, diperoleh penyelesaian umum

$$8z = (x + y)^2$$

yang merupakan persamaan silinder parabolik yang sejajar bidang $X0Y$ seperti diberikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2: Grafik silinder parabolik $8z = (x + y)^2$

2.3 Penyelesaian Tipe-tipe Khusus

Beberapa tipe khusus diberikan dalam sub-subbab berikut.

2.3.1 Tipe I

Tipe I mempunyai bentuk umum

$$f(p, q) = 0$$

dengan $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ dan $q = \frac{\partial z}{\partial y}$
Langkah-langkah penyelesaian PDP nonlinier tipe I ini dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut. Hasil eliminasi dari konstanta-konstanta sebarang $x = ax + h(a)y + c$ adalah $h(p) - q = 0$ yang merupakan fungsi berbentuk

$$f(p, q) = 0. \tag{2.20}$$

Untuk mendapatkan penyelesaian umum, diambil $c = \phi(a)$, dengan ϕ fungsi sebarang, selanjutnya eliminasikan a.

Contoh 2.12. *Tentukan penyelesaian lengkap dan penyelesaian umum persamaan diferensial*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

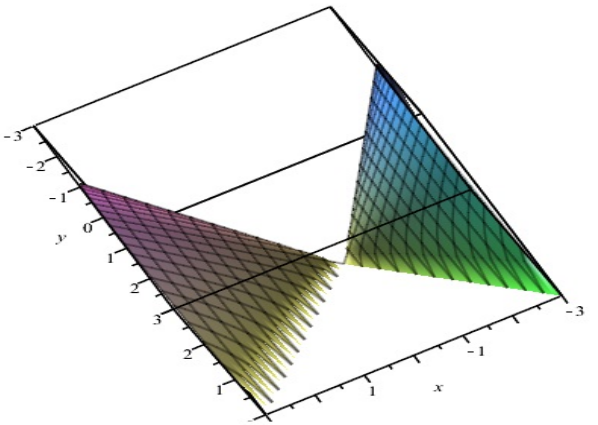
Penyelesaian:
Bentuk persamaan di atas adalah

$$f(p,q) = p^2 - q^2 - 1 = 0.$$

Ambil $p = a, q = h(a)$ maka diperoleh $f(a, h(a)) = a^2 - h^2(a) - 1 = 0$. Secara eksplisit, h dapat dinyatakan sebagai fungsi dari a yaitu $h(a) = \sqrt{a^2 - 1}$. Oleh karena itu, diperoleh persamaan lengkapnya

$$z = ax + \sqrt{a^2 - 1}y + c.$$

Jika diambil $a = \sec\alpha$, maka $h(a) = \sqrt{\sec^2\alpha} = \tan\alpha$ sehingga diperoleh $z = x\sec\alpha + y\tan\alpha + c$.
Jika dipilih $c = \psi\alpha = 0$, lalu α dieliminasi dari persamaan $z = x\sec\alpha + y\tan\alpha$, maka diperoleh $\sec\alpha = \frac{x}{x^2-y^2}$ dan $0 = x\tan\alpha + y\sec\alpha$ sehingga diperoleh $\sin\alpha = -\frac{y}{x}$. Bila keduanya disubstitusikan ke dalam persamaan $z = x\sec\alpha + y\tan\alpha$ diperoleh permukaan kerucut $z^2 = x^2 - y^2$ seperti diberikan dalam Gambar 2.3.



Gambar 2.3: Grafik permukaan kerucut $z^2 = x^2 - y^2$

2.3.2 Tipe II

Tipe II mempunyai bentuk umum

$$z = px + qy + f(p,q)$$

Dengan mengeliminasi konstanta-konstanta sebarang

$$z = ax + by + f(a, b)$$

diperoleh PDP berbentuk $z = px + qy + f(p, q)$. Penyelesaian lengkap berupa keluarga bidang-bidang berparameter dua. Penyelesaian singularnya adalah permukaan yang memiliki penyelesaian lengkap sebagai bidang singgungnya.

Contoh 2.13. *Carilah penyelesaian singular dari persamaan*

$$z = px + qy + p^2 + pq + q^2.$$

Penyelesaian:
Penyelesaian lengkap persamaan diferensialnya adalah $z = ax + by + a^2 + ab + b^2$. Penyelesaian singularnya diperoleh apabila

$$x + 2a + b = 0 \qquad \text{dan} \qquad y + a + 2b = 0,$$

yang menghasilkan

$$a = \frac{y - 2x}{3} \qquad \text{dan} \qquad b = \frac{x - 2y}{3},$$

lalu disubstitusikan ke persamaan yang menyatakan persamaan lengkapnya sehingga menghasilkan persamaan singular

$$3z = xy - x^2 - y^2,$$

yang berbentuk paraboloida seperti diberikan pada Gambar 2.4.

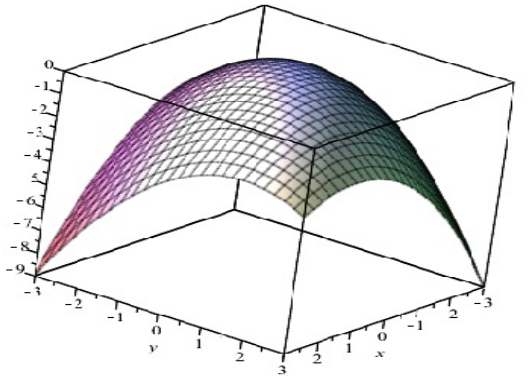
2.3.3 Tipe III

Tipe III mempunyai bentuk umum

$$f(z, p, q) = 0.$$

Untuk memperoleh penyelesaian PDP tipe ini dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.
Misalkan $z = F(x+ay) = F(u)$ dengan a konstanta sebarang. Turunan-turunan parsial persamaan tersebut adalah

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du},$$



Gambar 2.4: Grafik permukaan paraboloida $3z = xy - x^2 - y^2$

dan

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = a\frac{dz}{du}.$$

Dengan mensubstitusikan hasil-hasil ini ke persamaan diferensial, diperoleh bentuk

$$f(z, \frac{dz}{du}, a\frac{dz}{du}) = 0.$$

Contoh 2.14. *Tentukan penyelesaian persamaan diferensial*

$$4(1 + z^3) = 9z^4pq.$$

Penyelesaian:
Misal $z = F(x + ay) = F(u)$, diperoleh

$$4(1 + z^3) = 9az^4(dz/du)^2,$$

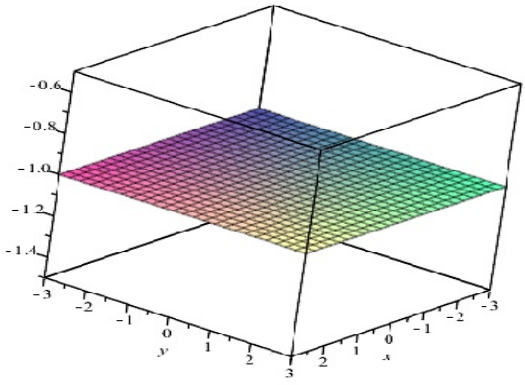
yang mempunyai penyelesaian

$$\sqrt{a(1 + z^3)} = u + b,$$

dan penyelesaian lengkapnya

$$a(1 + z^3) = (x + ay + b)^2.$$

Dengan mengeliminasi konstanta a dan b dari $1 + z^3 = 2y(ax + ay + b)$ dan $2(x + ay + b) = 0$, diperoleh penyelesaian singular $z^3 + 1 = 0$ yang merupakan bidang datar seperti diberikan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5: Grafik permukaan $z^3 + 1 = 0$.

2.4 Rangkuman

1. Bentuk umum persamaan diferensial linier orde satu dengan dua peubah bebas x, y dan peubah terikat u adalah

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = d(x,y).$$

2. Persamaan diferensial linier homogen orde satu dengan dua peubah bebas x, y dan peubah terikat u

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0,$$

dapat ditransformasi dengan peubah bebas $\eta = \eta(x,y)$ dan $\xi = \xi(x,y)$ yang memiliki Jacobian tidak nol, dapat mereduksi persamaan diferensial parsial menjadi bentuk

$$a^*(\xi,\eta)\frac{\partial w}{\partial \xi} + c^*(\xi,\eta)w = 0,$$

dengan $w(\xi,\eta) = u(x,y), a^*(\xi,\eta) = a(x,y)$, dan $c^*(\xi,\eta) = c(x,y)$ yang dapat diselesaikan dengan metode persamaan diferensial biasa berbentuk persamaan diferensial linier homogen.

3. Persamaan diferensial linier nonhomogen orde satu dengan dua peubah bebas x, y dan peubah terikat u

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = d(x,y) \neq 0,$$

dapat ditransformasi dengan peubah bebas $\eta = \eta(x,y)$ dan $\xi = \xi(x,y)$ yang memiliki Jacobian tidak nol, dapat mereduksi persamaan diferensial parsial menjadi bentuk

$$a^*(\xi,\eta)\frac{\partial w}{\partial \xi} + c^*(\xi,\eta)w = d^*(\xi,\eta),$$

dengan $w(\xi,\eta) = u(x,y), a^*(\xi,\eta) = a(x,y), c^*(\xi,\eta) = c(x,y)$, dan $d^*(\xi,\eta) = d(x,y)$ yang dapat diselesaikan dengan metode persamaan diferensial biasa berbentuk persamaan diferensial linier nonhomogen.

4. Persamaan diferensial orde satu nonlinier dengan bentuk umum

$$z = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + f(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

mempunyai penyelesaian lengkap berupa keluarga bidang-bidang berparameter dua. Penyelesaian singularnya adalah permukaan yang memiliki penyelesaian lengkap sebagai bidang singgungnya.

2.5 Soal-soal Latihan

1. Tentukan penyelesaian umum persamaan-persamaan diferensial berikut:
   a. $u_x + yu_y = 0$,
   b. $(1+x^2)u_x + u_y = 0$,
   c. $2xyu_x + (x^2+y^2)u_y = 0$,
   d. $yu_y - xu_x = 1$,
   e. $y^2u_x - xyu_y = x(u-2y)$,

2. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial

$$3u_x + 2u_y = 0,$$

yang memenuhi kondisi $u(x,0) = \sin x$.

3. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial

$$yu_x + xu_y = 0,$$

yang memenuhi kondisi $u(0,y) = e^{-y^2}$.

4. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial

$$xu_x + yu_y = 2xy,$$

yang memenuhi kondisi $u(x, x^2) = 2$.

5. Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$u_x + 2xy^2 u_y = 0.$$

6. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial linier

$$x^2 u_x + y^2 u_y = (x + y)u.$$

7. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial

$$xu_x + (x + y)u_y = u + 1,$$

yang memenuhi kondisi $u(x, 0) = x^2$.

8. Tunjukkan bahwa $u_1 = e^x$ dan $u_2 = e^{-y}$ keduanya merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial nonlinier

$$(u_x + u_y)^2 - u^2 = 0,$$

tetapi jumlahan keduanya, yakni $e^x + e^{-y}$, bukan penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

9. Carilah penyelesaian lengkap dan singular dari PDP berikut

$$\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2 = z$$

10. Carilah penyelesaian lengkap dan singular dari PDP berikut

$$1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2 = z\frac{\partial z}{\partial y}$$

11. Carilah penyelesaian lengkap dan singular dari PDP berikut

$$z^4\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 - 2yz\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0.$$

12. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial nonlinier

$$ux^2 u_x + e^{-y} y_y + u^2 = 0,$$

yang memenuhi kondisi $u(x, 0) = 1$ untuk $x > 0$.

2.6 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu bagaimana cara menentukan penyelesaian persamaan diferensial orde satu nonlinier dalam bentuk kombinasi dari $x\frac{\partial z}{\partial x}$.

2.7 Daftar Rujukan

1. Rusli Hidayat, 2006, *Persamaan Diferensial Parsial*, Jember: UPT Penerbitan Universitas Jember

2. Peter J. Olver, 2014. *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer International Publishing Switzerland

3. J. David Logan, 2015, *Applied Partial Differential Equations*, 3rd, Springer International Publishing Switzerland

4. David Borthwick , 2016, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer International Publishing Switzerland

5. Victor Ivrii , 2021, *Partial Differential Equations*, Department of Mathematics, University of Toronto

Bab 3

PDP Linier Orde Tinggi dengan Koefisien Konstan

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa mampu menentukan penyelesaian persamaan diferensial parsial linier homogen orde tinggi dengan koefisien konstan.
2. Mahasiswa mampu menentukan penyelesaian partikular persamaan diferensial parsial linier nonhomogen orde tinggi dengan koefisien konstan.
3. Mahasiswa mampu menentukan penyelesaian masalah nilai awal dan nilai batas yang melibatkan persamaan diferensial parsial linier nonhomogen orde tinggi dengan koefisien konstan.

3.1 Penyelesaian PDP Linier Homogen

Perhatikan dua PDP linier homogen berikut

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3.1}$$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{3.2}$$

dengan A, B, dan C konstanta-konstanta.
Pada subbab ini akan diperlihatkan bahwa metode penyelesaian persamaan (3.1) dan (3.2) adalah sama dengan metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode operator diferensial: $f(D)u = g(x)$ dengan $D = \frac{d}{dx}$. Namun pada kasus di sini, akan digunakan dua operator yaitu $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ dan $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$. Dengan demikian, persamaan (3.1) dan (3.2) masing-masing dapat ditulis dalam bentuk

$$f(D_x, D_y) = (AD_x + BD_y)u = 0 \tag{3.3}$$

$$f(D_x, D_y) = (AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)u = 0, \tag{3.4}$$

Pada persamaan (3.3), $(AD_x + BD_y)u = 0$ yang bila diselesaikan dengan sistem Lagrange akan diperoleh

$$\frac{\partial x}{A} = \frac{\partial y}{B} \Rightarrow y = \frac{B}{A}x + c \Rightarrow c = y - \frac{B}{A}x.$$

Penyelesaian homogen dari persamaan (3.1) adalah $u(x, y) = f(y - \frac{B}{A}x)$ dengan f fungsi sebarang.
Langkah selanjutnya, ambil $u = f(y + mx) = f(z)$ dengan f fungsi sebarang. Sebagai penyelesaian persamaan (3.2) dilakukan dengan menggunakan substitusi

$$z = y + mx \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \frac{\partial z}{\partial x} = m$$

$$D_x u = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = m\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$D_y u = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$D_x^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(m\frac{\partial f}{\partial z}\Big) = m^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$D_y^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ke persamaan (3.2) sehingga diperoleh persamaan

$$Am^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + Bm\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + C\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

atau

$$(Am^2 + Bm + C)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Karena f fungsi sebarang, maka $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \neq 0$, jadi haruslah

$$Am^2 + Bm + c = 0 \tag{3.5}$$

yang merupakan persamaan karakteristik dari persamaan (3.4). Misalkan m_1 dan m_2 adalah akar-akar dari persamaan (3.5), maka penyelesaian umum dari persamaaan (3.2) adalah

$$u(x, y) = f_1(y + m_1 x) + f_2(y + m_2 x)$$

dengan f_1 dan f_2 fungsi sebarang.
Terdapat tiga kasus untuk nilai-nilai m_1 dan m_2, yakni $m_1 = m_2$ kembar real, $m_1 \neq m_2$ keduanya real, dan m_1 dan m_2 kompleks sekawan. Adapun penyelesaian persamaan dari tiga kasus ini diberikan berikut.

1. Jika $m_1 \neq m_2$ keduanya real, maka penyelesaian persamaan (3.2) adalah
$$u(x, y) = f_1(y + m_1 x) + f_2(y + m_2 x)$$
dengan f_1 dan f_2 fungsi sebarang.

2. Jika $m_1 = m_2 = m$ kembar real, maka penyelesaian persamaan (3.2) adalah
$$u(x, y) = f_1(y + mx) + x f_2(y + mx)$$
dengan f_1 dan f_2 fungsi sebarang.

3. Jika m_1 dan m_2 kompleks sekawan misal $m_{12} = a \pm ib$, maka penyelesaian persamaan (3.2) adalah
$$u(x, y) = f_1(y + (a + ib)x) + f_2(y + (a - ib)x)$$
dengan f_1 dan f_2 fungsi sebarang.

Contoh 3.1. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Penyelesaian:
Pada contoh ini, persamaan karakteristiknya adalah $m^2 - 7m + 12 = 0$ dengan akar-akarnya adalah $m_1 = 4$ dan $m_2 = 3$, sehingga penyelesaian umum persamaan adalah

$$u(x, y) = f_1(y + 4x) + f_2(y + 3x)$$

dengan f_1 dan f_2 fungsi-fungsi sebarang.

Contoh 3.2. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristik persamaan diferensial ini adalah $m^2 + 4m + 4 = 0$ dengan akar-akarnya adalah $m_1 = m_2 = -2$, sehingga penyelesaian umum persamaan diferensialnya adalah

$$u(x, y) = f_1(y - 2x) + x f_2(y - 2x)$$

dengan f_1 dan f_2 fungsi-fungsi sebarang.

Contoh 3.3. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Penyelesaian:
Persamaan karakteristik persamaan diferensial ini adalah $m^2 - 2m + 5 = 0$ dengan akar-akarnya adalah $m_{12} = 1 \pm 2i$, sehingga penyelesaian umum persamaan diferensialnya adalah

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f_1(y + (1 + 2i)x) + f_2(y + (1 - 2i)x) + \\ &\quad i\big(f_1(y + (1 + 2i)x) + f_2(y + (1 - 2i)x)\big) \end{aligned}$$

dengan f_1 dan f_2 fungsi-fungsi sebarang.

Contoh 3.4. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

yang memenuhi $u(0, y) = \sin(y)$ *dan* $u_x(0, y) = y$.

Penyelesaian:
Persamaan karakteristik persamaan diferensial ini adalah $m^2 + m - 2 = 0$ dengan akar-akarnya adalah $m_1 = 1$ dan $m_2 = -2$, sehingga penyelesaian umum persamaan diferensialnya adalah

$$u(x, y) = f_1(y + x) + f_2(y - 2x). \tag{3.6}$$

Dengan memasukkan syarat $u(0, y) = \sin y$ ke persamaan (3.6), diperoleh hubungan

$$f_1(y) + f_2(y) = \sin y.$$

atau

$$f_2(y) = \sin y - f_1(y). \tag{3.7}$$

Kemudian dengan menurunkan persamaan (3.6) terhadap peubah x, diperoleh

$$u_x(x, y) = f_1'(y + x) - 2f_2'(y - 2x)$$

dan mensubstitusikan syarat $u_x(0, y) = y$ sehingga diperoleh

$$f_1'(y) - 2f_2'(y) = y$$

atau

$$f_2'(y) = \frac{1}{2}f_1'(y) - \frac{1}{2}y. \tag{3.8}$$

Dengan mengintegralkan persamaan (3.8) terhadap peubah y, diperoleh

$$f_2(y) = \frac{1}{2}f_1(y) - \frac{1}{4}y^2. \tag{3.9}$$

Substitusi persamaan (3.9) ke persamaan (3.7), diperoleh

$$\frac{1}{2}f_1(y) - \frac{1}{4}y^2 = \sin y - f_1(y), \tag{3.10}$$

sehingga diperoleh

$$f_1(y) = \frac{2}{3}\sin y + \frac{1}{6}y^2. \tag{3.11}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.9) dan (3.11) ke persamaan (3.6), diperoleh penyelesaian akhir

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{2}{3}\sin(y+x) + \frac{1}{6}(y+x)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}\sin(y-2x) + \frac{1}{6}(y-2x)^2\Big) - \frac{1}{4}(y-2x)^2 \\ &= \frac{2}{3}\sin(y+x) + \frac{1}{6}(y+x)^2 + \frac{1}{3}\sin(y-2x) - \frac{1}{6}(y-2x)^2. \end{aligned}$$

3.2 Penyelesaian PDP Linier Nonhomogen

Pandang persamaan diferensial

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y) \neq 0,$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$(AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)u = g(x,y),$$

mempunyai penyelesaian umum

$$u(x,y) = u_h(x,y) + u_p(x,y)$$

dengan u_h adalah *penyelesaian homogen* dari persamaan berikut

$$f(D_x, D_y)u = (AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)u = 0,$$

seperti yang sudah diberikan pada Subbab 3.1 dan u_p adalah *penyelesaian partikularnya.*
Untuk mendapatkan penyelesaian partikular, diberikan sebagai berikut.

1. Jika $g(x,y) = e^{(ax+by)}$ dan $f(a,b) \neq 0$, maka penyelesaian partikularnya adalah

$$u_p(x,y) = \frac{1}{f(D_x, D_y)}e^{(ax+by)} = \frac{1}{f(a,b)}e^{(ax+by)}.$$

   Jika $g(x,y) = e^{(ax+by)}$ dan $f(a,b) = 0$, nyatakan terlebih dahulu

$$f(D_x, D_y) = (D_x - \frac{a}{b}D_y)^r F(D_x, D_y),$$

dengan $F(a,b) \neq 0$, maka

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x,D_y)} e^{(ax+by)} \\ &= \frac{1}{F(a,b)} \frac{x^r}{r!} e^{(ax+by)}. \end{aligned}$$

2. Jika $g(x,y) = \sin(ax+by)$ atau $g(x,y) = \cos(ax+by)$ dan $f(-a^2,-ab,-b^2) \neq 0$, maka penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \sin(ax+by) \\ &= \frac{1}{f(-a^2,-ab,-b^2)} \sin(ax+by), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \cos(ax+by) \\ &= \frac{1}{f(-a^2,-ab,-b^2)} \cos(ax+by), \end{aligned}$$

Jika $f(-a^2,-ab,-b^2) = 0$, dapat menggunakan sifat bilangan kompleks bahwa $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, sehingga diperoleh $\sin x = Im\{e^{ix}\}$ dan $\cos x = Re\{e^{ix}\}$. Penyelesaian selanjutnya mengikuti aturan pada butir 1.

3. Jika $g(x,y)$ merupakan polinomial berderajat n untuk x dan berderajat m untuk y, maka penyelesaian partikularnya

$$u_p(x,y) = \frac{1}{f(D_x,D_y)} g(x,y) = \Big(\sum p_{mn} D_x^n D_y^m \Big) g(x,y)$$

4. Jika $g(x,y) = e^{(ax+by)} v(x,y)$, maka penyelesaian partikularnya

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x,D_y)} e^{(ax+by)} v(x,y) \\ &= e^{(ax+by)} \frac{1}{f(D_x+a, D_y+b)} v(x,y) \end{aligned}$$

Contoh 3.5. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{(2x-y)}.$$

Penyelesaian:
Dalam kasus ini, $f(D_x, D_y) = D_x^2 - 7D_xD_y + 12D_y^2$ dan $a = 2, b = -1$. Karena $f(2,-1) = 2^2 - 7(2)(-1) + 12(-1)^2 = 30 \neq 0$, maka

$$u_p(x,y) = \frac{1}{f(D_x, D_y)} e^{(2x-y)} = \frac{1}{30} e^{(2x-y)}.$$

Contoh 3.6. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{(4x+y)}.$$

Penyelesaian:
Dalam kasus ini, $f(D_x, D_y) = D_x^2 - 7D_xD_y + 12D_y^2$ dan $a = 4, b = 1$. Karena $f(4,1) = (4)^2 - 7(4)(1) + 12(1)^2 = 0$, maka $f(D_x, D_y) = (D_x - 4D_y)(D_x - 3D_y)$ sehingga dapat dipilih $F(D_x, D_y) = (D_x - 3D_y)$ karena $F(4,1) = 4 - 3(1) = 1 \neq 0$. Dengan demikian, penyelesaian partikularnya adalah

$$u_p(x,y) = \frac{1}{f(D_x, D_y)} e^{(4x+y)} = \frac{1}{F(4,1)} \frac{x}{1!} e^{(4x+y)} = xe^{(4x+y)}.$$

Contoh 3.7. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(2x - 3y).$$

Penyelesaian:
Dalam kasus ini, $f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2) = D_x^2 - 7D_xD_y + 12D_y^2$ dan $a = 2, b = -3$. Karena $f(-4,6,-9) = -4 + 7(2)(-3) - 12(-3)^2 = -4 - 42 - 108 = -154 \neq 0$, maka

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \sin(2x - 3y) \\ &= \frac{1}{f(-4,6,-9)} \sin(2x - 3y) = -\frac{1}{154} \sin(2x - 3y). \end{aligned}$$

Contoh 3.8. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(2x + y).$$

Penyelesaian:
Dalam kasus ini, $f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2) = D_x^2 - D_xD_y - 2D_y^2$ dan $a = 2, b = 1$. Karena $f(-4, -2, -1) = -4 + 2 + 2 = 0$, maka

$$\begin{aligned}
u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \sin(2x+y) \\
&= Im\Big\{ \frac{1}{D_x^2 - D_xD_y - 2D_y^2} e^{i(2x+y)} \Big\} \\
&= Im\Big\{ \frac{1}{(D_x - 2D_y)(D_x + D_y)} e^{i(2x+y)} \Big\} \\
&= Im\Big\{ \frac{1}{2i + i} \frac{x}{1!} e^{i(2x+y)} \Big\} \\
&= Im\Big\{ -\frac{x}{3} i \big[\cos(2x+y) + i \sin(2x+y) \big] \Big\} \\
&= Im\Big\{ -i\frac{x}{3} \cos(2x+y) + \frac{x}{3} \sin(2x+y) \Big\} \\
&= -\frac{x}{3} \cos(2x+y).
\end{aligned}$$

Contoh 3.9. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y.$$

Penyelesaian:
Dalam kasus ini, $f(D_x, D_y) = D_x^2 - 7D_xD_y + 12D_y^2$. Oleh karena itu, penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned}
u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x, D_y)}(x+y) = \frac{1}{D_x^2 - 7D_xD_y + 12D_y^2}(x+y) \\
&= \frac{1}{D_x^2} \frac{1}{1 - \Big[7\frac{D_y}{D_x} - 12\big(\frac{D_y^2}{D_x^2}\big) \Big]}(x+y) \\
&= \frac{1}{D_x^2} \Big(1 + \Big[7\frac{D_y}{D_x} - 12\big(\frac{D_y^2}{D_x^2}\big) \Big] \Big)(x+y) \\
&= \frac{1}{D_x^2} \Big[x + y + \frac{1}{D_x} 7 \Big] \\
&= \frac{1}{D_x^2} \Big[8x + y \Big] \\
&= \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y.
\end{aligned}$$

Contoh 3.10. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^{(x+2y)}.$$

Penyelesaian:
Dalam kasus ini, $f(D_x, D_y) = D_x^2 + D_x D_y + D_y^2$. Oleh karena itu, penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x,D_y)} xe^{(x+2y)} = \frac{1}{D_x^2 + D_x D_y + D_y^2} xe^{(x+2y)} \\ &= e^{(x+2y)} \frac{1}{(D_x+1)^2 + (D_x+1)(D_y+2) + (D_y+2)^2} x \\ &= e^{(x+2y)} \frac{1}{D_x^2 + D_x D_y + D_y^2 + 4D_x + 5D_y + 7} x \\ &= \frac{e^{(x+2y)}}{7} \big[1 + \frac{4}{7} D_x\big] x \\ &= \frac{e^{(x+2y)}}{7} \big[x + \frac{4}{7}\big]. \end{aligned}$$

Untuk kasus persamaan diferensial linier orde n homogen dengan bentuk

$$a_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a_{n-1} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y} + \cdots + a_1 \frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}} + a_0 \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0 \qquad (3.12)$$

mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$$

yang mempunyai akar-akar $m_1, m_2, \cdots, m_n$.

1. Jika $m_1, m_2, \cdots, m_n$ semuanya real berbeda, maka penyelesaian persamaan diferensial (3.12) adalah

   $$u(x,y) = f_1(y + m_1 x) + f_2(y + m_2 x) + \cdots + f_n(y + m_n x)$$

   dengan $f_1, f_2, \cdots, f_n$ fungsi sebarang.

2. Jika $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$ semua real, maka penyelesaian persamaan diferensial (3.12) adalah

   $$\begin{aligned} u(x,y) &= f_1(y + mx) + x f_2(y + mx) + x^2 f_3(y + mx) + \cdots \\ &\quad + x^{n-1} f_n(y + mx) \end{aligned}$$

   dengan $f_1, f_2, \cdots, f_n$ fungsi sebarang.

Contoh 3.11. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 5\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Penyelesaian:
Pada contoh ini, persamaan karakteristiknya adalah $m^4 - 5m^2 + 4 = 0$ dengan akar-akarnya adalah $m_1 = 1, m_2 = -1, m_3 = 2$, dan $m_4 = -2$, sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$u(x, y) = f_1(y + x) + f_2(y - x) + f_3(y + 2x) + f_4(y - 2x)$$

dengan f_1, f_2, f_3, dan f_4 fungsi-fungsi sebarang.

Contoh 3.12. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 12\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - 8\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0.$$

Penyelesaian:
Pada contoh ini, persamaan karakteristiknya adalah $m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = 0$ dengan akar-akarnya adalah $m_1 = m_2 = m_3 = 2$, sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$u(x, y) = f_1(y + 2x) + xf_2(y + 2x) + x^2 f_3(y + 2x)$$

dengan f_1, f_2, dan f_3 fungsi-fungsi sebarang.

Contoh 3.13. *Selesaikan persamaan diferensial*

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} - 3\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 8\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} - 4\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Penyelesaian:
Pada contoh ini, persamaan karakteristiknya adalah $m^4 - 2m^3 - 3m^2 + 8m - 4 = 0$ dengan akar-akarnya adalah $m_1 = 2, m_2 = -2$ dan $m_3 = m_4 = 1$, yang merupakan kombinasi dari akar-akar real berbeda dan akar-akar real kembar. Dengan demikian penyelesaian umumnya adalah

$$u(x, y) = f_1(y + 2x) + f_2(y - 2x) + f_3(y + x) + xf_4(y + x)$$

dengan f_1, f_2, f_3, dan f_4 fungsi-fungsi sebarang.

Contoh 3.14. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = e^{2x-y}.$$

Penyelesaian:
Pada contoh ini, $f(D_x, D_y) = D_x^3 - 2D_x^2 D_y + 3D_x D_y^2$ dan $a = 2, b = -1$. Karena $f(2,-1) = 2^3 - 2(2^2)(-1) + 3(2)(-1)^2 = 22 \neq 0$, maka

$$u_p(x,y) = \frac{1}{f(D_x, D_y)} e^{2x-y} = \frac{1}{22} e^{2x-y}.$$

Contoh 3.15. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 12\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 8\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = e^{2x-y}.$$

Penyelesaian:
Dalam contoh ini, $f(D_x, D_y) = D_x^3 + 6D_x^2 D_y + 12 D_x D_y^2 + 8D_y^3$ dan $a = 2, b = -1$. Karena $f(2,-1) = 2^3 + 6(2)^2(-1) + 12(2)(-1)^2 + 8(-1)^3 = 0$, maka $f(D_x, D_y) = (D_x + 2D_y)^3 F(D_x, D_y)$ dengan $F(D_x, D_y) = 1$. Dengan demikian, penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x, D_y)} e^{2x-y} = \frac{1}{D_x^3 + 6D_x^2 D_y + 12 D_x D_y^2 + 8D_y^3} e^{2x-y} \\ &= \frac{1}{(D_x + 2D_y)^3 F(2,-1)} e^{2x-y} \\ &= \frac{x^3}{3!} e^{2x-y} = \frac{1}{6} x^3 e^{2x-y}. \end{aligned}$$

Contoh 3.16. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \sin(2x - y).$$

Penyelesaian:
Pada contoh ini, $f(D_x^2, D_x D_y, D_y^2) = D_x^3 - D_x^2 D_y + D_x D_y^2 - D_y^3$ dan $a = 2, b = -1$. Karena itu diperoleh $f(-4, 2, -1) = -4D_x + 4D_y - D_x + D_y = -5D_x + 5D_y$. Dengan demikian, penyelesaian partikularnya

adalah

$$\begin{aligned}
u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \sin(2x-y) \\
&= \frac{1}{f(-4,2,-1)} \sin(2x-y) \\
&= -\frac{1}{5}\frac{1}{(D_x - D_y)} \sin(2x-y) \\
&= -\frac{1}{5}\frac{1}{(D_x - D_y)}\frac{(D_x + D_y)}{(D_x + D_y)} \sin(2x-y) \\
&= -\frac{1}{5}\frac{1}{(D_x^2 - D_y^2)}(D_x + D_y)\sin(2x-y) \\
&= -\frac{1}{5}\frac{1}{(D_x^2 - D_y^2)}\left[2\cos(2x-y) - \cos(2x-y)\right] \\
&= -\frac{1}{5}\frac{1}{(D_x^2 - D_y^2)}\cos(2x-y) \\
&= -\frac{1}{5}\frac{1}{[-4-(-1)]}\cos(2x-y) \\
&= \frac{1}{15}\cos(2x-y).
\end{aligned}$$

3.3 PDP Linier yang Dapat Direduksi

Persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan

$$f(D_x, D_y)u = g(x,y) \tag{3.13}$$

dikatakan **dapat direduksi** jika fungsi $f(D_x, D_y)$ pada ruas kiri persamaan (3.13) dapat difaktorkan menjadi perkalian dari bentuk-bentuk derajat satu dalam D_x dan D_y. Sebagai contoh, persamaan diferensial

$$(D_x^2 - D_y^2 + 3D_x + D_y + 2)u = x^2 + \sin(2x-y)$$

merupakan persamaan diferensial yang dapat direduksi karena

$$f(D_x, D_y) = (D_x^2 - D_y^2 + 3D_x + D_y + 2) = (D_x + D_y + 1)(D_x - D_y + 2).$$

Penyelesaian persamaan diferensial linier homogen

$$f(D_x, D_y)u = (aD_x + bD_y + c)u = 0$$

adalah

$$u(x,y) = e^{-cx/a} f(ay - bx), \text{untuk } a \neq 0,$$

atau

$$u(x,y) = e^{-cy/b} f(ay - bx), \text{untuk } b \neq 0,$$

dengan f fungsi sebarang.
Penyelesaian persamaan diferensial linier homogen

$$f(D_x, D_y)u = (a_1 D_x + b_1 D_y + c_1)(a_2 D_x + b_2 D_y + c_2)u = 0$$

adalah

$$u(x,y) = e^{-c_1 x/a_1} f_1(a_1 y - b_1 x) + e^{-c_2 x/a_2} f_1(a_2 y - b_2 x),$$

atau

$$u(x,y) = e^{-c_1 y/b_1} f_1(a_1 y - b_1 x) + e^{-c_2 x/a_2} f_1(a_2 y - b_2 x),$$

atau

$$u(x,y) = e^{-c_1 x/a_1} f_1(a_1 y - b_1 x) + e^{-c_2 y/b_2} f_1(a_2 y - b_2 x),$$

atau

$$u(x,y) = e^{-c_1 y/b_1} f_1(a_1 y - b_1 x) + e^{-c_2 y/b_2} f_1(a_2 y - b_2 x),$$

dengan f_1 dan f_2 fungsi sebarang.

Contoh 3.17. *Tentukan penyelesaian persamaan diferensial*

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0.$$

Penyelesaian:
Pada contoh ini $f(D_x, D_y) = 2D_x^2 - 3D_y^2 - 5D_x D_y + D_x - D_y + 2 = (2D_x + D_y + 1)(D_x - 3D_y + 2)$. Dengan demikian salah satu bentuk penyelesaian umumnya adalah

$$u(x,y) = e^{-x/2} f_1(2y - x) + e^{-2x} f_2(y + 3x)$$

dengan f_1 dan f_2 fungsi sebarang.

Untuk penyelesaian partikular persamaan diferensial linier yang dapat direduksi cara mendapatkannya tidak berbeda dengan mencari penyelesaian partikular seperti sebelumnya.

Contoh 3.18. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan diferensial*

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = e^{x-y}.$$

Penyelesaian:
Pada contoh ini, $f(D_x, D_y) = 2D_x^2 - 3D_y^2 - 5D_xD_y + D_x - D_y + 2$, sehingga $f(1,-1) = 2(1)^2 - 3(-1)^2 - 5(1)(-1) + 1 - (-1) + 2 = 8 \neq 0$. Dengan demikian penyelesaian partikularnya adalah

$$u_p(x,y) = \frac{1}{f(D_x, D_y)} e^{x-y} = \frac{1}{f(1,-1)} e^{x-y} = \frac{1}{8} e^{x-y}.$$

Contoh 3.19. *Tentukan penyelesaian partikular persamaan diferensial*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + u = \cos(x - 2y).$$

Penyelesaian:
Pada contoh ini, $f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2) = D_x^2 - 2D_y^2 + D_x - D_y + 1$, sehingga $f(-1, 2, -4) = -1^2 + 2(-2)^2 + D_x - D_y + 1 = D_x - D_y + 8$. Dengan demikian penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned}
u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)} \cos(x - 2y) \\
&= \frac{1}{f(-1, 2, -4)} \cos(x - 2y) \\
&= \frac{1}{(D_x - D_y + 8)} \cos(x - 2y) \\
&= \frac{1}{(D_x - D_y + 8)} \frac{(D_x - D_y - 8)}{(D_x - D_y - 8)} \cos(x - 2y) \\
&= (D_x - D_y - 8) \frac{1}{(D_x^2 - 2D_xD_y + D_y^2 - 64)} \cos(x - 2y) \\
&= (D_x - D_y - 8) \frac{1}{(-1^2 + 2(-2) - 2^2 - 64)} \cos(x - 2y) \\
&= -\frac{1}{72}\big[-\sin(x - 2y) - 2\sin(x - 2y) - 8\cos(x - 2y)\big] \\
&= \frac{1}{72}\big[3\sin(x - 2y) + 8\cos(x - 2y)\big].
\end{aligned}$$

3.4 PDP Linier yang Tidak Dapat Direduksi

PDP linier homogen dengan koefisien konstan

$$f(D_x, D_y)u = 0 \tag{3.14}$$

dikatakan **tidak dapat direduksi** jika fungsi $f(D_x, D_y)$ pada ruas kiri persamaan (3.14) tidak dapat difaktorkan menjadi perkalian dari bentuk-bentuk derajat satu dalam D_x dan D_y. Sebagai contoh, persamaan diferensial

$$f(D_x, D_y)u = (D_x^2 + D_x + D_y)u = 0$$

merupakan persamaan diferensial yang tidak dapat direduksi.
Karena sifat operator $D_x^m D_y^n C e^{ax+by} = C a^m b^n e^{ax+by}$ dengan a, b, dan C konstanta-konstanta, maka penyelesaian dengan menggunakan substitusi persamaan

$$u = Ce^{ax+by} \tag{3.15}$$

ke dalam persamaan (3.14) akan menghasilkan $Cf(a, b)e^{ax+by} = 0$. Karena persamaan (3.15) adalah penyelesaian persamaan (3.14) dan $Ce^{ax+by} \neq 0$, maka haruslah $f(a, b) = 0$.
Selanjutnya, untuk bilangan a atau b yang dipilih, maka nilai a atau b yang diperoleh dengan menggunakan $f(a, b) = 0$ sehingga menghasilkan pasangan-pasangan (a_i, b_i) yang memenuhi $f(a, b) = 0$. Secara umum, penyelesaian persamaan (3.14) dinyatakan sebagai

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{a_i x + b_i y}$$

dengan $f(a_i, b_i) = 0$.
Jika ruas kiri persamaan (3.14) dapat diuraikan menjadi bentuk

$$f(D_x, D_y)u = (D_x + hD_y + k)g(D_x, D_y)u,$$

maka untuk setiap pasangan (a, b) dengan $a + hb + k = 0$ memenuhi persamaan $f(a, b) = 0$. Perhatikan, untuk semua pasangan $(a_i, b_i) = (-hb_i - k, b_i)$, dengan menggunakan sifat $f(a_i, b_i) = 0$, diperoleh

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-(hb_i+k)x+b_i y} = e^{-kx} \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{b_i(y-hx)}$$

yang merupakan penyelesaian persamaan (3.14) yang berkaitan dengan faktor linier $(D_x + hD_y + k)$ dari $f(D_x, D_y)$.

Contoh 3.20. *Carilah penyelesaian umum persamaan diferensial*

$$(D_x^2 + D_x + D_y)u = 0.$$

Penyelesaian:
Persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial yang tidak dapat direduksi. Sehingga untuk penyelesaiannya adalah

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{a_i x + b_i y},$$

dengan $C_i, a_i,$ dan b_i konstanta-konstanta sebarang.

Contoh 3.21. *Carilah penyelesaian umum persamaan diferensial*

$$(D_x + 2D_y)(D_x - 2D_y + 1)(D_x - D_y^2)u = 0.$$

Penyelesaian:
Persamaan diferensial di atas memiliki bagian faktor linier dan nonlinier. Sehingga untuk penyelesaiannya adalah

- Untuk $(D_x + 2D_y)u = 0$, diperoleh $a_1 = 1, b_1 = 2$, dan $c_1 = 0$. Dengan demikian diperoleh penyelesaian pertama:

  $$u_1(x, y) = f_1(y - 2x).$$

- Untuk $(D_x - 2D_y + 1)u = 0$, diperoleh $a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = 1$. Dengan demikian diperoleh penyelesaian kedua:

  $$u_2(x, y) = e^{-x} f_2(y+2x) \qquad \text{atau} \qquad u_2(x, y) = e^{-y/2} f_2(y+2x).$$

- Untuk $(Dx - D_y^2)u = 0$ merupakan bentuk yang tidak dapat direduksi, dalam hal ini $g(a, b) = a - b^2$, dengan demikian $b = b_i, a_i = b_i^2$, sehingga penyelesaian ketiga adalah

  $$u_3(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{b_i^2 x + b_i y},$$

Jadi penyelesaian umum persamaan diferensial adalah

$$u(x, y) = f_1(y - 2x) + e^{-x} f_2(y + 2x) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{b_i^2 x + b_i y},$$

dengan f_1 dan f_2 fungsi-fungsi sebarang, dan $C_i, a_i,$ dan b_i konstanta-konstanta sebarang.

3.5 Rangkuman

1. Persamaan diferensial orde dua linier homogen dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

mempunyai persamaan karakteristik

$$am^2 + bm + c = 0,$$

dengan akar-akar karakteristik m_1 dan m_2. Penyelesaian umum persamaan diferensial di atas adalah:

(i). Jika $m_1 \neq m_2$ keduanya real, maka penyelesaian persamaan adalah

$$u(x, y) = f_1(y + m_1 x) + f_2(y + m_2 x)$$

dengan f_1 dan f_2 fungsi sebarang.

(ii). Jika $m_1 = m_2 = m$ kembar real, maka penyelesaian umum persamaan diferensial adalah

$$u(x, y) = f_1(y + mx) + x f_2(y + mx)$$

dengan f_1 dan f_2 fungsi sebarang.

(iii). Jika m_1 dan m_2 kompleks sekawan misal $m_{12} = a \pm ib$, maka penyelesaian umum persamaan diferensial adalah

$$u(x, y) = f_1(y + (a + ib)x) + f_2(y + (a - ib)x)$$

dengan f_1 dan f_2 fungsi sebarang.

2. Persamaan diferensial parsial linier nonhomogen yang berbentuk

$$f(D_x, D_y)u = (AD_x^2 + BD_x D_y + CD_y^2)u = g(x, y),$$

mempunyai penyelesaian partikular sebagai berikut.

(i). Jika $g(x, y) = e^{(ax+by)}$, maka penyelesaian partikularnya adalah

$$u_p(x, y) = \frac{1}{f(D_x, D_y)} e^{(ax+by)} = \frac{1}{f(a, b)} e^{(ax+by)},$$

jika $f(a,b) \neq 0$, dan

$$f(D_x, D_y) = (D_x - \frac{a}{b}D_y)^r F(D_x, D_y),$$

dengan $F(a,b) \neq 0$, maka

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x,D_y)}e^{(ax+by)} = \frac{1}{f(a,b)}e^{(ax+by)} \\ &= \frac{1}{F(a,b)}\frac{x^r}{r!}e^{(ax+by)}. \end{aligned}$$

(ii). Jika $g(x,y) = \sin(ax+by)$ atau $g(x,y) = \cos(ax+by)$, maka penyelesaian partikularnya adalah

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)}\sin(ax+by) \\ &= \frac{1}{f(-a^2,-ab,-b^2)}\sin(ax+by), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)}\cos(ax+by) \\ &= \frac{1}{f(-a^2,-ab,-b^2)}\cos(ax+by), \end{aligned}$$

jika $f(-a^2,-ab,-b^2) \neq 0$.
Jika $f(-a^2,-ab,-b^2) = 0$, dapat menggunakan sifat bilangan kompleks bahwa $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, sehingga diperoleh $\sin x = Im\{e^{ix}\}$ dan $\cos x = Re\{e^{ix}\}$. Penyelesaian selanjutnya mengikuti aturan pada butir 1.

(iii). Jika $g(x,y)$ merupakan polinomial berderajat n untuk x dan berderajat m untuk y, maka penyelesaian partikularnya

$$u_p(x,y) = \frac{1}{f(D_x,D_y)}g(x,y) = \Big(\sum p_{mn}D_x^nD_y^m\Big)g(x,y)$$

(iv). Jika $g(x,y) = e^{(ax+by)}v(x,y)$, maka penyelesaian partikularnya

$$\begin{aligned} u_p(x,y) &= \frac{1}{f(D_x,D_y)}e^{(ax+by)}v(x,y) \\ &= e^{(ax+by)}\frac{1}{f(D_x+a,D_y+b)}v(x,y) \end{aligned}$$

3. Persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan

$$f(D_x, D_y)u = g(x, y)$$

dikatakan dapat direduksi jika fungsi $f(D_x, D_y)$ pada ruas kiri persamaan dapat difaktorkan menjadi perkalian dari bentuk-bentuk derajat satu dalam D_x dan D_y. Penyelesaian persamaan diferensial linier homogen

$$f(D_x, D_y)u = (aD_x + bD_y + c)u = 0$$

adalah

$$u(x, y) = e^{-cx/a} f(ay - bx), \text{untuk } a \neq 0,$$

atau

$$u(x, y) = e^{-cy/b} f(ay - bx), \text{untuk } b \neq 0,$$

dengan f fungsi sebarang.

4. Persamaan diferensial linier homogen dengan koefisien konstan

$$f(D_x, D_y)u = 0$$

dikatakan tidak dapat direduksi jika fungsi $f(D_x, D_y)$ pada ruas kiri persamaan tidak dapat difaktorkan menjadi perkalian dari bentuk-bentuk derajat satu dalam D_x dan D_y.

3.6 Soal-soal Latihan

1. Carilah penyelesaian umum dari persamaan diferensial homogen berikut:

   a. $(D_x^3 + 2D_x^2 D_y - D_x D_y^2 - 2D_y^3)u = 0.$
   b. $(D_x^2 - 8D_x D_y + 15D_y^2)u = 0.$
   c. $(D_x^2 + 4D_x D_y + 4D_y^2)u = 0.$

2. Carilah penyelesaian partikular persamaan diferensial berikut:

   a. $(D_x^3 + 2D_x^2 D_y - D_x D_y^2 - 2D_y^3)u = (y + 2)e^x.$
   b. $(D_x^2 - 8D_x D_y + 15D_y^2)u = e^{x+2y}.$
   c. $(D_x^2 + 4D_x D_y + 4D_y^2)u = \sin 3x - 2y.$

3. Carilah penyelesaian umum dari persamaan diferensial nonhomogen berikut:

   a. $(D_x^3 + 2D_x^2D_y - D_xD_y^2 - 2D_y^3)u = 2e^{x+y}$.
   b. $(D_x^2 - 8D_xD_y + 15D_y^2)u = \cos x - 3y$.
   c. $(D_x^2 + 4D_xD_y + 4D_y^2)u = x^2 + y$.

4. Carilah penyelesaian umum dari persamaan diferensial homogen yang tidak dapat direduksi berikut:

   a. $(D_x^2 + 2D_xD_y - D_y^2 + D_x - D_y)u = 0$.
   b. $(D_x^2 - D_x + D_y)u = 0$.
   c. $(D_x^2 + 2D_xD_y^2 - 2D_y + 3)u = 0$.

5. Carilah penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut:

   a. $(D_x^2 + 2D_xD_y - D_y^2 + D_x - D_y)u = 3e^{2x-y}$.
   b. $(D_x^2 - D_x + D_y)u = \sin(x + y)$.
   c. $(D_x^2 + 2D_xD_y^2 - 2D_y + 3)u = e^{x+y}\sin(2x + y)$.

3.7 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu bagaimana cara menentukan penyelesaian partikular persamaan diferensial berbentuk

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)\dot{g}(x,y)\dot{h}(x,y),$$

dengan f fungsi eksponensial, g fungsi sinus atau cosinus, dan h fungsi polinomial.

3.8 Daftar Rujukan

1. Rusli Hidayat, 2006, *Persamaan Diferensial Parsial*, Jember: UPT Penerbitan Universitas Jember

2. Jurgen Jost, 2013, *Partial Differential Equations*, 3rd, New York: Springer Science+Business Media

3. Peter J. Olver, 2014. *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer International Publishing Switzerland

4. J. David Logan, 2015, *Applied Partial Differential Equations*, 3rd, Springer International Publishing Switzerland

5. David Borthwick , 2016, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer International Publishing Switzerland

6. Victor Ivrii , 2021, *Partial Differential Equations*, Department of Mathematics, University of Toronto

Bab 4

Tipe-tipe Khusus PDP Linier Orde Dua

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa dapat mengklasifikasikan persamaan diferensial parsial orde dua apakah merupakan jenis hiperbolik, parabolik, atau eliptik.

2. Mahasiswa dapat menentukan bentuk kanonik persamaan diferensial parsial linier orde dua melalui transformasi persamaan diferensial.

3. Mahasiswa dapat merumuskan masalah syarat awal dari persamaan diferensial yang dilengkapi dengan syarat awal.

4. Mahasiswa dapat merumuskan masalah syarat batas dari persamaan diferensial yang dilengkapi dengan syarat batas.

5. Mahasiswa dapat merumuskan masalah syarat awal dan syarat batas dari persamaan diferensial yang dilengkapi dengan syarat awal dan syarat batas.

PDP linier orde dua dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum:

$$A\phi_{xx} + B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + D\phi_x + E\phi_y + F\phi = G \tag{4.1}$$

dengan A, B, C, D, E, F adalah konstanta-konstanta dan G fungsi dari x dan y saja. Pada subbab berikut ini akan diperlihatkan bahwa dengan menggunakan perubahan peubah dari persamaan (4.1) selalu bisa ditemukan bentuk-bentuk khusus berupa persamaan panas, persamaan gelombang dan persamaan Laplace yang telah dikenalkan pada Bab 1. Tujuan dalam bab ini adalah membahas teknik melakukan klasifikasi PDP linier orde dua dengan koefisien konstan.

4.1 Klasifikasi PDP Linier Orde Dua

Misalkan sebuah kurva Γ didefinisikan oleh $\xi(x, y) = 0$. Untuk kesesuaian fungsi tersebut diambil $\xi(x, y) =$ konstan, yang nilai-nilai konstannya dipilih sedemikian rupa. Misalkan ada dua keluarga kurva yang didefinisikan oleh $\eta(x, y) =$ konstan, sedemikian hingga kita dapat menggunakan ξ dan η sebagai koordinat lokal atau lebih spesifik lagi yaitu nilai Jacobi dari $\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$. Perlu diingat bahwa ξ dan η merupakan keluarga kurva-kurva yang tidak perlu tegak lurus. Selanjutnya, transformasi untuk mendapatkan koordinat yang baru digunakan simbol yang sama yaitu ϕ dalam fungsi ξ dan η, diturunkan dengan aturan rantai, diperoleh:

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi(\xi, \eta) \\
\phi_x &= \phi_\xi\xi_x + \phi_\eta\eta_x \\
\phi_y &= \phi_\xi\xi_y + \phi_\eta\eta_y \\
\phi_{xx} &= \phi_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2\phi_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \phi_{\eta\eta}\eta_x^2 + \phi_\xi\xi_{xx} + \phi_\eta\eta_{xx} \\
\phi_{yy} &= \phi_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2\phi_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \phi_{\eta\eta}\eta_y^2 + \phi_\xi\xi_{yy} + \phi_\eta\eta_{yy} \\
\phi_{xy} &= \phi_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \phi_{\xi\eta}\big(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\big) + \phi_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \phi_\xi\xi_{xy} + \phi_\eta\eta_{xy}.
\end{aligned}$$

Kemudian nilai-nilai di atas disubtitusikan ke persamaan (4.1) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\phi_{\xi\xi}(A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2) + \phi_{\xi\eta}(2A\xi_x\eta_x + B[\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y] + 2C\xi_y\eta_y) + \\
&\phi_{\eta\eta}(A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2) + \phi_\xi(A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y) + \\
&\phi_\eta(A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta\xi_{yy} + D\eta_x + E\eta_y) + F\phi = G.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Selanjutnya, perlu ditentukan apakah persamaan

$$A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0 \tag{4.3}$$

berlaku atau tidak pada Γ.

Pertama, andaikan bahwa tidak ada fungsi real $\xi(x, y)$ yang memenuhi persamaan (4.3) (hal ini bisa terjadi misalnya $A = C = 1, B = 0$). Kemudian tidak jadi masalah apakah kurva Γ dipilih, koefisien dari $\phi_{\xi\xi}$ pada persamaan (4.3) tidak bisa hilang, sehingga $\phi_{\xi\xi}$ bisa ditentukan sepanjang Γ. Sekarang, semua turunan tertinggi (kedua) dari ϕ bisa ditentukan pada Γ dengan menurunkan ulang. Kedua, andaikan bahwa, fungsi $\xi(x, y)$ yang memenuhi persamaan (4.3) adalah sepanjang kurva $\xi = 0$, maka kurva Γ didefinisikan oleh $\xi(x, y) = 0$ sehingga proses menentukan fungsi transformasi gagal karena koefisien $\phi_{\xi\xi}$ pada persamaan (4.2) tidak ada/hilang sepanjang Γ. Dua kemungkinan untuk persoalan di atas adalah bahwa masalah tersebut selalu dapat diselesaikan atau ada fungsi tertentu yang menyebabkan permasalahan tidak dapat diselesaikan.

Dalam menyelesaikan persamaan (4.3) perlu diingat bahwa ruas kirinya merupakan persamaan kuadrat dalam (ξ_x/ξ_y) atau (ξ_y/ξ_x) yang ada atau tidak akar-akar realnya tergantung pada tanda diskriminan $B^2 - 4AC$.

Cara lain untuk mengklasifikasikan persamaan (4.2) adalah dengan cara berikut ini. Persamaan (4.2) merupakan persamaan berbentuk

$$\overline{A}\phi_{\xi\xi} + \overline{B}\phi_{\xi\eta} + \overline{C}\phi_{\eta\eta} + \overline{D}\phi_{\xi} + \overline{E}\phi_{\eta} + \overline{F}\phi = \overline{G} \tag{4.4}$$

dengan koefisien-koefisien diberikan oleh

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\
\overline{B} &= 2A\xi_x\eta_x + B[\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y] + 2C\xi_y\eta_y \\
\overline{C} &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \\
\overline{D} &= A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y \\
\overline{E} &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y \\
\overline{F} &= F \\
\overline{G} &= G
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan koefisien-koefisien $\overline{A}$ dan $\overline{C}$ dalam persamaan (4.4) sama dengan nol dan mendapatkan penyelesaian transformasi $\xi = \xi(x, y)$ dan $\eta = \eta(x, y)$, sehingga diperoleh

koordinat baru yang mereduksi persamaan diferensial (4.1) menjadi bentuk kanonik berikut

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0 \\ \overline{C} &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} A(\xi_x/\xi_y)^2 + B(\xi_x/\xi_y) + C &= 0 \\ A(\eta_x/\eta_y)^2 + B(\eta_x/\eta_y) + C &= 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dengan menyelesaikan persamaan (4.6) untuk (ξ_x/ξ_y) dan (η_x/η_y) yang merupakan persamaan karakteristik dari PDP orde dua tersebut, seperti yang diberikan oleh persamaan berikut ini.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) &= \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ \left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right) &= \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Perlu diingat bahwa masing-masing (ξ_x/ξ_y) dan (η_x/η_y) mempunyai dua penyelesaian akar-akar dari persamaan karakteristik yang merupakan persamaan kuadrat, tetapi di sini kita hanya mencari satu penyelesaian saja yang membuat $\overline{A}$ dan $\overline{C}$ sama dengan nol. Untuk itu diambil akar-akar yang berbeda. Dengan demikian kita terhindar dari koordinat yang sama sehingga masalah di atas telah direduksi menjadi dua fungsi $\xi(x, y)$ dan $\eta = (x, y)$ sedemikian hingga rasio (ξ_x/ξ_y) dan (η_x/η_y) memenuhi persamaan (4.6).

Untuk memahami bagaimana cara mencari ξ dan η diberikan contoh berikut.

Contoh 4.1. *Diketahui PDP orde dua dengan koefisien konstan*

$$\phi_{xx} - 4\phi_{yy} + \phi_x = 0,$$

tentukan persamaan karakteristik dan koordinat baru dari PDP tersebut.

Penyelesaian:
Dalam contoh ini diperoleh $B^2 - 4AC = 16 > 0$, dengan persamaan

karakteristik seperti berikut

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y} &= \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -2 \\ \frac{dy}{dx} = -\frac{\eta_x}{\eta_y} &= \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = 2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Untuk mendapatkan ξ dan η, terlebih dahulu dicari y dengan mengintegralkan persamaan (4.8), diperoleh

$$\begin{aligned} y &= -2x + c_1 \\ y &= 2x + c_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dari kedua fungsi pada persamaan (4.9), ξ dan η ditentukan dari $\xi = c_1$ dan $\eta = c_2$. Jadi ξ dan η yang memenuhi persamaan karakteristik (4.8) adalah $\xi = y + 2x = c_1$ dan $\eta = y - 2x = c_2$.

Dari contoh di atas, telah diketahui cara mendapatkan koordinat baru. Selanjutnya adalah bagaimana menentukan persamaan kanonik, hal ini dilakukan dengan mengambil koordinat baru tersebut kemudian mensubsitusikannya ke persamaan (4.4), dengan koefisien-koefisien $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{E}, \overline{F}$ dan $\overline{G}$ diberikan oleh persamaan (4.5). Jadi dapat disimpulkan, klasifikasi persamaan (4.1) tergantung pada koefisien A, B, dan C, yang dalam hal ini ada tiga kemungkinan yaitu

1. $B^2 - 4AC > 0$ (hiperbolik),
2. $B^2 - 4AC = 0$ (parabolik), dan
3. $B^2 - 4AC < 0$ (eliptik).

Karena klasifikasi tergantung pada A, B dan C, maka untuk memudahkan pembahasan berikutnya, persamaan (4.1) perlu dinyatakan ulang dalam bentuk

$$A\phi_{xx} + B\phi_{xy} + C\phi_{yy} = H \tag{4.10}$$

dengan $H = H(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y)$ dan persamaan (4.4) menjadi

$$\overline{A}\phi_{\xi\xi} + \overline{B}\phi_{\xi\eta} + \overline{C}\phi_{\eta\eta} = \overline{H} \tag{4.11}$$

dengan $\overline{H} = \overline{H}(\xi, \eta, \phi, \phi_\xi, \phi_\eta)$.

4.2 Persamaan Hiperbolik

Pandang persamaan

$$A\Big(\frac{\xi_x}{\xi_y}\Big)^2 + B\Big(\frac{\xi_x}{\xi_y}\Big) + C = 0 \tag{4.12}$$

yang mana sepanjang kurva $\xi(x, y)$ =konstan, diperoleh bahwa $d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0$ atau $\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}$ sehingga persamaan (4.12) dapat ditulis menjadi

$$A\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 - B\Big(\frac{dy}{dx}\Big) + C = 0 \qquad \text{atau} \qquad Ay_x^2 - By_x + C = 0 \tag{4.13}$$

Akar-akar persamaan (4.13) adalah

$$y_x = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad \text{dan} \qquad y_x = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{4.14}$$

Jika $B^2 - 4AC > 0$, maka akar-akar dari (4.14) adalah real dan berbeda dan hasil integralnya merupakan dua kurva karakteristik. Sekarang persamaan (4.11) tereduksi menjadi

$$\phi_{\xi\eta} = H_1 \tag{4.15}$$

dengan $H_1 = \frac{2\overline{H}}{B}$ dan dapat diperhatikan bahwa $B \neq 0$. Persamaan (4.15) disebut **bentuk kanonik pertama** dari persamaan hiperbolik. Jika digunakan peubah bebas yang baru $\alpha = \xi + \eta$ dan $\beta = \xi - \eta$, maka persamaan (4.15) ditransformasi menjadi

$$\phi_{\alpha\alpha} - \phi_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, \phi, \phi_\alpha, \phi_\beta). \tag{4.16}$$

Persamaan (4.16) disebut **bentuk kanonik kedua** dari persamaan hiperbolik.

Contoh 4.2. *Diketahui persamaan hiperbolik $y^2\phi_{xx} - x^2\phi_{yy} = 0$. Tentukan bentuk kanonik pertama dan bentuk kanonik kedua dari persamaan hiperbolik tersebut.*

Penyelesaian:
Misalkan akan dicari koordinat baru yang akan mengubah persamaan diferensial ke bentuk kanonik dalam x dan y pada kuadran pertama. Persamaan hiperbolik pada kuadran pertama adalah

$$y^2\phi_{xx} - x^2\phi_{yy} = 0, \qquad x > 0, y > 0. \tag{4.17}$$

Langkah 1.
Selesaikan kedua persamaan karakteristik dengan mengambil $\overline{A} = \overline{C} = 0$ adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -\frac{x}{y} \qquad \text{dan} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{x}{y} \tag{4.18}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan teknik integral untuk peubah terpisah, maka penyelesaian persamaan (4.18) adalah

$$y^2 - x^2 = c_1 \qquad \text{dan} \qquad y^2 + x^2 = c_2.$$

Jadi, koordinat baru ξ dan η yang diperoleh adalah $\xi = y^2 - x^2$ dan $\eta = y^2 + x^2$.
Langkah selanjutnya, dari koordinat yang baru tersebut dicari persamaan diferensial yang baru dengan menghitung nilai-nilai berikut (seperti dalam persamaan (4.5)):

$$\begin{gathered} \overline{A} = 0, \text{ diperoleh penyelesaian } \xi \\ \overline{B} = -16x^2y^2 \\ \overline{C} = 0, \text{ diperoleh penyelesaian } \eta \\ \overline{D} = -2(x^2 + y^2) \\ \overline{E} = 2(y^2 - x^2) \\ \overline{F} = F = 0, \text{ dan } \overline{G} = G = 0. \end{gathered} \tag{4.19}$$

Subtitusikan nilai-nilai dari (4.19) ke persamaan (4.4) sehingga diperoleh persamaan diferensial yang baru (hasil transformasi)

$$\phi_{\xi\eta} = \frac{-(x^2 + y^2)\phi_\xi + (y^2 - x^2)\phi_\eta}{8x^2y^2} = \frac{-\eta\phi_\xi + \xi\phi_\eta}{2(\eta^2 - \xi^2)}. \tag{4.20}$$

Langkah 2.
Selesaikan persamaan (4.20) untuk x dan y dalam bentuk ξ dan η, sehingga diperoleh bentuk kanonik pertama yaitu

$$\phi_{\xi\eta} = \frac{-\eta\phi_\xi + \xi\phi_\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)}.$$

Langkah 3.
Koordinat yang baru dan bentuk kanonik pertama telah ditemukan,

selanjutnya akan dicari bentuk kanonik kedua dengan menggunakan transformasi

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\xi,\eta) = \xi + \eta \\ \beta &= \beta(\xi,\eta) = \xi - \eta \end{aligned} \tag{4.21}$$

kemudian nyatakan bentuk kanonik pertama dalam α dan β.
Dari (4.21) diperoleh $\alpha_\xi = 1, \alpha_\eta = 1, \beta_\xi = 1$ dan $\beta_\eta = -1$, sehingga

$$\begin{aligned} \phi_\xi &= \phi_\alpha\alpha_\xi + \phi_\beta\beta_\xi = \phi_\alpha + \phi_\beta \\ \phi_\eta &= \phi_\alpha\alpha_\eta + \phi_\beta\beta_\eta = \phi_\alpha - \phi_\beta \\ \phi_{\xi\eta} &= \phi_{\alpha\alpha}\alpha_\eta + \phi_{\alpha\beta}\beta_\eta + \phi_{\beta\alpha}\alpha_\eta + \phi_{\beta\beta}\beta_\eta = \phi_{\alpha\alpha} - \phi_{\beta\beta} \end{aligned}$$

Jadi, bentuk kanonik kedua dari contoh ini adalah

$$\phi_{\alpha\alpha} - \phi_{\beta\beta} = \frac{-\beta\phi_\alpha - \alpha\phi_\beta}{2\alpha\beta}.$$

Bila diinginkan penyelesaian untuk koordinat α dan β dalam x dan y dapat dicari dengan cara berikut

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi + \eta = (y^2 - x^2) + (y^2 + x^2) = 2y^2 \\ \beta &= \xi - \eta = (y^2 - x^2) - (y^2 + x^2) = -2x^2 \end{aligned}$$

Salah satu alasan mengapa perlu dilakukan klasifikasi PDP orde dua adalah karena tiga klasifikasi utama dari PDP orde dua berbentuk persamaan hiperbolik, parabolik dan eliptik yang secara fisik menggambarkan proses gelombang bergerak, proses difusi dan masalah *steady state*. Penyelesaian matematik dari ketiga tipe ini masing-masing mempunyai karakter yang sangat berbeda.

4.3 Persamaan Parabolik

Pada kasus ini, syarat yang harus dipenuhi adalah $B^2 - 4AC = 0$ dan akar-akar dari persamaan (4.14) adalah akar-akar kembar, sehingga hanya ada satu kurva karakteristik yaitu $\xi =$ konstan atau $\eta =$ konstan. Koordinat baru dalam bentuk (ξ, η) diberikan oleh

$$\phi_{\eta\eta} = H(\xi, \eta, \phi, \phi_\xi, \phi_\eta). \tag{4.22}$$

Dengan menggunakan koordinat baru $\xi = \xi(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ akan diperoleh persamaan (4.4) dan (4.5). Tujuan di sini adalah menjadikan $\overline{B}$ dan salah satu dari $\overline{A}$ atau $\overline{C}$ sama dengan nol, kemudian mencari penyelesaian untuk ξ dan η.
Misalkan diambil $\overline{A} = \overline{B} = 0$ dan selesaikan persamaan yang diperoleh. Pertama ambil $\overline{A} = 0$ dan selesaikan untuk (ξ_x/ξ_y) sehingga diperoleh $\frac{\xi_x}{\xi_y} = -\frac{B}{2A}$. Jadi, koordinat baru $\xi = \xi(x, y)$ yang memenuhi persamaan parabolik ini adalah $\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{B}{2A}$ dan penyelesaian persamaan tersebut secara implisit ditulis sebagai $\xi(x, y) = c_1$. Selanjutnya perlu dicari $\eta = \eta(x, y)$ sehingga $\overline{B} = 0$. Oleh karena kondisi $B^2 - 4AC = 0$ didapatkan $\xi = \xi(x, y)$ sedemikian hingga $\overline{A} = 0$, maka secara otomatis koefisien $\overline{B} = 0$. Untuk memahami persamaan parabolik ini diberikan contoh berikut.

Contoh 4.3. *Transformasikan persamaan parabolik berikut ke dalam bentuk kanonik* $\phi_{xx} + 2\phi_{xy} + \phi_{yy} = 0$.

Penyelesaian:
Dari contoh ini diperoleh $A = C = 1, B = 2, D = E = F = G = 0$ sehingga $B^2 - 4AC = 0$ untuk setiap x dan y. Untuk mendapatkan koordinat yang baru ξ dan η serta persamaan kanoniknya dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:
Langkah 1: Tentukan persamaan karakteristiknya (dalam hal ini hanya ada satu) yaitu $\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{B}{2A} = 1$. Dengan mengintegralkan persamaan ini diperoleh penyelesaian $y = x + c_1$. Dengan demikian $\xi = y - x$ memenuhi persamaan karakteristik yang membuat $\overline{A} = 0$. Selanjutnya, koordinat η dapat dicari dengan cara memilih η asalkan tidak paralel dengan ξ. Dalam kasus ini, dipilih $\eta = x$, sehingga koordinat yang baru adalah $\xi = y - x$ dan $\eta = y$.
Langkah 2: Langkah berikutnya adalah mencari persamaan kanonik. Dengan mensubstitusikan ξ dan η ke dalam koefisien-koefisien yang baru $\overline{A}, \overline{B}, \cdots, \overline{G}$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= 0, \\
\overline{B} &= 0, \\
\overline{C} &= 1, \\
\overline{D} &= 0, \\
\overline{E} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{F} &= F = 0, \\ \overline{G} &= G = 0. \end{aligned}$$

Kemudian nilai-nilai ini disubtitusikan ke persamaan (4.4), sehingga diperoleh

$$\phi_{\eta\eta} = 0.$$

Penyelesaian persamaan ini, diperoleh

$$\phi(\xi, \eta) = \eta F_1(\xi) + F_2(\xi)$$

dengan F_1 dan F_2 fungsi sebarang.
Langkah 3: Langkah terakhir adalah mensubtitusikan kembali koordinat asal x dan y, sehingga diperoleh penyelesaian umum adalah

$$\phi(x, y) = yF_1(y - x) + F_2(y - x).$$

4.4 Persamaan Eliptik

Syarat untuk persamaan eliptik adalah $B^2 - 4AC < 0$. Tujuan di sini adalah mentransformasi persamaan (4.1) menjadi bentuk yang baru

$$\phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = H(\xi, \eta, \phi, \phi_\xi, \phi_\eta) \tag{4.23}$$

dengan cara mengubah peubah bebasnya seperti yang telah dilakukan pada dua tipe sebelumnya, maka untuk tipe eliptik ini dengan cara membuat $\overline{A} = \overline{C}$ dan $\overline{B} = 0$ ke dalam persamaan (4.4) dan menyelesaikannya untuk ξ dan η. Satu pengecualian untuk tipe eliptik ini adalah bahwa tidak dapat menyelesaikannya untuk ξ dan η karena $\overline{A} - \overline{C} = 0$ dan $\overline{B} = 0$, sehingga diperlukan perlakuan yang agak berbeda dengan dua tipe sebelumnya. Di sini adalah mencari transformasi $\xi = \xi(x, y)$ dan $\eta = \eta(x, y)$ sebagai komposisi dari dua transformasi dengan langkah-langkah berikut.
Transformasi 1.: Pertama, dilakukan transformasi ke dalam koordinat baru ξ dan η agar menghasilkan persamaan yang berbentuk

$$\phi_{\xi\eta} = H(\xi, \eta, \phi, \phi_\xi, \phi_\eta). \tag{4.24}$$

Pada transformasi ini, koordinat yang diambil adalah koordinat kompleks ξ dan η, dengan cara yang sama seperti pada persamaan hiperbolik, dengan menggunakan persamaan karakteristik

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

untuk mendapatkan $\xi(x,y) =$ konstan dan $\eta(x,y) =$konstan. Sebagai ilustrasi, misalkan diketahui persamaan karakteristik

$$\frac{dy}{dx} = \pm 2ix$$

maka akan menghasilkan koordinat kompleks sekawan

$$\xi = y + ix^2 \qquad \text{dan} \qquad \eta = y - ix^2.$$

Transformasi 2. Lakukan transformasi dari bentuk (ξ, η) ke (α, β) dengan menggunakan $\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}$ dan $\beta = \frac{\xi-\eta}{2i}$ yang akan mentransformasikan persamaan $\phi_{\xi\eta} = H(\xi, \eta, \phi, \phi_\xi, \phi_\eta)$ menjadi persamaan $\phi_{\alpha\alpha} + \phi_{\beta\beta} = \psi(\alpha, \beta, \phi, \phi_\alpha, \phi_\beta)$ dengan H dan ψ adalah bentuk umum dari ruas kanan.

Contoh 4.4. *Diketahui persamaan $y^2\phi_{xx}+x^2\phi_{yy} = 0$, tentukan bentuk kanonik dari persamaan eliptik tersebut.*

Penyelesaian:
Dalam kasus ini $A = y^2, B = 0, C = x^2, D = E = F = G = 0$ sehingga diskriminan $B^2 - 4AC = -4x^2y^2$ dan bentuk kanonik yang akan dicari pada kuadran pertama $x > 0, y > 0$ dilakukan langkah-langkah berikut.
Langkah 1. Transformasi 1
Menyelesaikan kedua persamaan karakteristik

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -\frac{\sqrt{-4x^2y^2}}{2y^2} = -i\frac{x}{y} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{\sqrt{-4x^2y^2}}{2y^2} = i\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teknik integral untuk peubah terpisah, maka penyelesaian persamaan karakteristik tersebut adalah

$$\begin{aligned} y^2 + ix^2 &= c_1 \quad \text{(konstan)} \\ y^2 - ix^2 &= c_2 \quad \text{(konstan)} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh koordinat baru

$$\xi(x,y) = y^2 + ix \quad \text{dan} \quad \eta(x,y) = y^2 - ix^2.$$

Tidak jadi masalah dalam memasukkan kedua fungsi di atas ke dalam nama ξ dan η, karena boleh dipertukarkan kedua fungsi tersebut jika

diinginkan. Transformasi pada langkah ini akan mereduksi PDP di atas menjadi $\phi_{\xi\eta} = H(\xi, \eta, \phi, \phi_\xi, \phi_\eta)$.
Bentuk dari persamaan ini dapat diabaikan (karena merupakan hiperbola kompleks), namun yang diperlukan adalah transformasi berikutnya.
Langkah 2. Transformasi 2
Pada transformasi kedua digunakan

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\xi + \eta}{2} = y^2 \text{ (bagian real dari } \xi \text{ dan } \eta) \\ \beta &= \frac{\xi - \eta}{2i} = x^2 \text{ (bagian imajiner dari } \xi \text{ dan } \eta). \end{aligned}$$

Dari sudut pandang penggunaan notasi mungkin akan lebih baik jika diganti lagi peubah (α, β) menjadi (ξ, η) sehingga hasil komposisi transformasi menjadi $\xi(x, y) = y^2$ dan $\eta(x, y) = x^2$.
Langkah 3. Mencari persamaan kanonik
Bentuk kanonik yang baru ditemukan dengan menghitung koefisien-koefisien $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{E}, \overline{F}$, dan $\overline{G}$ seperti telah dilakukan pada contoh untuk tipe-tipe persamaan sebelumnya, di mana untuk kasus ini $\xi = y^2$ dan $\eta = x^2$, kemudian hasilnya disubstitusikan ke persamaan $\overline{A}\phi_{\xi\xi} + \overline{B}\phi_{\xi\eta} + \overline{C}\phi_{\eta\eta} + \overline{D}\phi_\xi + \overline{E}\phi_\eta + \overline{F}\phi = \overline{G}$ diperoleh bentuk kanonik eliptik

$$\phi_{xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = \frac{-\xi\phi_\eta - \eta\phi_\xi}{2\xi\eta}.$$

4.5 Masalah Syarat Awal dan Masalah Syarat Batas

Persamaan diferensial yang diaplikasikan pada permasalahan fisik atau peristiwa - peristiwa fenomena alam, akan dihadapkan pada suatu kondisi dan syarat yang diperlukan untuk mengetahui perilaku sistem, yang lazim disebut sebagai syarat awal dan syarat batas. Jika tanpa adanya syarat tersebut, suatu PDP dapat dikatakan tidak bermanfaat karena tidak ada yang membatasi kebebasan penyelesaian umumnya.

Pada bab ini akan dibahas mengenai pengertian dan contoh-contoh timbulnya syarat awal, syarat batas, MSA, MSB dan MSAB.

4.5.1 Masalah syarat awal

Syarat Awal (SA) adalah suatu syarat/kondisi yang harus dipenuhi pada awal waktu tertentu, yakni keadaan pada saat $t = t_0$. Dapat

dikatakan sebagai suatu kondisi steady state dari suatu sistem. *Masalah Syarat Awal* (MSA) adalah masalah yang terdiri dari suatu Persamaan Diferensial (PD) yang dilengkapi dengan syarat awal.

Contoh 4.5. *Rumuskan MSA pada suatu batang homogen yang sangat panjang dan diisolasi dengan sempurna. Batang ini mempunyai suhu awal* 500^0K *untuk* $-5 \leq x \leq 5$ *dan* 0^0K *di luar interval tersebut*

Penyelesaian:
Dalam masalah ini panas mengalir dalam satu arah, yaitu sepanjang x. Karena batas sangat panjang maka PD yang terbentuk berada pada interval tidak terbatas $(-\infty, \infty)$. Sehingga diperoleh pemodelan MSA

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad -\infty < x < \infty,\, t > 0$$

dengan

$$u(x,0) = \begin{cases} 500\,, & -5 \leq x \leq 5 \\ 0\,, & untuk\, x\, yang\, lain \end{cases}$$

4.5.2 Masalah syarat batas

Syarat Batas (SB) adalah suatu syarat/kondisi yang harus dipenuhi pada batas-batas domain yang terkait dengan ruang. Hal ini menggambarkan perilaku sistem pada daerah batas untuk semua waktu t. Untuk PDP order n dengan peubah tak bebas u, syarat batas dapat meliputi nilai fungsi tak diketahui u dan turunan-turunannya sampai order $n-1$ pada batas-batas domain.

Dalam pembahasan syarat batas ini, akan difokuskan pada syarat batas linier. Suatu syarat batas dikatakan *linier* jika pada batas domain, SB tersebut dinyatakan dalam relasi linier antara fungsi u dengan turunan-turunannya.

Diberikan PDP orde dua dengan peubah tak bebas u yang terdefinisi pada $D \subseteq \mathbb{R}$. Himpunan semua titik batas domain dinyatakan dengan ∂D, maka terdapat tiga jenis syarat batas untuk PDP orde dua tersebut yaitu SB Dirichlet, SB Neumann, dan SB Robin.

Masalah syarat batas (MSB) adalah masalah yang terdiri dari suatu PD yang dilengkapi dengan syarat batas. *Penyelesaian MSB* pada domain terbuka D adalah suatu fungsi dari peubah bebas yang ada pada MSB dan memenuhi PD pada D, kontinu pada $D \cup \partial D$ dan memenuhi syarat batas pada ∂D.

1. Syarat Batas Dirichlet
   Syarat batas Dirichlet adalah syarat batas yang memberikan nilai fungsi tak diketahui u pada ∂D

   Contoh 4.6. *Rumuskan MSB pada getaran senar yang kedua ujungnya diikat kuat pada tiang tetap dengan jarak L sepanjang sumbu-x*

   Penyelesaian:
   Dalam masalah ini, getaran pada senar dapat direpresentasikan sebagai bentuk persamaan gelombang. Karena ujung kanan dan kiri senar tidak berubah posisi maka syarat batas yang terbentuk merupakan SB Dirichlet. Diperoleh MSB berikut

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ &u(0,t) = 0 \qquad t > 0 \\ &u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \end{aligned}$$

2. Syarat Batas Neumann
   Syarat Batas Neumann adalah syarat batas yang memberikan nilai turunan u pada arah normal terhadap ∂D yang ditulis dengan $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)$.

   Contoh 4.7. *Rumuskan MSB pada getaran senar yang kedua ujungnya diikat pada tiang dengan jarak L sepanjang sumbu-x. Namun, kedua ujung senar dapat naik turun pada tiang secara bebas.*

   Penyelesaian:
   Dalam masalah ini, karena ujung kanan dan kiri senar dapat berubah-ubah posisi naik turun secara bebas maka tidak ada gaya sepanjang tiang sehingga dapat diabaikan. Dengan demikian, syarat batas yang terbentuk merupakan SB Numann. Diperoleh MSB berikut

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad t > 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \qquad t > 0 \end{aligned}$$

3. Syarat Batas Robin
   Syarat Batas Robin adalah syarat batas yang memberikan relasi linier antara nilai fungsi tak diketahui u dengan $\frac{\partial u}{\partial n}$ pada ∂D.

   Contoh 4.8. *Rumuskan MSB pada getaran senar yang kedua ujungnya diikat kuat pada pegas dengan jarak L sepanjang sumbu-x.*

   Penyelesaian:
   Dalam masalah ini, gaya pada pegas pengikat senar mengikuti hukum Hook. Jika k adalah konstanta pegas dan T gaya senar pada pegas, maka diperoleh MSB dengan SB Robin sebagai berikut

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \\
&u(0,t) - \frac{T}{K}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad t > 0 \\
&u(0,t) - \frac{T}{K}\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \qquad t > 0
\end{aligned}$$

4.5.3 Masalah Syarat Awal dan Syarat Batas

Masalah Syarat Awal dan Syarat Batas (MSAB) adalah masalah yang terdiri dari suatu persamaan differensial yang dilengkapi dengan syarat batas dan syarat awal. Penyelesaian MSAB pada domain terbuka D adalah suatu fungsi dari peubah bebas yang ada pada MSAB tersebut yang memenuhi persamaan diferensial pada pada $D \cup \partial D$, memenuhi syarat batas pada ∂D dan syarat awal pada D.

Contoh 4.9. *Rumuskan MSAB yang menyatakan konduksi panas pada sebuah batang homogen dengan panjang L dan luas penampang A. Batang diisolasi sempurna pada selimutnya. Fluks panas di $x = L$ diberikan oleh hukum pendinginan Newton dan suhu awal balok diasumsikan diberikan oleh fungsi $f(x) = \frac{50(L-x)}{L}$*

Penyelesaian:
Dalam masalah ini, panas yang mengalir dalam satu arah saja, sehingga PD yang terbentuk terdefinisi pada interval (x, L). Hukum pendinginan Newton menyatakan bahwa fluks panas sebanding dengan perbedaan temperatur benda dengan temperatur sekitarnya, yaitu

$$q(L,t) = \alpha\,(u(L,t) - u_L)$$

dengan α konstan, u_L temperatur di sekitar $x = L$. Dari hukum Fourier diperoleh

$$q(L,t) = -\kappa A \frac{\partial u(L,t)}{\partial x}$$

sehingga

$$\kappa A \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + \alpha u(L,t) = \alpha u_L$$

Karena $u(x,0) = \frac{50(L-x)}{L}$, maka $u(0,t) = 50$. Dengan demikian diperoleh MSAB sebagai berikut

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L,\ t > 0\\
&u(0,t) = 50 \quad t > 0\\
&\kappa A \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + \alpha u(L,t) = \alpha u_L, \quad t > 0\\
&u(x,0) = \frac{50(L-x)}{L}, \qquad -0 < x < L
\end{aligned}$$

4.6 Rangkuman

1. Klasifikasi persamaan diferensial parsial linier orde dua

   $$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x,y)$$

   tergantung pada koefisien A, B, dan C, yang dalam hal ini ada tiga kemungkinan yaitu

   (i). $B^2 - 4AC > 0$ (hiperbolik),

   (ii). $B^2 - 4AC = 0$ (parabolik), dan

   (iii). $B^2 - 4AC < 0$ (eliptik).

2. Persamaan diferensial parsial linier orde dua jenis hiperbolik dapat direduksi menjadi

   $$\phi_{\xi\eta} = H(\xi, \eta, \phi, \phi_\xi, \phi_\eta).$$

3. Persamaan diferensial parsial linier orde dua jenis parabolik dapat direduksi menjadi

   $$\phi_{\eta\eta} = H(\xi, \eta, \phi, \phi_\xi, \phi_\eta).$$

4. Persamaan diferensial parsial linier orde dua jenis eliptik dapat direduksi menjadi

$$\phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = H(\xi, \eta, \phi, \phi_\xi, \phi_\eta).$$

5. *Syarat Awal* adalah suatu syarat/kondisi yang harus dipenuhi pada awal waktu tertentu, keadaan pada saat $t = t_0$. *Masalah Syarat Awal* (MSA) adalah masalah yang terdiri dari suatu Persamaan differensial yang dilengkapi dengan syarat awal.

6. *Syarat Batas* adalah suatu syarat/kondisi yang harus dipenuhi pada batas-batas domain yang terkait dengan ruang. Untuk PDP order n dengan peubah tak bebas u, syarat batas dapat meliputi nilai fungsi tak diketahui u dan turunan-turunannya sampai order $n-1$ pada batas-batas domain.

7. *Masalah Syarat Awal dan Syarat Batas* adalah masalah yang terdiri dari suatu persamaan differensial yang dilengkapi dengan syarat awal dan syarat batas. Penyelesaian masalah syarat awal dan syarat batas pada domain terbuka D adalah suatu fungsi dari peubah bebas yang ada pada masalah tersebut yang memenuhi persamaan diferensial pada pada $D \cup \partial D$, memenuhi syarat batas pada ∂D dan syarat awal pada D.

4.7 Soal-soal Latihan

1. Klasifikasikan persamaan diferensial parsial linier orde dua ini ke dalam jenisnya (hiperbolik, parabolik, ataukah eliptik
   (i). $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$.
   (ii). $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.
   (iii). $u_{xx} - u_{xy} - u_{yy} = 0$.
   (iv). $u_{xx} - 3u_{xy} + u_{yy} - u_x + e^{x+y} = 0$.

2. Transformasikan persamaan

$$u_{xx} + 2_{xy} + u_{yy} + u = 2$$

   ke dalam bentuk kanonik.

3. Transformasikan persamaan

$$u_{xx} + 2_{xy} + x^2 u_x = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   ke dalam bentuk kanonik.

4.8 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu untuk membahas dalam keadaan yang bagaimanakah persamaan diferensial

$$yu_{xx} + xu_{xy} + yu_{yy} = 0$$

merupakan jenis hiperbolik, parabolik, atau eliptik.

4.9 Daftar Rujukan

1. Rusli Hidayat, 2006, *Persamaan Diferensial Parsial*, Jember: UPT Penerbitan Universitas Jember

2. Jurgen Jost, 2013, *Partial Differential Equations*, 3rd, New York: Springer Science+Business Media

3. Peter J. Olver, 2014. *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer International Publishing Switzerland

4. J. David Logan, 2015, *Applied Partial Differential Equations*, 3rd, Springer International Publishing Switzerland

5. David Borthwick , 2016, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer International Publishing Switzerland

6. Victor Ivrii , 2021, *Partial Differential Equations*, Department of Mathematics, University of Toronto

Bab 5

Metode Pemisahan Peubah

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa dapat menentukan deret Fourier suatu fungsi periodik.
2. Mahasiswa dapat menyelesaikan persamaan konduksi panas dengan metode pemisahan peubah.
3. Mahasiswa dapat menyelesaikan persamaan gelombang dengan metode pemisahan peubah.
4. Mahasiswa dapat menyelesaikan persamaan Laplace dengan metode pemisahan peubah.

Dalam bab ini akan dibahas beberapa contoh penyelesaian persamaan diferensial untuk kasus-kasus khusus persamaan diferensial parsial tipe parabolik, hiperbolik dan eliptik dengan metode pemisahan peubah yang disertai dengan langkah-langkah penyelesaian. Sebelum itu, perlu pemahaman definisi deret Fourier dan teorema deret sinus dan cosinus Fourier.

5.1 Deret Fourier

Definisi 5.1. *Diberikan f fungsi periodik dengan periode $2L$.* **Deret Fourier** *fungsi f adalah deret berbentuk*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \tag{5.1}$$

asalkan koefisien-koefisien

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

semuanya ada. Koefisien-koefisien ini disebut **koefisien-koefisien Fourier**.

Contoh 5.2. *Tentukan ekspansi deret Fourier fungsi*

$$f(x) = x + x^2, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Penyelesaian:
Di sini diambil fungsi f mempunyai periode 2π. Oleh karena itu, diperoleh

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2)\ dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

dan

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+x^2)\cos nx\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\ dx\Big) \\ &+ \frac{1}{\pi}\Big(\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}\ dx\Big) \\ &= -\frac{2}{n\pi}\Big(\frac{-x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\ dx\Big) \\ &= \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \qquad n = 1,2,3,\cdots \end{aligned}$$

Dengan cara serupa, diperoleh

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+x^2)\sin nx\ dx \\ &= -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n, \qquad n = 1,2,3,\cdots \end{aligned}$$

Oleh karena itu, ekspansi deret Faourier untuk f adalah

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx - \frac{2}{n}(-1)^n\sin nx\Big) \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + 2\sin x + \cos 2x - \sin 2x - \cdots \end{aligned}$$

Contoh 5.3. *Tentukan ekspansi deret Fourier fungsi periodik*

$$f(x) = -\pi,\ \textit{untuk}\ -\pi < x < 0\ \textit{dan}\ f(x) = x,\ \textit{untuk}\ 0 < x < \pi.$$

Penyelesaian:
Dalam kasus ini,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = -\frac{\pi}{2},$$

dan

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi\cos nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\ dx \\ &= \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1], \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

Dengan cara serupa, diperoleh

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi\sin nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\ dx \\ &= \frac{1}{n}[1 - 2(-1)^n], \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

Oleh karena itu, ekspansi deret Faourier untuk f adalah

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}\Big[(-1)^n - 1\Big]\cos nx + \frac{1}{n}\Big[1 - 2(-1)^n\Big]\sin nx\right\}.$$

Teorema 5.4. (Deret sinus Fourier) *Diberikan f fungsi yang terdefinisi pada selang $(0, L)$ yang diperluas ke dalam selang $(-L, 0)$ sebagai fungsi ganjil. Jika deret Fourier f ada, maka deret dapat dinyatakan dalam bentuk*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

dimana

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Jika diperhatikan, deret sinus Fourier merupakan kasus khusus deret Fourirer (5.1) dengan

$$a_0 = a_n = 0, \qquad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 5.5. (Deret cosinus Fourier) *Diberikan f fungsi yang terdefinisi pada selang $(0, L)$ yang diperluas ke dalam selang $(-L, 0)$*

sebagai fungsi genap. Jika deret Fourier f ada, maka deret dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

dimana

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

Jika diperhatikan, deret cosinus Fourier merupakan kasus khusus deret Fourirer (5.1) dengan

$$b_n = 0, \qquad \text{untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Contoh 5.6. *Ekspansikan fungsi* $f(x) = |\sin x|$ *dalam deret Fourier.*

Penyelesaian:
Karena $f(x) = |\sin x|$ adalah fungsi genap, maka $b_n = 0$ untuk $n = 1, 2, 3, \cdots$, dan

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| \cos nx \; dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \; dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \big[\sin(x + nx) + \sin(x - nx) \big] \; dx \\ &= \frac{2\big[1 + (-1)^n\big]}{\pi(1 - n^2)}, \qquad n = 0, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

sedangkan untuk a_1 diperoleh

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \; dx = 0.$$

Oleh karena itu deret Fourier $f(x)$ adalah

$$f(x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{1 - 4n^2}.$$

5.2 Persamaan Parabolik

Berikut diberikan beberapa contoh kasus penyelesaian persamaan parabolik dengan menggunakan metode pemisahan peubah. Contoh tipikal dari persamaan ini adalah persamaan konduksi panas.

Contoh 5.7. *Diberikan MSAB*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, 0 < t \tag{5.2}$$

dengan

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, & 0 < t \\ u(L,t) &= 0, & 0 < t \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < L. \end{aligned}$$

Penyelesaian:
Langkah 1: Misalkan $u(x,t) = X(x)T(t)$.
Langkah 2: Turunkan $u(x,t) = X(x)T(t)$ satu kali terhadap peubah t dan dua kali terhadap peubah x dan substitusikan ke dalam persamaan diferensial parsial (5.2), diperoleh

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

atau

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \text{ (konstan)} \tag{5.3}$$

Langkah 3: Ubah persamaan (5.3) ke dalam dua persamaan diferensial biasa

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ T'(t) + \lambda k T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Langkah 4: Sebelum menyelesaikan kedua persamaan diferensial biasa di atas, menentukan syarat-syarat batas yang memenuhi persamaan diferensial tersebut. Dengan memasukkan $x = 0$ untuk $u(x,t)$, diperoleh

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0.$$

Jika $T(t) = 0$, maka $u(x,t) = 0$. Akibatnya penyelesaian trivial. Karena yang akan dicari adalah penyelesaian nontrivial, maka haruslah

$$X(0) = 0$$

merupakan salah satu syarat batas.
Dengan cara serupa, diperoleh

$$X(L) = 0$$

merupakan syarat batas yang lain. Dalam masalah ini tidak terdapat syarat awal untuk persamaan orde satu dalam peubah t.
Langkah 5: Terdapat dua persamaan diferensial biasa yang dilengkapi dengan syarat batas

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(L) = 0 \\ T'(t) + \lambda k T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Kemudian menyelesaikan salah satu persamaan diferensial biasa tersebut. Pandang tiga kasus: $\lambda > 0, \lambda = 0$ dan $\lambda < 0$.
Kasus 1: $\lambda > 0$. Diberikan $\alpha^2 = \lambda > 0$. penyelesaian umum dari $X'' + \alpha^2 X = 0$ adalah

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x.$$

Karena $X(0) = 0$, diperoleh

$$X(0) = 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0$$

sehingga menghasilkan

$$A = 0$$

dan berakibat

$$X(x) = B\sin\alpha x.$$

Dengan menggunakan syarat batas kedua $X(L) = 0$, diperoleh

$$X(L) = 0 = B\sin\alpha L.$$

Jika $B = 0$ diperoleh $u(x,t) = 0$, penyelesaian trivial. Oleh karena itu dipilih $\sin\alpha L = 0$. Akibatnya, diperoleh

$$\alpha L = n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

sehingga

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}$$

dan

$$\lambda = \lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Nilai $n = 0$ dihilangkan karena menghasilkan $\alpha = 0$ (kontradiksi dengan $\lambda = \alpha^2 > 0$).
Nilai-nilai λ dalam kasus 1 ini disebut **nilai-nilai eigen** masalah nilai batas. Selanjutnya, penyelesaian persamaan diferensial biasa yang pertama dan syarat-syarat batasnya yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_n adalah

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

penyelesaian-penyelesaian ini disebut **fungsi eigen**.
Karena sifat fungsi $\sin(-x) = -\sin x$, maka penulisannya dapat diserderhanakan menjadi

$$X_n(x) = b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

dimana $b_n = B_n - B_{-n}$.

Kasus 2: $\lambda = 0$. Ini menghasilkan $X''(x) = 0$ dengan penyelesaian umum $X(x) = A + Bx$. Karena $X(0) = 0 = A$ dan $X(L) = 0 = BL$, berakibat $B = 0$. Oleh karena itu, diperoleh $X(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0, L]$. Jadi $\lambda = 0$ bukan nilai eigen penyelesaian ini.
Kasus 3: $\lambda < 0$. Diberikan $\lambda = -\alpha^2 < 0$. penyelesaian umum $X'' - \alpha^2 X = 0$ adalah

$$X(x) = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x$$

Karena $X(0) = 0$, diperoleh $X(0) = 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0$ sehingga $A = 0$. Akibatnya diperoleh

$$X(x) = B \sinh \alpha x$$

Dengan syarat $X(L) = B \sinh \alpha L = 0$, berakibat $B = 0$ menghasilkan penyelesaian trivial, atau $\sinh \alpha L = 0$ menghasilkan $\alpha = 0$. Tetapi ini kontradiksi dengan $-\alpha^2 < 0$. Jadi, tidak ada nilai eigen negatif yang memenuhi.
Langkah 6: Penyelesaian persamaan diferensial biasa

$$T' + \lambda k T = T' + \frac{n^2\pi^2}{L^2} kT = 0$$

adalah

$$T_n(t) = C_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Di sini selanjutnya diambil $C_n = 1$.
Langkah 7: Dengan mengkombinasikan kedua penyelesaian, diperoleh

$$u_n(x,t) = b_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Dari prinsip superposisi, diperoleh

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{5.4}$$

Langkah 8: Dari syarat awal, diperoleh

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Dari deret sinus Fourier, diperoleh

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Substitusi nilai b_n ini ke persamaan (5.4), diperoleh hasil akhir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\Big)e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad \bullet$$

Sebagai contoh, jika $f(x) = x$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{2L^2}{Ln^2\pi^2}\Big[\sin\frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big]_0^L \\ &= \frac{2L}{n\pi}(-\cos n\pi) = -\frac{2L}{n\pi}(-1)^n \end{aligned}$$

atau

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{2L}{n\pi}.$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian

$$u(x,t) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Contoh 5.8. *Diberikan MSAB*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, 0 < t \tag{5.5}$$

dengan

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_1 \text{ (konstan)}, & 0 < t \\ u(L,t) &= u_2 \text{ (konstan)}, & 0 < t \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 < t. \end{aligned}$$

Penyelesaian:
Masalah ini mempunyai syarat batas yang tidak homogen, maka metode pemisahan peubah tidak bisa digunakan secara langsung. Untuk menyelesaikan masalah ini dengan menggunakan metode pemisahan peubah, terlebih dahulu diasumsikan penyelesaiannya adalah

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x) \tag{5.6}$$

dengan v adalah kondisi transien dan w adalah kondisi *steady state*. Kondisi steady state diperoleh

$$w''(x) = 0, w(0) = u_1, w(L) = u_2.$$

Untuk mendapatkan penyelesaian w, integralkan persamaan $w''(x) = 0$ dua kali, diperoleh

$$w(x) = c_1 x + c_2,$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta-konstanta yang akan ditentukan. Dengan memasukkan syarat $w(0) = u_1, w(L) = u_2$, diperoleh $c_2 = u_1$ dan $c_1 = (u_2 - u_1)/L$, sehingga diperoleh

$$w(x) = \Big(\frac{u_2 - u_1}{L}\Big)x + u_1. \tag{5.7}$$

Kondisi transien menyebabkan syarat batas untuk v menjadi nol. Dengan demikian diperoleh masalah nilai batas dan nilai awal

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, 0 < t$$

dengan

$$\begin{aligned} v(0,t) &= 0, & 0 < t \\ v(L,t) &= 0, & 0 < t \\ v(x,0) &= u(x,0) - w(x) = f(x) - w(x), \qquad & 0 < t \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan v, dapat menggunakan metode pemisahan peubah dengan mengikuti langkah-langkah penyelesaian pada Contoh 5.7.
Langkah 1: Misalkan $v(x,t) = X(x)T(t)$.
Langkah 2: Turunkan $v(x,t) = X(x)T(t)$ satu kali terhadap peubah t dan dua kali terhadap peubah x dan substitusikan ke dalam persamaan diferensial parsial, diperoleh

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

atau

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \text{ (konstan)}$$

Langkah 3: Ubah persamaan ke dalam dua persamaan diferensial biasa

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ T'(t) + \lambda k T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Langkah 4: Sebelum menyelesaikan kedua persamaan diferensial biasa di atas, menentukan syarat-syarat batas yang memenuhi persamaan diferensial tersebut. Dengan memasukkan $x = 0$, diperoleh

$$v(0,t) = X(0)T(t) = 0.$$

Jika $T(t) = 0$, maka $v(x,t) = 0$ yang berakibat $u(x,t) = w(x)$ yang tidak bergantung pada waktu. Ini merupakan penyelesaian trivial. Karena yang akan dicari adalah penyelesaian nontrivial, maka haruslah

$$X(0) = 0$$

merupakan salah satu syarat batas.
Dengan cara serupa, diperoleh

$$X(L) = 0$$

merupakan syarat batas yang lain. Dalam masalah ini tidak terdapat syarat awal untuk persamaan orde satu dalam peubah t.
Langkah 5: Terdapat dua persamaan diferensial biasa yang dilengkapi dengan syarat batas

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(L) = 0 \\ T'(t) + \lambda k T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Kemudian menyelesaikan salah satu persamaan diferensial biasa tersebut. Pandang tiga kasus: $\lambda > 0, \lambda = 0$ dan $\lambda < 0$.
Kasus 1: $\lambda > 0$. Diberikan $\alpha^2 = \lambda > 0$. penyelesaian umum dari $X'' + \alpha^2 X = 0$ adalah

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

Karena $X(0) = 0$, diperoleh

$$X(0) = 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0$$

sehingga menghasilkan

$$A = 0$$

dan berakibat

$$X(x) = B\sin\alpha x$$

Dengan menggunakan syarat batas kedua $X(L) = 0$, diperoleh

$$X(L) = 0 = B\sin\alpha L.$$

Jika $B = 0$ diperoleh $u(x,t) = 0$, penyelesaian trivial. Oleh karena itu dipilih $\sin\alpha L = 0$. Akibatnya, diperoleh

$$\alpha L = n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

sehingga

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}$$

dan

$$\lambda = \lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Nilai $n = 0$ dihilangkan karena menghasilkan $\alpha = 0$ (kontradiksi dengan $\lambda = \alpha^2 > 0$).
Selanjutnya, penyelesaian persamaan diferensial biasa yang pertama dan syarat-syarat batasnya yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_n adalah

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Karena sifat fungsi $\sin(-x) = -\sin x$, maka penulisannya dapat disederhanakan menjadi

$$X_n(x) = b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

dimana $b_n = B_n - B_{-n}$.

Kasus 2: $\lambda = 0$. Ini menghasilkan $X''(x) = 0$ dengan penyelesaian umum $X(x) = A + Bx$. Karena $X(0) = 0 = A$ dan $X(L) = 0 = BL$, berakibat $B = 0$. Oleh karena itu, diperoleh $X(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0, L]$. Jadi $\lambda = 0$ bukan nilai eigen penyelesaian ini.
Kasus 3: $\lambda < 0$. Diberikan $\lambda = -\alpha^2 < 0$. penyelesaian umum $X'' - \alpha^2 X = 0$ adalah

$$X(x) = A\cosh\alpha x + B\sinh\alpha x$$

Karena $X(0) = 0$, diperoleh $X(0) = 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0$ sehingga $A = 0$. Akibatnya diperoleh

$$X(x) = B\sinh\alpha x$$

Dengan syarat $X(L) = B\sinh\alpha L = 0$, berakibat $B = 0$ menghasilkan penyelesaian trivial, atau $\sinh\alpha L = 0$ menghasilkan $\alpha = 0$. Tetapi ini kontradiksi dengan $-\alpha^2 < 0$. Jadi, tidak ada nilai eigen negatif yang memenuhi.
Langkah 6: Penyelesaian persamaan diferensial biasa

$$T' + \lambda kT = T' + \frac{n^2\pi^2}{L^2}kT = 0$$

adalah

$$T_n(t) = C_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Di sini selanjutnya diambil $C_n = 1$ (mengapa?).
Langkah 7: Dengan mengkombinasikan kedua penyelesaian, diperoleh

$$v_n(x,t) = b_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Dari prinsip superposisi, diperoleh

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{5.8}$$

Langkah 8: Dari syarat awal, diperoleh

$$v(x,0) = f(x) - w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Dari deret sinus Fourier, diperoleh

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \big[f(x) - w(x)\big] \sin\frac{n\pi x}{L} dx$$

Substitusi nilai b_n ini ke persamaan (5.8), diperoleh hasil akhir untuk v adalah

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{L}\int_0^L \big[f(x) - w(x)\big] \sin\frac{n\pi x}{L} dx\Big) e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{5.9}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5.7) dan (5.9) ke persamaan (5.6), diperoleh hasil akhir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \Big(\frac{u_2 - u_1}{L}\Big)x + u_1 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{L}\int_0^L \big(f(x) - w(x)\big) \sin\frac{n\pi x}{L} dx\Big) e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} \sin\frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

Sebagai contoh, jika $f(x) = 50^0C$, $u_1 = 125^0C, u_2 = 200^0C$, dan $L = 1$ meter, maka diperoleh

$$w(x) = 75x + 125,$$

dan

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 -75(x+1)\sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{150}{n\pi}(2\cos n\pi - 1) = \frac{150}{n\pi}\big[2(-1)^n - 1\big] \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian

$$u(x,t) = 75x + 125 + \frac{150}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big[2(-1)^n - 1\big]}{n}\ e^{-n^2\pi^2 kt} \sin(n\pi x).$$

5.3 Persamaan Hiperbolik

Berikut diberikan beberapa contoh kasus penyelesaian persamaan hiperbolik. Contoh tipikal dari persamaan ini adalah persamaan gelombang.

Contoh 5.9.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, 0 < t \tag{5.10}$$

dengan

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, & 0 < t \\ u(L,t) &= 0, & 0 < t \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < L \\ u_t(x,0) &= g(x), & 0 < x < L. \end{aligned}$$

Penyelesaian:
Langkah 1: Misalkan $u(x,t) = X(x)T(t)$.
Langkah 2: Turunkan $u(x,t) = X(x)T(t)$ satu kali terhadap peubah t dan dua kali terhadap peubah x dan substitusikan ke dalam persamaan diferensial parsial (5.10), diperoleh

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

atau

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \text{ (konstan)} \tag{5.11}$$

Langkah 3: Ubah persamaan (5.11) ke dalam dua persamaan diferensial biasa

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ T''(t) + \lambda c^2 T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Langkah 4: Sebelum menyelesaikan kedua persamaan diferensial biasa di atas, menentukan syarat-syarat batas yang memenuhi persamaan diferensial tersebut. Dengan memasukkan $x = 0$, diperoleh

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0.$$

Jika $T(t) = 0$, maka $u(x,t) = 0$. Akibatnya penyelesaian trivial. Karena yang akan dicari adalah penyelesaian nontrivial, maka haruslah

$$X(0) = 0$$

merupakan salah satu syarat batas.
Dengan cara serupa, diperoleh

$$X(L) = 0$$

merupakan syarat batas yang lain. Dalam masalah ini tidak terdapat syarat awal untuk persamaan orde dua dalam peubah t.
Langkah 5: Terdapat dua persamaan diferensial biasa yang dilengkapi dengan syarat batas

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(L) = 0 \\ T''(t) + \lambda c^2 T(t) &= 0. \end{aligned}$$

Kemudian menyelesaikan salah satu persamaan diferensial biasa tersebut. Pandang tiga kasus: $\lambda > 0, \lambda = 0$ dan $\lambda < 0$.
Kasus 1: $\lambda > 0$. Diberikan $\alpha^2 = \lambda > 0$. penyelesaian umum dari $X'' + \alpha^2 X = 0$ adalah

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

Karena $X(0) = 0$, diperoleh

$$X(0) = 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0$$

sehingga menghasilkan

$$A = 0$$

dan berakibat

$$X(x) = B\sin\alpha x$$

Dengan menggunakan syarat batas kedua $X(L) = 0$, diperoleh

$$X(L) = 0 = B\sin\alpha L.$$

Jika $B = 0$ diperoleh $u(x,t) = 0$, penyelesaian trivial. Oleh karena itu dipilih $\sin\alpha L = 0$. Akibatnya, diperoleh

$$\alpha L = n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

sehingga

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}$$

dan

$$\lambda = \lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Nilai $n = 0$ dihilangkan karena menghasilkan $\alpha = 0$ (kontradiksi dengan $\lambda = \alpha^2 > 0$).

Nilai-nilai λ dalam kasus 1 ini disebut **nilai-nilai eigen** masalah nilai batas. Selanjutnya, penyelesaian persamaan diferensial biasa yang pertama dan syarat-syarat batasnya yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_n adalah

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Karena sifat fungsi $\sin(-x) = -\sin x$, maka penulisannya dapat disederhanakan menjadi

$$X_n(x) = b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

dimana $b_n = B_n - B_{-n}$.
Kasus 2 dan 3: untuk $\lambda = 0$ dan $\lambda < 0$. Identik dengan Contoh 5.7, kasus ini menghasilkan penyelesaian trivial yaitu nilai $X(x) = 0$
Langkah 6: Penyelesaian persamaan diferensial biasa yang lain dengan nilai $\lambda > 0$ adalah

$$T_n(t) = D_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + E_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Langkah 7: Dengan mengkombinasikan kedua penyelesaian, diperoleh

$$u_n(x,t) = b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \left(D_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + E_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Dari prinsip superposisi, diperoleh

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(D_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + E_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \tag{5.12}$$

Turunan terhadap peubah t dari fungsi $u(x,t)$ adalah

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(E_n \cos \frac{n\pi c}{L} t - D_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \tag{5.13}$$

Langkah 8: Syarat awal persamaan (5.10) disubstitusikan pada persamaan (5.12), diperoleh

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Dari deret sinus Fourier, diperoleh

$$D_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Syarat awal persamaan (5.10) disubtitusikan pada persamaan (5.13) diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Dari deret sinus Fourier, diperoleh

$$E_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Substitusi nilai-nilai ini ke persamaan (5.12), diperoleh penyelesaian

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left[\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\cos\frac{n\pi c}{L}t\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\sin\frac{n\pi c}{L}t\right] \end{aligned}$$

Contoh 5.10. *Pandang suatu kawat transmisi frekwensi tinggi mempunyai panjang 40 m. Misalkan kecepatan perubahan tegangan kawat terhadap x di kedua ujung kawat adalah nol. Jika tegangan awal kawat adalah $f(x)$ dan kecepatan perubahan tegangan terhadap t adalah nol, tentukan penyelesaian fungsi tegangan terhadap x dan t.*

Penyelesaian: Masalah ini dapat direpresentasikan dalam persamaan gelombang dengan syarat batas Neumann. Jika $e(x,t)$ menyatakan tegangan kawat pada posisi x (meter) dan waktu t (detik), maka masalah di atas dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 40, 0 < t$$

dengan

$$\begin{aligned} e_x(0,t) &= 0, & 0 < t \\ e_x(40,t) &= 0, & 0 < t \\ e(x,0) &= f(x), & 0 < x < 40 \\ e_t(x,0) &= 0, & 0 < x < 40 \end{aligned}$$

Langkah 1 dan 2. Dimisalkan $e(x,t) = X(x)T(t)$. Substitusi ke persamaan diferensial diperoleh

$$\frac{X''}{X} = LC\frac{T''}{T} = -\lambda.$$

Langkah 3: Diperoleh dua persamaan diferensial biasa

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ T'' + \frac{\lambda}{LC}T &= 0 \end{aligned}$$

Langkah 4: Terdapat tiga syarat batas dan syarat awal yang memenuhi kondisi untuk persamaan diferensial biasa berikut:

$$X'(0) = 0, \qquad X'(40) = 0, \qquad T'(0) = 0$$

Langkah 5 dan 6: Pandang tiga kasus: $\lambda > 0, \lambda = 0$ dan $\lambda < 0$.
Kasus 1: $\lambda > 0$. Diberikan $\alpha^2 = \lambda > 0$. penyelesaian umum dari $X'' + \alpha^2 X = 0$ adalah

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

dan

$$X'(x) = -\alpha A\sin\alpha x + \alpha B\cos\alpha x$$

Penerapan ke nilai batas, diperoleh

$$X'(0) = -\alpha A \cdot 0 + \alpha B \cdot 1 = 0$$

sehingga

$$\alpha B = 0$$

Karena $\alpha > 0$, maka $B = 0$ dan diperoleh $X'(x) = -\alpha A\sin\alpha x$. Oleh karena itu, diperoleh $X'(40) = -\alpha A\sin 40\alpha = 0$. Baik α maupun A keduanya tidak sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\sin 40\alpha = 0,$$

yang mana menghasilkan

$$\begin{aligned} 40\alpha &= n\pi, & n = \pm 1, \pm 2, \cdots \\ \alpha &= \frac{n\pi}{40}, & n = \pm 1, \pm 2, \cdots . \end{aligned}$$

Nilai-nilai eigen positifnya adalah

$$\lambda_n = \alpha^2 = \left(\frac{n\pi}{40}\right)^2$$

dan fungsi-fungsi eigennya adalah

$$X_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi x}{40}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Karena sifat fungsi $\cos(-x) = \cos x$, maka penulisannya dapat disederhanakan menjadi

$$X_n(x) = a_n \cos\frac{n\pi x}{40}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

dimana $a_n = A_n + A_{-n}$. Penyelesaian persamaan diferensial biasa yang lain adalah

$$T_n(t) = D_n \cos\frac{n\pi t}{40\sqrt{LC}} + E_n \sin\frac{n\pi t}{40\sqrt{LC}}$$

dan

$$T_n'(t) = -D_n \frac{n\pi}{40\sqrt{LC}} \sin\frac{n\pi t}{40\sqrt{LC}} + E_n \frac{n\pi}{40\sqrt{LC}} \cos\frac{n\pi t}{40\sqrt{LC}}$$

Dengan menggunakan syarat awal

$$T_n'(0) = E_n \frac{n\pi}{40\sqrt{LC}} = 0$$

disimpulkan $E_n = 0$.
Oleh karena itu,

$$T_n(t) = D_n \cos\frac{n\pi t}{40\sqrt{LC}}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Selanjutnya, diambil $D_n = 1$.
Kombinasi X_n dan T_n diperoleh

$$e_n(x,t) = a_n \cos\frac{n\pi x}{40} \cos\frac{n\pi t}{40\sqrt{LC}}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Kasus 2: $\lambda = 0$. Dalam kasus ini, diperoleh $X'' = 0$ dan $X(x) = A + Bx$. Oleh karena itu, diperoleh $X'(x) = B$ dan dengan menggunakan syarat batas diperoleh

$$X'(0) = B = 0.$$

Selanjutnya, diperoleh $X'(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0, 40]$ dan khususnya untuk $x = 40$, yakni $X'(40) = 0$. Oleh karena itu, kedua syarat batas terpenuhi: $\lambda = 0$ merupakan nilai eigen dan $X(x) = A$ (konstan) merupakan fungsi eigen. Disepakati untuk diambil $A = 1$ dan ini menjadikan $X(x) = 1$ sebagai fungsi eigen. Untuk mengidentifikasi nilai eigen dan fungsi eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$, ditulis $\lambda_0 = 0$ dan $X_0 = 1$. Selanjutnya, penyelesaian untuk $T'' = 0$ diperoleh $T(t) = Dt + E$ dan $T'(t) = D$. Dengan menggunakan syarat awal $T'(0) = 0$, diperoleh $D = 0$ dan $T_0 = 1$. Oleh karena itu, $e_0(x, t) = X_0 T_0 = 1$.

Kasus 3: $\lambda < 0$. Dengan cara serupa seperti kasus 3 dalam Contoh 1 sebelumnya, dapat ditunjukkan tidak terdapat nilai-nilai eigen negatif.

Langkah 7: Untuk menyelesaikan masalah ini, dibentuk kombinasi linier semua penyelesaian e_0 dan e_n, sehingga diperoleh penyelesaian

$$\begin{aligned} e(x,t) &= \frac{a_0}{2} e_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x,t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{40} \cos\frac{n\pi t}{40\sqrt{LC}}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Langkah 8: Dari syarat awal, diperoleh

$$e(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{40}, \qquad 0 < x < 40$$

Dari deret cosinus Fourier, diperoleh

$$a_0 = \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)dx$$

dan

$$a_n = \frac{1}{20}\int_0^{40} f(x)\cos\frac{n\pi x}{40}dx$$

Substitusi nilai-nilai ini ke persamaan (5.14), diperoleh penyelesaian

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{40}\int_0^{40} f(x)dx \\ &\quad + \frac{1}{20}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_0^{40} f(x)\cos\frac{n\pi x}{40}dx\Big)\cos\frac{n\pi x}{40}\cos\frac{n\pi t}{40\sqrt{LC}}. \end{aligned}$$

5.4 Persamaan Eliptik

Berikut diberikan contoh kasus penyelesaian persamaan eliptik. Contoh tipikal dari persamaan ini adalah persamaan konduksi panas dimensi dua.

Contoh 5.11. *Temperatur dalam suatu pelat persegi yang terisolasi di atas dan bawahnya yang memenuhi persamaan diferensial*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)$$

Jika temperatur tidak tergantung lagi pada t, yakni kondisi tunak (steady state), persamaan diferensial menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

yang merupakan persamaan Laplace dua peubah.

Selanjutnya, misalkan dipunyai plat persegi dengan panjang a dan lebar b dan syarat-syarat batas diberikan oleh

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, && 0 < x < a \\ u(a,y) &= 0, && 0 < y < b \\ u(x,b) &= f(x), && 0 < x < a \\ u(0,y) &= 0, && 0 < y < b. \end{aligned}$$

Tentukan penyelesaian temperatur $u(x, y)$.

Penyelesaian: Langkah 1,2, dan 3: Misalkan $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$X''Y + XY'' = 0$$

atau

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

sehingga memberikan dua persamaan diferensial biasa

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ Y''(y) - \lambda Y(y) &= 0. \end{aligned}$$

Langkah 4 dan 5: Dari syarat-syarat batas yang diberikan, mengikuti syarat-syarat batas yang bersesuaian dengan persamaan diferensial biasa:

$$X(0) = 0, \qquad X(a) = 0$$

dan

$$Y(0) = 0$$

Kasus 1. $\lambda > 0$. Diberikan $\lambda = \alpha^2 > 0$. Oleh karena itu, seperti Contoh 1 sebelumnya, diperoleh nilai-nilai eigen

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

dan fungsi-fungsi eigennya adalah

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Kasus 2 dan 3. $\lambda = 0$ dan $\lambda < 0$. Mudah ditunjukkan tidak terdapat nilai-nilai eigen non positif.
Langkah 6: Diperoleh bentuk persamaan diferensial biasa

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0$$

dengan penyelesaian, sebagai kesepakatan digunakan fungsi hiperbolik, diperoleh

$$Y_n(y) = C_n \cosh\frac{n\pi y}{a} + D_n \sinh\frac{n\pi y}{a}$$

Dengan menggunakan syarat batas $Y(0) = 0$, diperoleh

$$Y_n(0) = 0 = C_n \cdot 1 + D_n \cdot 0$$

atau

$$C_n = 0$$

sehingga diperoleh

$$Y_n(y) = \sinh\frac{n\pi y}{a}$$

merupakan penyelesaian persamaan diferesial biasa dalam peubah y. Sebagai kesepakatan ditetapkan konstanta $D_n = 1$.
Langkah 7: Kombinasi dua penyelesaian X_n dan Y_n, diperoleh penyelesaian persamaan diferensial parsial

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

Langkah 8: Dengan menggunakan prinsip superposisi, diperoleh penyelesaian

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a} \tag{5.15}$$

Dengan syarat batas nonhomogen $u(x,b) = f(x)$, persamaan (5.15) menjadi

$$u(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi b}{a} \tag{5.16}$$

Jika diberikan

$$B_n = b_n \sinh\frac{n\pi b}{a},$$

persamaan (5.16) menjadi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

yang merupakan deret sinus Fourier. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} B_n &= b_n \sinh\frac{n\pi b}{a} \\ &= \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \end{aligned}$$

Konstanta b_n menjadi

$$b_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

dan sebagai hasil akhir diperoleh

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx\Big)\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a} \qquad \bullet$$

Sebagai contoh, jika $f(x) = x$, diperoleh

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a x\sin\frac{n\pi x}{a}dx \\ &= \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\frac{a^2}{n^2\pi^2}\Big[\sin\frac{n\pi x}{a} - \frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\Big]_0^a \\ &= \frac{2a}{\sinh\frac{n\pi b}{a}n^2\pi^2}(-n\pi\cos n\pi) = (-1)^{n+1}\frac{2a}{n\pi\sinh\frac{n\pi b}{a}} \end{aligned}$$

sehingga

$$u(x,y) = \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\pi x/a)\sinh(n\pi y/a)}{n\sinh(n\pi b/a)}$$

5.5 Rangkuman

1. Diberikan f fungsi periodik dengan periode $2L$. **Deret Fourier** fungsi f adalah deret berbentuk

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

asalkan koefisien-koefisien

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}$$

semuanya ada.

2. Diberikan f fungsi yang terdefinisi pada selang $(0, L)$ yang diperluas ke dalam selang $(-L, 0)$ sebagai fungsi ganjil. Jika deret Fourier f ada, maka **deret sinus Fourier** fungsi $f(x)$ dinyatakan dalam bentuk

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

dimana

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

3. Diberikan f fungsi yang terdefinisi pada selang $(0, L)$ yang diperluas ke dalam selang $(-L, 0)$ sebagai fungsi genap. Jika deret

Fourier f ada, maka **deret cosinus Fourier** fungsi $f(x)$ dinyatakan dalam bentuk

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

dimana

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

5.6 Soal-soal Latihan

1. Tentukan deret Fourier fungsi

$$f(x) = 1 + x, \qquad -\pi < x < \pi.$$

2. Tentukan deret sinus Fourier fungsi

$$f(x) = \pi - x, \qquad 0 < x < \pi.$$

3. Tentukan deret cosinus Fourier fungsi

$$f(x) = \pi + x, \qquad 0 < x < \pi.$$

4. Diberikan fungsi $f(x) = |x|$, untuk $-\pi \leq x \leq \pi$. Tunjukkan bahwa

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

5. Temperatur $u(x,t)$ dalam batang yang diisolasi dengan panjang L memenuhi masalah nilai batas dan nilai awal berikut berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \\ u(x,0) &= M(\text{konstan}), \qquad 0 < x < L \\ u(L,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ u_x(0,t) &= 0, \qquad 0 < t \end{aligned}$$

Gunakan metode pemisahan peubah untuk menentukan $u(x,t)$.

6. Gunakan metode pemisahan peubah untuk menentukan temperatur $u(x,t)$ jika

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 10, 0 < t \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ \frac{\partial u}{\partial x}(10,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ u(x,0) &= x(10-x), \qquad 0 < x < 10 \end{aligned}$$

7. Diberikan masalah nilai batas dan nilai awal

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \\ y(0,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ y(L,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ y(x,0) &= \mu x(L-x), \qquad 0 < x < L \\ y_t(x,0) &= 0 \qquad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Gunakan metode pemisahan peubah untuk membuktikan penyelesaian di atas adalah

$$y(x,t) = \frac{8\mu L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{L} \cos\frac{(2n-1)\pi a t}{L}.$$

8. Tegangan $e(x,t)$ suatu kabel bawah laut dengan panjang 3000 km memenuhi masalah nilai batas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} &= RC\frac{\partial e}{\partial t}, \qquad 0 < x < 3000, 0 < t \\ e(0,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ e(3000,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ e(x,0) &= \sin\frac{x}{100}, \qquad 0 < x < 3000 \end{aligned}$$

Gunakan metode pemisahan peubah untuk menentukan $e(x,t)$.

9. Arus $i(x,t)$ suatu kabel bawah laut dengan panjang L memenuhi

$$\begin{aligned} i_{xx} &= RCi_t, \qquad 0 < x < L, 0 < t \\ i_x(0,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ i_x(L,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ i(x,0) &= 2, \qquad 0 < x < L \end{aligned}$$

Gunakan metode pemisahan peubah untuk menentukan $i(x,t)$.

10. Suatu dawai diikat pada dua batang vertikal di $x = 0$ dan $x = 2$.

    (a). Tentukan simpangan dawai $y(x,t)$ jika syarat-syarat berikut terpenuhi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, 0 < t \\ y_x(0,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ y_x(2,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ y(x,0) &= x, \qquad 0 < x < 2 \\ y_t(x,0) &= 0, \qquad 0 < x < 2 \end{aligned}$$

    (b). Sketsakan $y(x,t)$ pada $0 < x < 2$ untuk $t = 0, t = 1$, dan $t = 2$. *Petunjuk:* Gunakan hanya dua suku pertama penyelesaian deret

11. Sketsakan bentuk gelombang $u(x,t)$ dengan menggunakan penyelesaian d'Alembert untuk $t = 1$ dan $t = 4$ jika panjang tali 16 dan memenuhi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \\ u(16,t) &= 0 \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x & , 0 \le x \le 4 \\ -\frac{x}{3} + \frac{16}{3} & , 4 \le x \le 16 \end{cases}$$

5.7 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu dalam menyelesaikan masalah syarat awal dan syarat batas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, 0 < t$$

yang memenuhi kondisi

$$\begin{aligned} u(0,t) &= A, (\text{konstan}) \qquad 0 < t \\ u(L,t) &= B, (\text{konstan}) \qquad 0 < t \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 < x < L \\ u_t(x,0) &= g(x), \qquad 0 < x < L. \end{aligned}$$

dengan metode pemisahan peubah.

5.8 Daftar Rujukan

1. Jurgen Jost, 2013, *Partial Differential Equations*, 3rd, New York: Springer Science+Business Media

2. Peter J. Olver, 2014. *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer International Publishing Switzerland

3. J. David Logan, 2015, *Applied Partial Differential Equations*, 3rd, Springer International Publishing Switzerland

4. David Borthwick , 2016, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer International Publishing Switzerland

5. Valery Serov, 2017, *Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics*, Springer International Publishing Switzerland

6. Victor Ivrii , 2021, *Partial Differential Equations*, Department of Mathematics, University of Toronto

Bab 6

Transformasi Laplace

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa dapat menentukan transformasi Laplace dari suatu fungsi.
2. Mahasiswa dapat menentukan transformasi Laplace invers dari suatu fungsi.
3. Mahasiswa dapat menyelesaikan MSAB dengan metode transformasi Laplace.

Nama transformasi Laplace diberikan untuk menghormati seorang ahli matematika Perancis bernama Pierre-Simon Laplace (23 Maret 1749 - 5 Maret 1827). Transformasi Laplace mempunyai peran penting dalam aplikasi-aplikasi di bidang fisika, optik, rekayasa listrik, dan lain-lain. Transformasi Laplace sering digunakan dalam menyelesaikan masalah-masalah nilai awal suatu persamaan diferensial dan masalah-masalah syarat batas, khususnya transformasi Laplace sangat ampuh untuk menyelesaikan persamaan gelombang dan persamaan panas dimensi satu

Transformasi Laplace merupakan suatu transformasi dari fungsi dengan menggunakan integral tak wajar. Untuk memahami transformasi Laplace ini dibutuhkan konsep integral tak wajar dan kekonvergenannya untuk mempelajari transformasi Laplace.

6.1 Transformasi Laplace Fungsi Satu Peubah Bebas

Untuk mengawali dalam memahami transformasi Laplace, diberikan definisi berikut ini.

Definisi 6.1. *Diberikan fungsi $f(t)$ untuk $t > 0$.* **Transformasi Laplace** *dari $f(t)$, ditulis $\mathcal{L}\{f(t)\}$, didefinisikan sebagai*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt = F(s)$$

jika integralnya ada.

Contoh 6.2. *Tentukan transformasi Laplace dari $f(t) = 1$.*

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^\infty e^{-st}\ dt = \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st}\ dt \\ &= \lim_{P\to\infty} -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^P = \frac{1}{s}, \qquad s > 0 \end{aligned}$$

Contoh 6.3. *Tentukan transformasi Laplace dari* $f(t) = t$.

Penyelesaian:
Dengan mengikuti hasil pada Contoh 6.2, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-st} t \; dt = \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st} t \; dt \\
&= -\frac{1}{s}\Big[\lim_{P\to\infty} te^{-st}\Big|_0^P - \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st}\Big] \\
&= -\frac{1}{s}\Big[0 - \frac{1}{s}\Big] = \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

Contoh 6.4. *Tentukan transformasi Laplace dari* $f(t) = \sin t$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin t\} &= \int_0^\infty e^{-st} \sin t \; dt = \lim_{P\to\infty} \int_0^P -e^{-st} d(\cos t) \\
&= -\Big[\lim_{P\to\infty} \Big(e^{-st}\cos t\Big|_0^P + s \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st} \; \cos t \; dt\Big)\Big] \\
&= -\Big[(0-1) + s \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st} \; \cos t \; dt\Big)\Big] \\
&= 1 + s\Big[\lim_{P\to\infty} \Big(e^{-st}\sin t\Big|_0^P - s\int_0^P e^{-st} \; \sin t \; dt\Big)\Big] \\
&= 1 + s[0 - s\mathcal{L}\{\sin t\}] \\
(1+s^2)\mathcal{L}\{\sin t\} &= 1
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Transformasi Laplace dari fungsi-fungsi khusus yang lainnya dapat dilihat pada Tabel 6.1.

Tabel 6.1: Transformasi Laplace Fungsi-fungsi Khusus

No.	$f(t)$	$F(s)$
1.	$t^n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
2.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, a > s$
3.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
4.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
5.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
6.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
7.	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
8.	$t \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
9.	$\text{erf}(a/2\sqrt{t})$	$\frac{1-e^{-a\sqrt{s}}}{s}$
10.	$\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi t}{a}$	$\frac{\sinh sx}{s \sinh sa}$
11.	$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$	$\frac{\sinh sx}{s \cosh sa}$
12.	$\frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \cos n\pi x$	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \sinh a\sqrt{s}}$

6.2 Sifat-sifat Transformasi Laplace

1. Sifat linier

   Teorema 6.5. *Jika* $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ *dan* $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, *maka untuk sebarang* α_1 *dan* α_2 *bilangan-bilangan real berlaku*

   $$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s).$$

   Bukti.

   $$\begin{aligned}
   \mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\big[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\big]\, dt \\
   &= \int_0^\infty e^{-st}\alpha_1 f_1(t)\, dt \\
   &\quad + \int_0^\infty e^{-st}\alpha_2 f_2(t)\, dt \\
   &= \alpha_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\, dt \\
   &\quad + \alpha_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\, dt \\
   &= \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)
   \end{aligned}$$

   Bukti selesai. □

2. Sifat Translasi 1

   Teorema 6.6. *Jika* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, *maka*

   $$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

   Bukti.

   $$\begin{aligned}
   \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt \\
   &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a)
   \end{aligned}$$

   □

3. Sifat Translasi 2

Teorema 6.7. *Diberikan* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. *Jika didefinisikan fungsi* g *pada* $\mathbb{R}$ *dengan*

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$$

maka

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s).$$

Bukti.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}g(t)\ dt \\ &= \int_0^a e^{-st}g(t)\ dt + \int_a^\infty e^{-st}g(t)\ dt \\ &= \int_0^a e^{-st}\cdot 0\ dt + \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\ dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\ dt \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi $t = u + a$, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-(u+a)s}f(u)\ d(u+a) \\ &= e^{-as}\int_0^\infty e^{-us}f(u)\ du \\ &= e^{-as}F(s) \end{aligned}$$

□

4. Sifat Pengubahan Skala

Teorema 6.8. *Jika* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, *maka*

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{s}F(s/a)$$

Bukti.

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(at)\ dt$$

Dengan menggunakan transformasi $t = u/a$, diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(at)\} &= \int_0^\infty e^{-su/a} f(u)\ d(u/a) \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-su/a} f(u)\ du \\ &= \frac{1}{a}F(s/a)\end{aligned}$$

□

5. Transformasi Laplace dari Turunan

Teorema 6.9. *Jika* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, *maka*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Bukti.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\ dt \\ &= \lim_{P\to\infty}\Big[\int_0^P e^{-st} f'(t)\ dt\Big] \\ &= \lim_{P\to\infty}\Big[e^{-st} f(t)\Big|_0^P + s\int_0^P e^{-st} f(t)\ dt\Big] \\ &= \lim_{P\to\infty}\Big[e^{-sP} f(P) - f(0) + s\int_0^P e^{-st} f(t)\ dt\Big] \\ &= s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt - f(0) = sF(s) - f(0).\end{aligned}$$

□

Perluasan ke dalam turunan-turunan yang berorde lebih tinggi dapat digunakan induksi matematika, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots \\ &\quad -sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \qquad (6.1)\end{aligned}$$

asalkan $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ kontinu untuk $0 \le t \le N$ dan eksponensial berorde untuk $t > N$ dan $f^{(n)}(t)$ kontinu sepotong-sepotong untuk $0 \le t \le N$.

6. Perkalian dengan t^n

Teorema 6.10. *Jika* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, *maka*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

6.3 Transformasi Laplace dari Fungsi dengan Dua atau Lebih Peubah Bebas

Misalkan $U(x,t)$ adalah suatu fungsi untuk x tertentu dan $t > 0$ yang kontinu sepotong-sepotong dalam setiap selang berhingga $0 \leq t \leq N$ dan eksponensial berorde γ, maka transformasi Laplace dari U, dinyatakan dengan $u(x,s)$, ada untuk semua $s > \gamma$. Transformasi Laplace dari U terhadap peubah t dengan mengambil Definisi 6.1 yang dinyatakan dengan $\mathcal{L}\{U(x,t)\}$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}\{U(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st} U(x,t)\ dt = u(x,s).$$

Transformasi Laplace dari turunan parsial U terhadap x, yakni $\mathcal{L}\{\frac{\partial U}{\partial x}\}$, dimana $U = U(x,t)$ yang didefinisikan untuk $a \leq x \leq b$ dan $t > 0$ dapat digunakan aturan Leibnitz sebagai berikut.
Jika $f(x,t)$ fungsi kontinu dan mempunyai sebuah turunan parsial $\frac{\partial f}{\partial t}$ yang kontinu dalam sebuah domain pada bidang xt dengan $a \leq x \leq b$ dan $t_1 \leq t \leq t_2$ maka berlaku

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{t_1}^{t_2} f(x,t)\ dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\ dt.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\mathcal{L}\{\frac{\partial U}{\partial x}\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial U}{\partial x}\ dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-st} U\ dt = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Dengan menggunakan hasil ini, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\} &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\ dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial U}{\partial x}\ dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Secara umum dapat dituliskan

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^n U}{\partial x^n}\Big\} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n},$$

dengan $u = u(x,s)$.

Sedangkan untuk mendapatkan transformasi Laplace dari fungsi $\frac{\partial U}{\partial t}$ yang terdefinisi pada $a \le x \le b$ dan $t > 0$ digunakan pengintegrasian dengan memandang $U(x,t)$ fungsi dari t dan menganggap $U(x,t)$ kontinu pada setiap selang berhingga $0 \le t \le N$ dan eksponensial berorde γ untuk $t > N$. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial U}{\partial t}\Big\} &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}\,dt \\
&= \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}\,dt \\
&= \lim_{P\to\infty}\Big(e^{-st}U(x,t)\big|_0^P + s\int_0^P e^{-st}U(x,t)\,dt\Big) \\
&= s\int_0^\infty e^{-st}U(x,t)\,dt - U(x,0) \\
&= su - U(x,0),
\end{aligned}$$

dimana $u = u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$.

Untuk mendapatkan transformasi Laplace dari fungsi $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, dimisalkan $\frac{\partial U}{\partial t} = V$ dan dengan menggunakan hasil terakhir di atas, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\Big\} &= \mathcal{L}\{\frac{\partial V}{\partial t}\} \\
&= s\mathcal{L}\{V\} - V(x,0) \\
&= s\big(s\mathcal{L}\{U\} - U(,0)\big) - U_t(,0) \\
&= s^2u - sU(x,0) - U_t(x,0)
\end{aligned}$$

yang memenuhi sifat transformasi Laplace dari turunan seperti pada Teorema 6.9. Dengan analogi persamaan (6.1), transformasi Laplace dari $\frac{\partial^n U}{\partial t^n}$ didapat

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^n U}{\partial t^n}\Big\} &= s^nu - s^{n-1}U(x,0) - s^{n-2}U_t(x,0) - \cdots \\
&\quad -sU\underbrace{tt\ldots t}_{\text{n-2}}(x,0) - U\underbrace{tt\ldots t}_{\text{n-1}}(x,0).
\end{aligned}$$

6.4 Transformasi Laplace Invers

Jika transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ adalah $F(s)$, yakni $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $f(t)$ disebut **transformasi Laplace invers** dari $F(s)$ yang dinotasikan dengan $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. Sebagai contoh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} &= t \\ \mathcal{L}^{-1}\{1/(s-2)\} &= e^{2t} \\ \mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+4)\} &= \frac{\sin 2t}{2} \end{aligned}$$

dan sebagainya. Sedangkan untuk sifat-sifat operator $\mathcal{L}^{-1}$ diberikan sebagai berikut.

1. Sifat linier

   Teorema 6.11. *Jika $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ dan $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, maka untuk sebarang α_1 dan α_2 bilangan-bilangan real berlaku*

   $$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)\} &= \alpha_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \alpha_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} \\ &= \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t). \end{aligned}$$

2. Sifat Translasi 1

   Teorema 6.12. *Jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka*

   $$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

3. Sifat Translasi 2

   Teorema 6.13. *Jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka*

   $$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = \begin{cases} f(t-a) & , t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$$

4. Sifat Pengubahan Skala

   Teorema 6.14. *Jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka*

   $$\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a} f(t/a)$$

5. Transformasi Laplace invers dari Turunan

Teorema 6.15. *Jika* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, *maka*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$$

6. Perkalian dengan s

Teorema 6.16. *Jika* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, *maka*

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t), \qquad \textit{untuk } f(0) = 0,$$

dan

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + f(0)\delta(t), \qquad \textit{untuk } f(0) \neq 0.$$

dengan $\delta(t)$ *fungsi delta Dirac.*

Agar lebih jelas cara mendapatkan transformasi Laplace invers, diberikan contoh-contoh berikut.

Contoh 6.17. *Tentukan transformasi Laplace invers dari*

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2-1)}.$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s(s^2-1)}\Big\} &= \mathcal{L}^{-1}\Big\{-\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}\Big\} \\
&= -\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}\Big\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s-1}\Big\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s+1}\Big\} \\
&= -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh t - 1
\end{aligned}$$

Contoh 6.18. *Tentukan transformasi Laplace invers dari*

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

Penyelesaian:

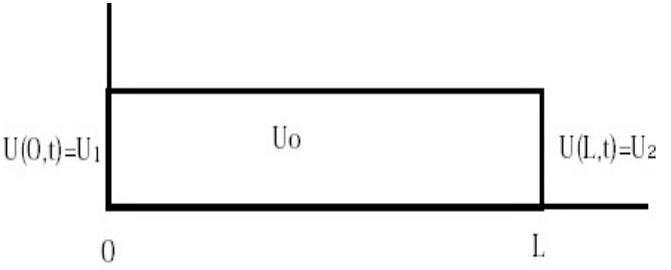
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\Big\} &= \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\Big\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\Big\} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\Big\} \\
&= e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}
\end{aligned}$$

6.5 Penyelesaian Persamaan Konduksi Panas dengan Trans-formasi Laplace

Penyelesaian persamaan konduksi panas akan diberikan dalam beberapa kasus. Sebagai kasus pertama untuk panjang batang berhingga dengan permukaan teriolasi.

6.5.1 Panjang berhingga, permukaan terisolasi, dan suhu kedua penampang dipertahankan konstan

Masalah nilai batas konduksi panas dimensi satu pada keadaan tidak tunak pada benda panjang berhingga L dengan suhu awal U_0 konstan dan suhu kedua penampang dipertahankan konstan masing-masing U_1 dan U_2 (Gambar 6.1) adalah



Gambar 6.1: Suhu kedua penampang dipertahankan konstan

$$\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned} U(x,0) &= U_0, \qquad 0 < x < L \\ U(0,t) &= U_1, \qquad t > 0 \\ U(L,t) &= U_2, \qquad t > 0. \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan permasalahan ini dengan menggunakan transformasi Laplace, sebagai berikut.
Lakukan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial,

diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big\{\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial t}\Big\} &= \mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big\} \\ \frac{s}{k}u - \frac{U(x,0)}{k} &= u_{xx} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh bentuk persamaan diferensial

$$u_{xx} - \frac{s}{k}u = -\frac{U_0}{k}. \tag{6.2}$$

Transformasi syarat batasnya menjadi

$$\mathcal{L}\{U(0,t)\} = u(0,s) = \frac{U_1}{s} \tag{6.3}$$

$$\mathcal{L}\{U(L,t)\} = u(L,s) = \frac{U_2}{s}. \tag{6.4}$$

Penyelesaian umum persamaan (6.2) adalah

$$u(x,s) = C_1 \sinh(x\sqrt{s/k}) + C_2 \cosh(x\sqrt{s/k}) + \frac{U_0}{s}. \tag{6.5}$$

Substitusi persamaan (6.3) dan persamaan (6.4) ke persamaan (6.5), menghasilkan

$$C_2 = \frac{U_1 - U_0}{s}$$

dan

$$C_1 = \frac{(U_2 - U_0)}{s\sinh(L\sqrt{s/k})} - \frac{(U_1 - U_0)\cosh(L\sqrt{s/k})}{s\sinh(L\sqrt{s/k})}.$$

Kemudian, dengan mensubstitusikan hasil-hasil C_1 dan C_2 ini ke persamaan (6.5), diperoleh

$$\begin{aligned} u(x,s) &= \frac{(U_2 - U_0)\sinh(x\sqrt{s/k})}{s\sinh(L\sqrt{s/k})} \\ &\quad - \frac{(U_1 - U_0)\cosh(L\sqrt{s/k})\sinh(x\sqrt{s/k})}{s\sinh(L\sqrt{s/k})} \\ &\quad + \Big(\frac{U_1 - U_0}{s}\Big)\cosh(x\sqrt{s/k}) + \frac{U_0}{s} \\ &= \cdot\frac{(U_2 - U_0)\sinh(x\sqrt{s/k})}{s\sinh(L\sqrt{s/k})} \\ &\quad + \frac{(U_1 - U_0)\sinh((L-x)\sqrt{s/k})}{s\sinh(L\sqrt{s/k})} + \frac{U_0}{s}. \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan penyelesaian akhir adalah dengan cara mengambil transformasi Laplace invers peramaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} U(x,t) &= (U_2-U_0)\Big(\frac{x}{L}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{n^2\pi^2kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big)+ \\ &\quad (U_1-U_0)\Big(\frac{(L-x)}{L}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{n^2\pi^2kt/L^2}\sin\frac{n\pi(L-x)}{L}\Big) \\ &\quad +U_0 \\ &= U_1-\frac{(U_1-U_2)}{L}x \\ &\quad +\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(U_2-U_0)(-1)^n-(U_1-U_0)}{n}e^{n^2\pi^2kt/L^2}\sin\frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

6.5.2 Panjang berhingga dan permukaan serta salah satu penampang terisolasi

Masalah nilai batas konduksi panas dimensi satu pada keadaan tidak tunak pada benda panjang berhingga L dengan suhu awal U_0 konstan dan suhu salah satu penampang dipertahankan konstan U_1 dan penampang lain terisolasi adalah

$$\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad 0<x<L, \quad t>0$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned} U(x,0) &= U_0, \qquad 0<x<L \\ U_x(0,t) &= 0, \qquad t>0 \\ U(L,t) &= U_1, \qquad t>0. \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan permasalahan ini dengan menggunakan transformasi Laplace, sebagai berikut.
Lakukan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big\{\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial t}\Big\} &= \mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big\} \\ \frac{s}{k}u-\frac{U(x,0)}{k} &= u_{xx} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh bentuk persamaan diferensial

$$u_{xx} - \frac{s}{k}u = -\frac{U_0}{k}. \tag{6.6}$$

Transformasi syarat batasnya menjadi

$$\mathcal{L}\{U_x(0,t)\} = u_x(0,s) = 0 \tag{6.7}$$

$$\mathcal{L}\{U(L,t)\} = u(L,s) = \frac{U_1}{s}. \tag{6.8}$$

Penyelesaian umum persamaan (6.6) adalah

$$u(x,s) = C_1 \sinh(x\sqrt{s/k}) + C_2 \cosh(x\sqrt{s/k}) + \frac{U_0}{s}. \tag{6.9}$$

Substitusi persamaan (6.7) dan persamaan (6.8) ke persamaan (6.9), menghasilkan

$$C_1 = 0,$$

dan

$$C_2 = \frac{(U_1 - U_0)}{s\cosh(L\sqrt{s/k})}.$$

Kemudian, dengan mensubstitusikan hasil-hasil C_1 dan C_2 ini ke persamaan (6.9), diperoleh

$$u(x,s) = \frac{(U_1 - U_0)s\cosh(x\sqrt{s/k})}{s\cosh(L\sqrt{s/k})} + \frac{U_0}{s}.$$

Dengan mengambil transformasi Laplace invers persamaan di atas, diperoleh hasil akhir

$$\begin{aligned} U(x,t) &= (U_1 - U_0)\Big(1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/4L^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\Big) \\ &\quad + U_0 \\ &= U_1 + \frac{4(U_1 - U_0)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/4L^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \end{aligned}$$

6.5.3 Panjang berhingga, salah satu penampang terjadi fluks panas, dan suhu penampang lain konstan

Masalah nilai batas konduksi panas dimensi satu pada keadaan tidak tunak pada benda panjang berhingga L dengan suhu awal U_0 konstan

dan suhu salah satu penampang dipertahankan konstan U_1 dan ujung yang lain terjadi fluks panas sebesar A konstan adalah

$$\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned} U(x,0) &= U_0, \qquad 0 < x < L \\ -KU_x(0,t) &= A, \qquad t > 0 \quad (K \text{ konstanta}) \\ U(L,t) &= U_1, \qquad t > 0. \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan permasalahan ini dengan menggunakan transformasi Laplace, sebagai berikut.
Lakukan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big\{\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial t}\Big\} &= \mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big\} \\ \frac{s}{k}u - \frac{U(x,0)}{k} &= u_{xx} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh bentuk persamaan diferensial

$$u_{xx} - \frac{s}{k}u = -\frac{U_0}{k}. \tag{6.10}$$

Transformasi syarat batasnya menjadi

$$\mathcal{L}\{U_x(0,t)\} = u_x(0,s) = -\frac{A}{sK} \tag{6.11}$$

$$\mathcal{L}\{U(L,t)\} = u(L,s) = \frac{U_1}{s}. \tag{6.12}$$

Penyelesaian umum persamaan (6.10) adalah

$$u(x,s) = C_1 \sinh(x\sqrt{s/k}) + C_2 \cosh(x\sqrt{s/k}) + \frac{U_0}{s}. \tag{6.13}$$

Substitusi persamaan (6.11) dan persamaan (6.12) ke persamaan (6.13), menghasilkan

$$C_1 = -\frac{A\sqrt{k}}{s\sqrt{s}K},$$

dan

$$C_2 = \frac{(A\sqrt{k}\sinh(L\sqrt{s/k})}{s\sqrt{s}K\cosh(L\sqrt{s/k})} + \frac{U_1 - U_0}{s\cosh(L\sqrt{s/k})}.$$

Kemudian, dengan mensubstitusikan hasil-hasil C_1 dan C_2 ke persamaan (6.13), diperoleh

$$\begin{aligned} u(x,s) &= -\frac{A\sqrt{k}}{s\sqrt{s}K}\sinh(x\sqrt{s/k}) + \frac{A\sqrt{k}\sinh(L\sqrt{s/k})\cosh(x\sqrt{s/k})}{s\sqrt{s}K\cosh(L\sqrt{s/k})} \\ &\quad + \frac{(U_1-U_0)\cosh(x\sqrt{s/k})}{s\cosh(L\sqrt{s/k})} + \frac{U_0}{s} \\ &= \frac{A\sqrt{k}\sinh((L-x)\sqrt{s/k})}{s\sqrt{s}K\cosh(L\sqrt{s/k})} + \frac{(U_1-U_0)\cosh(x\sqrt{s/k})}{s\cosh(L\sqrt{s/k})} + \frac{U_0}{s}. \end{aligned}$$

Dengan mengambil transformasi Laplace invers persamaan di atas, diperoleh hasil akhir

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{2Ak}{LK}\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 kv/4L^2}\sin\frac{(2n-1)\pi(L-x)}{L}\, dv \\ &\quad + (U_1-U_0)\Big(1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/4L^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\Big) \\ &\quad + U_0 \\ &= \frac{8AL}{K\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\Big(1 - e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/4L^2}\Big)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \\ &\quad + (U_1-U_0)\Big(1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/4L^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\Big) \\ &\quad + U_0 \\ &= U_1 + \frac{A}{K}(L-x) \\ &\quad - \frac{8AL}{K\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/4L^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \\ &\quad + \frac{4(U_1-U_0)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/4L^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \end{aligned}$$

6.5.4 Panjang semi tak hingga dengan suhu penampang dipertahankan konstan

Masalah nilai batas konduksi panas pada keadaan tidak tunak dengan permukaan terisolasi, suhu penampang dipertahankan konstan U_1 dan suhu awal U_0 konstan adalah

$$\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad x > 0, \quad t > 0$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned} U(x,0) &= U_0, \qquad x > 0 \\ U(0,t) &= U_1, \qquad t > 0 \\ \lim_{x\to\infty} U(x,t) &= \text{ ada }, \qquad t > 0. \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan permasalahan ini dengan menggunakan transformasi Laplace, sebagai berikut.
Lakukan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan diferensial, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big\{\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial t}\Big\} &= \mathcal{L}\Big\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big\} \\ \frac{s}{k}u - \frac{U(x,0)}{k} &= u_{xx} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh bentuk persamaan diferensial

$$u_{xx} - \frac{s}{k}u = -\frac{U_0}{k}. \tag{6.14}$$

Transformasi syarat batasnya menjadi

$$\mathcal{L}\{U(0,t)\} = u(0,s) = \frac{U_1}{s} \tag{6.15}$$

$$\lim_{x\to\infty} \mathcal{L}\{U(x,t)\} = \lim_{x\to\infty} u(x,s) \text{ ada} \tag{6.16}$$

Penyelesaian umum persamaan (6.14) adalah

$$u(x,s) = C_1\, e^{x\sqrt{s/k}} + C_2\, e^{x\sqrt{s/k}} + \frac{U_0}{s}.$$

Karena $\lim_{x\to\infty}$ ada, disimpulkan

$$C_1 = 0,$$

sehingga diperoleh

$$u(x,s) = C_2\ e^{x\sqrt{s/k}} + \frac{U_0}{s}. \tag{6.17}$$

Dengan memasukkan syarat batas $u(0,s) = U_1/s$ ke persamaan (6.17), diperoleh

$$C_2 = \frac{U_1 - U_0}{s},$$

sehingga diperoleh

$$u(x,s) = \frac{U_1 - U_0}{s}\ e^{x\sqrt{s/k}} + \frac{U_0}{s}.$$

Dengan mengambil transformasi Laplace invers, diperoleh hasil akhir

$$\begin{aligned} U(x,t) &= (U_1 - U_0)\ \mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\Big) + U_0 \\ &= U_1 - (U_1 - U_0)\ \mathrm{erf}\Big(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\Big), \end{aligned}$$

di mana $\mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-v^2} dv$.

6.6 Rangkuman

1. Definisi transformasi Laplace. Diberikan fungsi $f(t)$ untuk $t > 0$. **Transformasi Laplace** dari $f(t)$, ditulis $\mathcal{L}\{f(t)\}$, didefinisikan sebagai

   $$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt = F(s)$$

   jika integralnya ada.

2. Transformasi Laplace bersifat linier, yakni jika $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ dan $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, maka untuk sebarang α_1 dan α_2 bilangan-bilangan real berlaku

   $$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s).$$

3. Transformasi Laplace dari turunan ke-n fungsi adalah

   $$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots \\ &\quad -s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

   asalkan $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ kontinu untuk $0 \le t \le N$ dan eksponensial berorde untuk $t > N$ dan $f^{(n)}(t)$ kontinu sepotong-sepotong untuk $0 \le t \le N$.

4. Transformasi Laplace invers bersifat linier, yakni jika $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}$ dan $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$, maka untuk sebarang α_1 dan α_2 bilangan-bilangan real berlaku

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{\alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)\} &= \alpha_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \alpha_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} \\ &= \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t).\end{aligned}$$

6.7 Soal-soal Latihan

1. Jika a suatu konstanta real, buktikan bahwa $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$.
2. Jika a suatu konstanta real, buktikan bahwa $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$.
3. Jika a suatu konstanta real, buktikan bahwa $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$.
4. Jika a suatu konstanta real, buktikan bahwa $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$.
5. Tentukan invers transformasi Laplace dari fungsi

$$F(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3}$$

6. Selesaikan masalah nilai awal

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}, \qquad y(0) = -3, y'(0) = 5$$

dengan menggunakan transformasi Laplace.

7. Diberikan masalah nilai awal dan nilai batas

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \\ y(0,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ y(L,t) &= 0, \qquad 0 < t \\ y(x,0) &= \mu x(L-x), \qquad 0 < x < L \\ y_t(x,0) &= 0 \qquad 0 < x < L.\end{aligned}$$

Gunakan metode transformasi Laplace untuk membuktikan penyelesaian di atas adalah

$$y(x,t) = \frac{8\mu L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{L} \cos\frac{(2n-1)\pi at}{L}$$

6.8 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu untuk membuktikan bahwa

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

dimana $m > 0$ dan $n > 0$.

6.9 Daftar Rujukan

1. Jurgen Jost, 2013, *Partial Differential Equations*, 3rd, New York: Springer Science+Business Media

2. Peter J. Olver, 2014. *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer International Publishing Switzerland

3. J. David Logan, 2015, *Applied Partial Differential Equations*, 3rd, Springer International Publishing Switzerland

4. David Borthwick , 2016, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer International Publishing Switzerland

5. N.W. McLachlan , 2016, *Laplace Transforms and Their Applications to Differential Equations*, United States: Dover Publications

6. Valery Serov, 2017, *Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics*, Springer International Publishing Switzerland

Bab 7

Metode Beda Hingga

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan prinsip-prinsip metode Beda Hingga fungsi dua peubah atau lebih.
2. Mahasiswa dapat menjelaskan konsep metode Beda Hingga Maju, Mundur, dan Tengah.
3. Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah nilai awal dan nilai batas dengan metode Beda Hingga.

Masalah Syarat Awal dan Batas (MSAB) suatu PDP yang sederhana, dapat diselesaikan melalui metode analitik. Namun, pada banyak permasalahan fisis yang kompleks, penyelesaian analitik tidak mungkin diperoleh. Dengan demikian, dibutuhkan suatu metode pendekatan yang disebut sebagai metode numerik.

Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Prinsipnya, dengan mengganti turunan menjadi bentuk diskritisasi beda hingga berdasarkan deret Taylor. Hasil diskritisasi akan merubah persamaan diferensial menjadi bentuk sistem persamaan linier (SPL) sehingga dapat dievaluasi menggunakan komputer.

Deret Taylor adalah representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Jika f dan semua turunannya $f', f'', f''', ...$ adalah fungsi kontinu pada selang $[a, b]$, maka $f(x)$ dapat diekspansi untuk nilai $x + \Delta x$ dan $x - \Delta x$ di sekitar x ke dalam deret Taylor. Deret Taylor dari fungsi $f(x)$ yaitu

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + ... \\ f(x - \Delta x) &= f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + ... \end{aligned}$$

Skema diferensiasi metode beda hingga berdasarkan deret Taylor diantaranya:

1. Beda Maju

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + O(\Delta x)$$

2. Beda Mundur

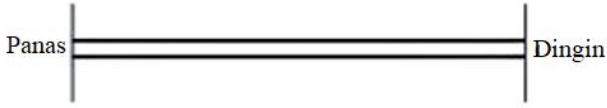
$$\frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x) + O(\Delta x)$$

3. Beda Tengah

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} = f'(x) + O(\Delta x)$$

7.1 Persamaan Parabolik

Berikut diberikan contoh penyelesaian persamaan parabolik menggunakan metode beda hingga. Persamaan tersebut direpresentasikan oleh persamaan konduksi panas pada sebatang logam dimana permukaan batang terisolasi sempurna dengan kedua ujung penampangnya memiliki suhu yang dipertahankan konstan. Suhu di kedua ujungnya masing-masing yaitu u_L (panas) dan u_R (dingin) seperti diberikan pada Gambar 7.1.

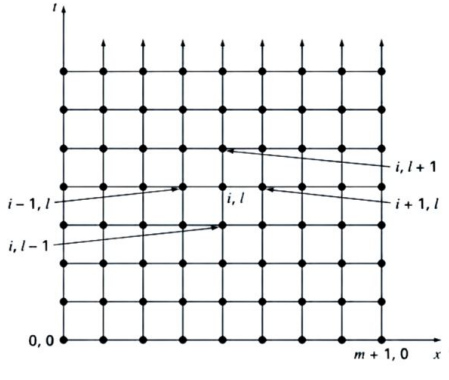


Gambar 7.1: Sebatang logam yang selimutnya diisolasi sempurna

MSAB persamaan konduksi panas batang dapat direpresentasikan sebagai:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \;\; t > 0 \\ &T(0,t) = u_L, \qquad T(L,t) = u_R \\ &T(x,0) = T_0(x) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Berikut diberikan sistem grid (Gambar 7.2) yang digunakan untuk menyelesaikan PDP orde dua pada persamaan konduksi panas.



Gambar 7.2: Sistem grid persamaan parabolik

Gambar 7.2 menyatakan nilai x dan t berturut turut merupakan diskritisasi terhadap ruang dan waktu dengan $i = 1, 2, ..., m+1$ dan $l = 0, 1, 2, ...$ Berikut diberikan tiga metode beda hingga yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan parabolik

7.1.1 Metode FTCS (*Forward Time Center Space*)

Metode FTCS sering disebut sebagai metode eksplisit. Metode beda maju (*forward time*) diterapkan pada u_t dengan nilai error $O(\Delta t)$ dan metode beda tengah (*center space*) yang diterapkan pada u_{xx} dengan akurasi $O(\Delta x^2)$, sehingga

1. *Forward Time*

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T(x, t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} \tag{7.2}$$

2. *Center Space*

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T(x+\Delta x, t) - 2T(x,t) + T(x-\Delta x, t)}{(\Delta x)^2} \tag{7.3}$$

Sistem Grid dari persamaan (7.2) dan (7.3)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \;\; dan \;\; \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{(\Delta x)^2}$$

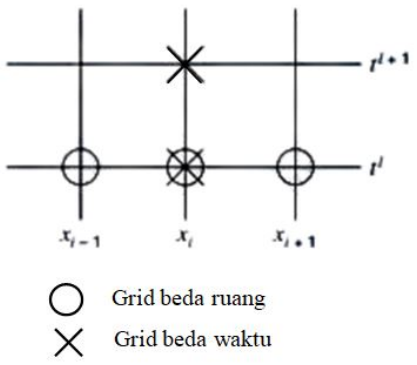
Subtitusikan persamaan di atas ke persamaan (7.1) diperoleh

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} = k \frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{(\Delta x)^2}$$

sehingga dapat disederhanakan menjadi bentuk

$$\begin{aligned} & T_i^{l+1} = T_i^l + \lambda \left(T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l \right) \\ & \text{dengan } \; \lambda = k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}, \;\; i = 1, 2, ..., m, \;\; l = 0, 1, 2, ... \\ & T_0^l = u_L, \;\; T_{m+1}^l = u_R \quad l = 0, 1, 2, ... \\ & T_i^0 = T_0(x_i), \quad i = 1, 2, ..., m \end{aligned} \tag{7.4}$$

Berikut diberikan stencil grid beda ruang x, dan beda waktu t



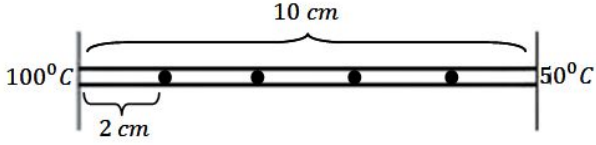
Gambar 7.3: Stencil metode FTCS persamaan (7.4)

Contoh 7.1. *Gunakan metode FTCS untuk menyelesaikan distribusi suhu suatu batang tipis dengan panjang* $10\,cm$*, dengan* $\Delta x = 2\,cm$*, dan* $\Delta t = 0,1\,s$*. Pada* $t = 0$*, suhu batang adalah nol dan batas kondisi tetap untuk semua waktu pada* $T(0) = 100^0\,C$ *dan* $T(10) = 50^0\,C$*. Perhatikan bahwa batang tersebut adalah aluminium dengan termal difusivity* $k = 0,835\,cm^2/s$

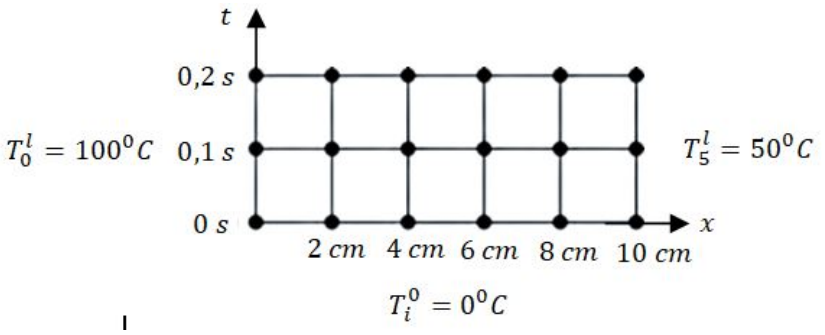
Penyelesaian:
Langkah 1: Tentukan nilai λ

$$\lambda = k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 0,835\,\frac{0.1}{2^2} = 0,020875$$

Langkah 2: Sketsa diskritisasi batang (Gambar 7.4) dan sistem gridnya (Gambar 7.5).



Gambar 7.4: Diskritisasi batang



Gambar 7.5: Sistem grid batang

Langkah 3: Subtitusikan nilai yang diketahui pada persamaan (7.4)

$$T_i^{l+1} = T_i^l + 0.020875\left(T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l\right),\ i = 1, 2, ..., 4, \quad (7.5)$$

$$l = 0, 1, 2, ... \quad (7.6)$$

$$T_0^l = 100,\ \ T_5^l = 50 \quad l = 0, 1, 2, ...$$

$$T_i^0 = 0, \quad i = 1, 2, ..., 4$$

Langkah 4: Gunakan persamaan (7.5) diperoleh

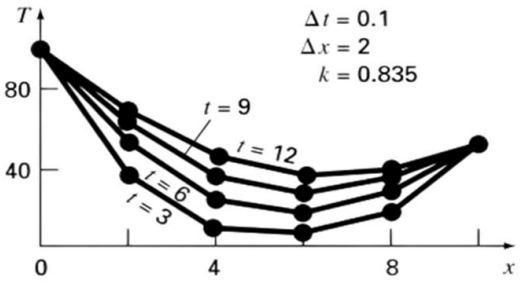
- untuk nilai $t = 0,1\,s$

$$\begin{aligned} T_1^1 &= 0 + 0,020875[02(0) + 100] = 2,0875 \\ T_2^1 &= 0 + 0,020875[02(0) + 0] = 0 \\ T_3^1 &= 0 + 0,020875[02(0) + 0] = 0 \\ T_4^1 &= 0 + 0,020875[502(0) + 0] = 1,0438 \end{aligned}$$

- untuk nilai $t = 0,2\,s$

$$\begin{aligned} T_1^2 &= 2,0875 + 0,020875[02(2,0875) + 100] = 4,0878 \\ T_2^2 &= 0 + 0,020875[02(0) + 2,0875] = 0,043577 \\ T_3^2 &= 0 + 0,020875[1,04382(0) + 0] = 0,021788 \\ T_4^2 &= 1,0438 + 0,020875[502(1,0438) + 0] = 2,0439 \end{aligned}$$

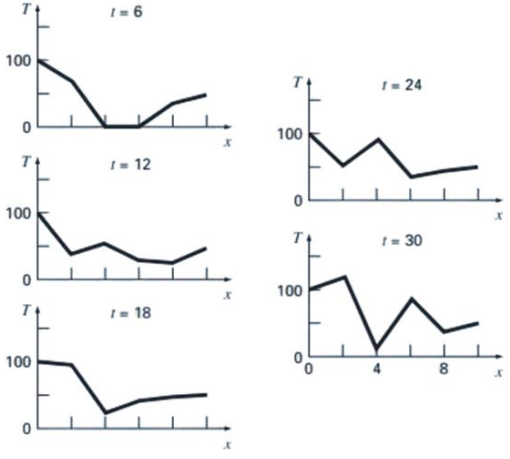
Perhitungan dapat dilanjutkan menggunakan *Matlab* hingga diperoleh grafik distribusi panas pada logam seperti pada Gambar 7.6 berikut.



Gambar 7.6: Distribusi suhu batang metode FTCS

Kekonvergenan dan Kestabilan

Kekonvergenan metode berarti ketika Δx dan Δt mendekati nol, hasil perhitungan teknik metode beda hingga mendekati penyelesaian sesungguhnya. *Kestabilan* metode berarti bahwa nilai *error* pada setiap tahap komputasi tidak diperbesar tetapi semakin mengecil saat proses komputasi berlangsung.



Gambar 7.7: Ilustrasi ketidakstabilan dari Soal Contoh 7.1 dengan nilai $\lambda = 0,735$

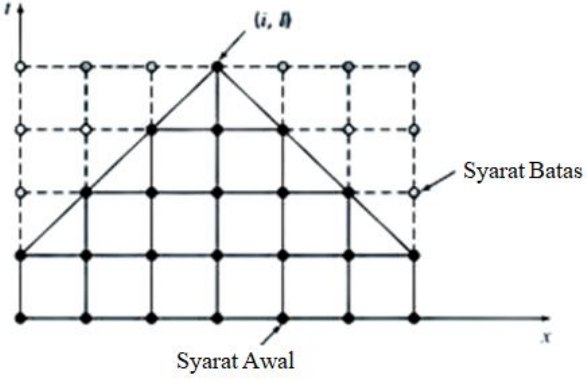
Agar skema stabil maka $|\rho| \leq 1$ yaitu

$$\begin{aligned} |\rho| = &\quad |1 + 2\lambda\,(\cos a\Delta x - 1)| &\leq 1 \\ -1 \leq &\quad 1 + 2\lambda\,(\cos a\Delta x - 1) &\leq 1 \\ -1 \leq &\quad \lambda\,(\cos a\Delta x - 1) &\leq 0 \\ 0 \leq &\quad \lambda\,(1 - \cos a\Delta x) &\leq 1 \\ 0 \leq &\quad 2\lambda \sin^2\left(\tfrac{a\Delta x}{2}\right) &\leq 1 \end{aligned}$$

sehingga $2\lambda \leq 1$. Jadi skema akan stabil jika $\lambda = k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$.
Selain itu, perlu dicatat bahwa jika $\lambda \leq 1/2$ dapat menghasilkan penyelesaian yang stabil dan konvergen tetapi masih berosilasi. Selanjutnya, jika $\lambda \leq 1/4$ maka metode stabil, memiliki penyelesaian konvergen dan tidak berosilasi. Berikutnya, jika $\lambda = 1/6$ metode akan memiliki kekonsistenan dan cenderung meminimalkan kesalahan pemotongan (*truncation error*).

7.1.2 Metode BTCS (*Backward Time Center Space*)

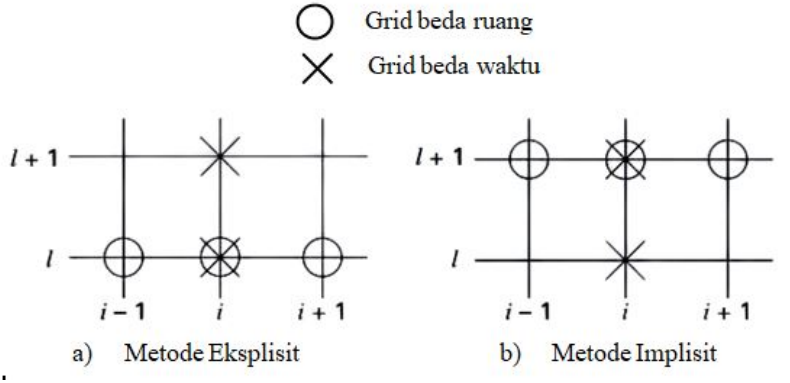
Telah diketahui sebelumnya bahwa metode eksplisit FTCS memiliki limitasi dalam kestabilannya. Berikut diberikan representasi kelemahan grid dari metode FTCS



Gambar 7.8: Limitasi grid metode FTCS

Diperhatikan bahwa Gambar 7.8 merupakan representasi pengaruh titik-titik (nodes) pendekatan beda hingga terhadap titik (i, l) pada metode FTCS. Titik-titik tebal di bawah piramida merupakan titik yang mempengaruhi titik (i, l). Akan tetapi titik yang tidak diarsir,

yang pada kenyataannya mempengaruhi (i, l), dikecualikan. Berikut diberikan perbaikan grid yang diberikan pada metode BTCS.



Gambar 7.9: Stencil metode eksplisit FTCS dan implisit BTCS

Diperhatikan bahwa limitasi metode eksplisit berupa tidak dipengaruhinya titik (i, l) oleh titik-titik di sekitarnya, dapat direduksi oleh metode implisit (BTCS).

1. *Backward Time*

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T(x, t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t}$$

2. *Center Space*

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T(x+\Delta x, t+\Delta t) - 2T(x, t+\Delta t) + T(x-\Delta x, t+\Delta t)}{(\Delta x)^2}$$

Metode BTCS memiliki akurasi $O(\Delta t, \Delta x^2)$. Persamaan beda untuk kasus persamaan (7.1) menggunakan metode BTCS adalah

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} \;\; dan \;\; \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{(\Delta x)^2}$$

Subtitusikan pada Persamaan (7.1) diperoleh

$$\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} = k\frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{(\Delta x)^2}, \;\; i = 1, 2, ..., m, \;\; l = 0, 1, 2, ...$$

Dengan demikian diperoleh persamaan

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + (1+2\lambda)\, T_i^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = T_i^l$$

Untuk interior $i = 1$

$$(1+2\lambda)\, T_i^{l+1} - \lambda T_{i-1}^{l+1} = T_i^l + \lambda u_L \tag{7.7}$$

Untuk interior $i = 2, \cdots, m-1$

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + (1+2\lambda)\, T_i^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = T_i^l \tag{7.8}$$

Untuk interior $i = m$

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + (1+2\lambda)\, T_i^{l+1} = T_i^l + \lambda u_R \tag{7.9}$$

dengan

$$T_i^0 = T_0(x_i) \quad i = 0, 1, 2, ..., m$$

Persamaan (7.7) - (7.9) di atas dapat disusun hingga membentuk sistem persamaan linier (SPL) berbentuk matriks $AT = B$ sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{l+1} \\ T_2^{l+1} \\ T_3^{l+1} \\ \vdots \\ T_{m-1}^{l+1} \\ T_m^{l+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_1^l + \lambda u_L \\ T_2^l \\ T_3^l \\ \vdots \\ T_{m-1}^l \\ T_m^l + \lambda u_R \end{bmatrix}$$

Contoh 7.2. *Gunakan metode BTCS, pendekatan beda hingga, untuk menyelesaikan permasalahan Contoh 7.1.*

Penyelesaian:
Langkah 1-2: Idem dengan Contoh 7.1
Langkah 3: Subtitusikan nilai yang diketahui pada persamaan (7.7). Dengan demikian, untuk $t = 0,1s$ dapat ditulis nilai titik interior pertama adalah

$$\begin{aligned} 1,04175\,T_1^1 - 0,020875\,T_1^2 &= 0 + 0,020875(100) \\ &\text{atau} \\ 1.04175\,T_1^1 - 0,020875\,T_1^2 &= 2,0875 \end{aligned}$$

Apabila disubtitusikan hingga titik ke-m persamaan (7.9) diperoleh matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1,04175 & -0,020875 & 0 & 0 \\ -0,020875 & 1,04175 & -0,020875 & 0 \\ 0 & -0,020875 & 1,04175 & -0,020875 \\ 0 & 0 & -0,020875 & 1,04175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0875 \\ 0 \\ 0 \\ 1,04375 \end{bmatrix}$$

Selesaikan matriks secara simultan, maka dapat diperoleh suhu batang pada $t = 0,1$ adalah

$$\begin{aligned} T_1^1 &= 2,0047 \\ T_2^1 &= 0,0406 \\ T_3^1 &= 0,0209 \\ T_4^1 &= 1,0023 \end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa, hasil perhitungan suhu pada $t = 0,1s$ nilai titik-titik interior jauh berbeda jika dibandingkan antara metode FTCS dan BTCS.
Langkah 4: Selanjutnya, untuk mengetahui suhu batang pada $t = 0,2s$ maka diselesaikan menggunakan matriks

$$\begin{bmatrix} 1,04175 & -0,020875 & 0 & 0 \\ -0,020875 & 1,04175 & -0,020875 & 0 \\ 0 & -0,020875 & 1,04175 & -0,020875 \\ 0 & 0 & -0,020875 & 1,04175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4,09215 \\ 0,04059 \\ 0,02090 \\ 2,04069 \end{bmatrix}$$

diperoleh distribusi suhu batang pada $t = 0,2s$ adalah

$$\begin{aligned} T_1^2 &= 3,9305 \\ T_2^2 &= 0,1190 \\ T_3^2 &= 0,0618 \\ T_4^2 &= 1,9653 \end{aligned}$$

Langkah 5: Dengan demikian, perhitungan dapat dilanjutkan menggunakan *Matlab* hingga $t = \infty$

Kekonvergenan dan Kestabilan
Agar skema stabil maka $|\rho| \leq 1$ yaitu

$$\rho - 1 = 2\lambda\rho\left(\cos\alpha\Delta x - 1\right)$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{1 + 2\lambda\left(1 - \cos\alpha\Delta x\right)} \\ &= \frac{1}{1 + 4\lambda\sin^2(\frac{\alpha\Delta x}{2})} \end{aligned} \tag{7.10}$$

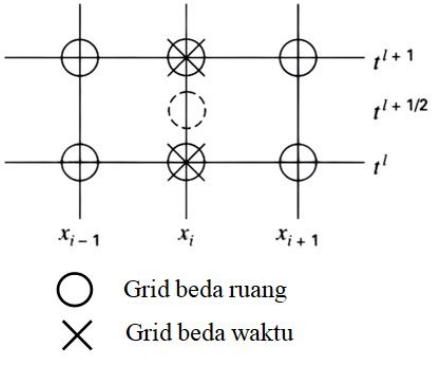
dengan $\lambda = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}$. Persamaan (7.10) menunjukkan bahwa untuk setiap nilai λ dan α, nilai penyebut selalu lebih besar dari pembilangnya, maka nilai $|\rho| \leq 1$. Jadi skema ini selalu stabil untuk setiap nilai λ (*unconditionally stable*).

Walaupun metode implisit BTCS stabil dan konvergen, namun metode ini memiliki kekurangan pada perbedaan keakuratan, aproksimasi beda waktu akurat orde pertama, sedangkan aproksimasi beda ruang akurat orde dua. Berikutnya, akan dibahas lebih lanjut mengenai metode implisit alternatif yang memperbaiki kekurangan tersebut.

7.1.3 Metode Crank-Nicolson

Metode Crank-Nicolson merupakan skema implisit alternatif yang memiliki keakuratan orde dua dalam ruang dan waktu. Dalam hal ini,

pendekatan beda dibangun dengan membuat sebuah titik tengah *dummy* pada dimensi waktu. Dengan kata lain, *center time* diterapkan untuk menghampiri u_t di titik grid $t^{l+\frac{1}{2}}$ pada persamaan konduksi panas 7.1



Gambar 7.10: Stencil metode implisit Crank Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t}$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{(\Delta x)^2}\right)$$

Dengan demikian diperoleh persamaan

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + 2(1+\lambda) T_i^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = \lambda T_{i-1}^l + 2(1-\lambda) T_i^l + \lambda T_{i+1}^l$$

Sehingga,
Untuk interior $i = 1$

$$2(1+\lambda) T_i^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = 2(1-\lambda) T_i^l + \lambda T_{i+1}^l + 2\lambda u_L$$

Untuk interior $i = 2, \cdots, N-2$

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + 2(1+\lambda) T_i^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = \lambda T_{i-1}^l + 2(1-\lambda) T_i^l + \lambda T_{i+1}^l$$

Untuk interior $i = N-1$

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + 2(1+\lambda) T_i^{l+1} = \lambda T_{i-1}^l + 2(1-\lambda) T_i^l + 2\lambda u_R$$

dengan

$$T_i^0 = T_0(x_i) \quad i = 0, 1, 2, ..., N \tag{7.11}$$

Persamaan-persamaan di atas dapat disusun hingga membentuk sistem persamaan linier (SPL) berbentuk matriks $AT = B$ sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 2(1+\lambda) & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 2(1+\lambda) & -\lambda & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 2(1+\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{l+1} \\ T_2^{l+1} \\ T_3^{l+1} \\ \vdots \\ T_{m-1}^{l+1} \\ T_m^{l+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1-\lambda) & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 2(1-\lambda) & \lambda & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \lambda & 1+2\lambda & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 2(1-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^l + \lambda u_L \\ T_2^l \\ T_3^l \\ \vdots \\ T_{m-1}^l \\ T_m^l + \lambda u_R \end{bmatrix}$$

Contoh 7.3. *Gunakan metode implisit alternatif Crank-Nicolson, pendekatan beda hingga, untuk menyelesaikan contoh permasalahan 7.1*

Penyelesaian:
Langkah 1-2: Idem dengan Contoh 7.1
Langkah 3: Subtitusikan nilai yang diketahui pada persamaan (7.7). Dengan demikian untuk $t = 0, 1s$, diperoleh matriks

$$\begin{bmatrix} 2,04175 & -0,020875 & 0 & 0 \\ -0,020875 & 2,04175 & -0,020875 & 0 \\ 0 & -0,020875 & 2,04175 & -0,020875 \\ 0 & 0 & -0,020875 & 2,04175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,175 \\ 0 \\ 0 \\ 2,0875 \end{bmatrix}$$

selesaikan matriks secara simultan, maka dapat diperoleh suhu batang metode Crank-Nicolson pada $t = 0.1$ adalah

$$\begin{aligned} T_1^1 &= 2,0450 \\ T_2^1 &= 0,0210 \\ T_3^1 &= 0,0209 \\ T_4^1 &= 1,0023 \end{aligned}$$

Langkah 4: Selanjutnya, untuk mengetahui suhu batang pada $t = 0,2s$, selesaikan matriks berikut secara simultan

$$\begin{bmatrix} 2,04175 & -0,020875 & 0 & 0 \\ -0,020875 & 2,04175 & -0,020875 & 0 \\ 0 & -0,020875 & 2,04175 & -0,020875 \\ 0 & 0 & -0,020875 & 2,04175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,1801 \\ 0,0841 \\ 0,0427 \\ 4,0901 \end{bmatrix}$$

diperoleh distribusi suhu batang pada $t = 0,2s$ adalah

$$\begin{aligned} T_1^2 &= 4,0073 \\ T_2^2 &= 0,0826 \\ T_3^2 &= 0,0422 \\ T_4^2 &= 2,0036 \end{aligned}$$

Langkah 5: Dengan demikian, perhitungan dapat dilanjutkan menggunakan *Matlab* hingga $t = \infty$

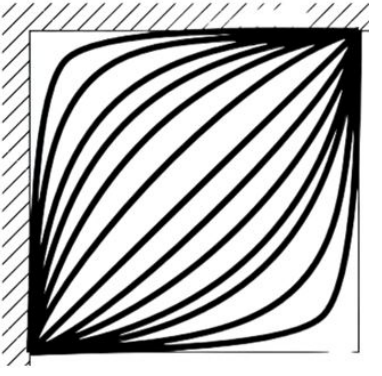
Kekonvergenan dan Kestabilan
Agar skema stabil maka $|\rho| \leq 1$ yaitu

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1+\lambda\left(\cos\alpha\Delta x-1\right)}{1-\lambda\left(\cos\alpha\Delta x-1\right)}\\ \rho &= \frac{1-2\lambda\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right)}{1+2\lambda\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right)}, \quad \lambda=\frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

Dengan demikian nilai $|\rho| \leq 1$ untuk setiap nilai $\lambda > 0$. Jadi skema ini selalu stabil tanpa syarat (*unconditionally stable*).

7.2 Persamaan Eliptik

Berikut diberikan contoh penyelesaian persamaan eliptik menggunakan metode beda hingga yang direpresentasikan oleh persamaan Laplace berupa distribusi panas pada sebuah lempengan logam yang tidak bergantung waktu (Gambar 7.11).

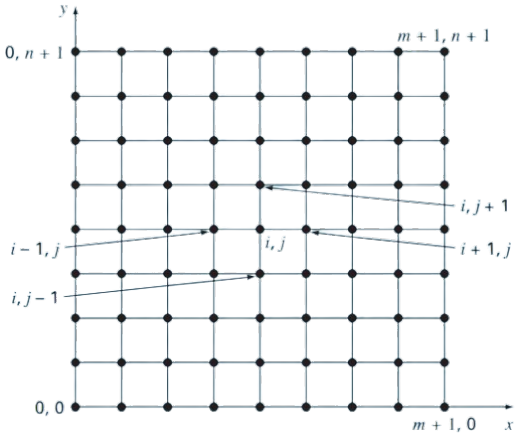


Gambar 7.11: Distribusi panas lempengan logam berbentuk persegi

MSAB Persamaan Laplace dimensi dua tidak bergantung waktu dapat direpresentasikan sebagai

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0, \qquad 0<x<a,\ 0<y<b\\ &T(0,y)=T_L,\ \ T(a,y)=T_R,\ \ 0\leq y\leq b\\ &T(x,0)=T_D,\ \ T(x,b)=T_U,\ \ 0\leq x\leq a\end{aligned} \tag{7.12}$$

Sebelum membahas mengenai jenis penyelesaian metode beda hingga pada PDP eliptik, berikut diberikan sistem grid (Gambar 7.12) yang digunakan untuk menyelesaikan PDP order dua pada persamaan Laplace dimana x dan y merupakan diskritisasi terhadap ruang dengan



Gambar 7.12: Sistem grid persamaan Laplace

$i = 1, 2, ..., m + 1$ $j = 0, 1, 2, ..., n + 1$. Berikut diberikan dua metode beda hingga yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan eliptik

7.2.1 Metode Langsung

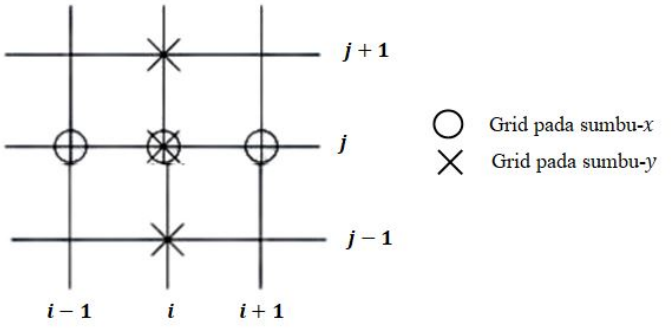
Persamaan Laplace tidak bergantung waktu $T_{xx} + T_{yy} = 0$ pada domain D menerapkan metode beda pusat atau beda tengah (*center space*) untuk T_{xx} dan T_{yy} dengan akurasi $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$, sehingga

1. *Center Space* untuk x

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} = \frac{T(x + \Delta x, y) - 2T(x,y) + T(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \quad (7.13)$$

2. *Center Space* untuk y

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = \frac{T(x, y + \Delta y) - 2T(x,y) + T(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \quad (7.14)$$



Gambar 7.13: Stencil persamaan Laplace

Sistem Grid dari Persamaan (7.13) dan (7.14)

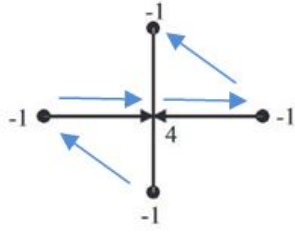
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}\end{aligned}$$

Apabila disubtitusikan pada persamaan Laplace (7.12) maka diperoleh

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

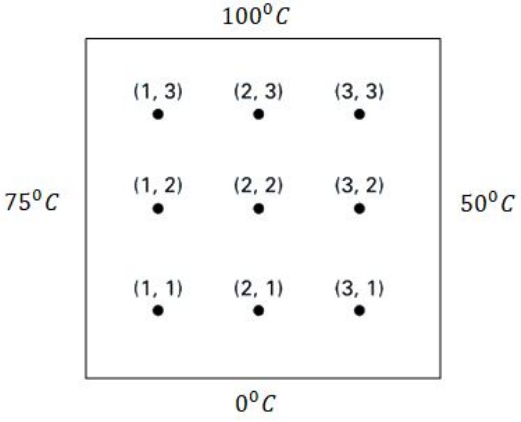
Untuk permasalahan dengan bentuk persegi dengan $\Delta x = \Delta y$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}4T_{i,j} - T_{i+1,j} - T_{i-1,j} - T_{i,j+1} - T_{i,j-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow -T_{i,j-1} - T_{i-1,j} + 4T_{i,j} - T_{i+1,j} - T_{i,j+1} &= 0 \qquad (7.15)\end{aligned}$$



Gambar 7.14: Alur Bobot Persamaan (7.15)

Contoh 7.4. *Diberikan suatu lempengan logam tipis berbentuk persegi. Di setiap sisinya, memiliki tingkat panas dengan suhu yang dijaga tetap konstan dimana suhu masing-masing sisi direpresentasikan oleh Gambar 7.15.*



Gambar 7.15: Lempengan Logam yang Dipanaskan

Dengan diskritisasi 3×3*, tentukan distribusi suhu pada permukaan lempengan di setiap titik.*

Penyelesaian:
Langkah 1: Subtitusikan titik-titik yang akan dicari nilainya pada persamaan (7.15)

- untuk titik $(1, 1)$

$$-T_{1,0} - T_{0,1} + 4T_{1,1} - T_{2,1} - T_{1,2} = 0$$

diketahui bahwa nilai $T_{1,0} = 0$ dan $T_{0,1} = 75$, dengan demikian diperoleh

$$4T_{1,1} - T_{2,1} - T_{1,2} = 75$$

- untuk titik $(2, 1)$

$$-T_{2,0} - T_{1,1} + 4T_{2,1} - T_{3,1} - T_{2,2} = 0$$

diketahui bahwa nilai $T_{2,0} = 0$ dengan demikian diperoleh

$$-T_{1,1} + 4T_{2,1} - T_{3,1} - T_{2,2} = 0$$

Langkah 2: Proses ini dilanjutkan untuk seluruh titik interior hingga $T_{3,3}$. Dengan demikian terbentuklah sistem persamaan linier (SPL) dengan 9 peubah tak diketahui

Langkah 3: Sistem persamaan linier (SPL) yang telah terbentuk, diubah ke bentuk persamaan matriks $AT = B$ sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{1,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,1} \\ T_{2,2} \\ T_{2,3} \\ T_{3,1} \\ T_{3,2} \\ T_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 0 \\ 50 \\ 75 \\ 0 \\ 50 \\ 175 \\ 100 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Langkah 4: Menggunakan teknik invers matriks $T = A^{-1}B$, Nilai $T_{1,1}$ hingga $T_{3,3}$ dapat ditentukan nilainya secara simultan

penyelesaian numerik dari persamaan Laplace umumnya melibatkan SPL yang lebih besar ukurannya dibanding contoh 7.4. Misalnya diskritisasi 10×10 akan menghasilkan sebanyak 100 persamaan untuk diselesaikan, sehingga diperoleh nilai dari tiap titik diskritisasi berupa nilai peubah yang akan dicari hasilnya.

7.2.2 Metode Iterasi

Metode berikutnya untuk menyelesaikan persamaan Laplace (7.12) adalah metode iterasi.

Perlu diperhatikan bahwa untuk diskritisasi titik yang lebih banyak pada domain, maka akan menghasilkan ukuran matriks yang sangat besar. Metode langsung bekerja dengan mengeliminasi matriks berukuran besar dan mengandung banyak nilai nol pada matriks tersebut. Hal ini akan menyebabkan perhitungan memori komputer menjadi tidak efektif, dengan demikian metode pendekatan secara iterasi dapat dijadikan sebagai alternatif menyelesaikan SPL yang berukuran besar.

Metode iterasi yang efektif dan sering digunakan adalah Metode Iterasi *Gauss-Seidel*. Apabila metode ini digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada PDP metode ini sering dikenal sebagai Metode Liebmann.

Persamaan (7.15) dapat diekspresikan menjadi bentuk persamaan sebagai berikut

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \tag{7.16}$$

untuk $j = 1...n$ dan $i = 1...m$ karena Persamaan 7.15 dominan diagonal, maka akan menghasilkan suatu penyelesaian yang stabil dan konvergen. Selanjutnya, untuk mempercepat perhitungan, dapat digunakan faktor pengali relaksasi (*Gauss-Seidel Overrelaxation*) sebagai berikut

$$T_{i,j}^{new} = \lambda T_{i,j}^{new} + (1 - \lambda) T_{i,j}^{old} \tag{7.17}$$

dimana $T_{i,j}^{new}$ dan $T_{i,j}^{old}$ berturut-turut merupakan nilai titik yang sedang dicari dan nilai titik dari iterasi sebelumnya. Nilai λ merupakan faktor pengali relaksasi yang berada di interval $[1, 2]$. Perhitungan dihentikan ketika diperoleh nilai error relatif lebih kecil dari nilai toleransi yang diberikan. Perhitungan Error reltif dapat dihitung dengan formula sebagai berikut

$$|\epsilon_{i,j}| = \left| \frac{T^{new} - T^{old}}{T^{new}} \right| \times 100\% \tag{7.18}$$

Contoh 7.5. *Gunakan metode iterasi (Metode Liebmann) untuk menyelesaikan masalah lempengan logam tipis yang dipanaskan pada Contoh Soal 7.4 yang direpresentasikan oleh Gambar 7.14. Dengan diskritisasi* 3×3*, tentukan distribusi suhu pada permukaan lempengan di setiap titiknya. Gunakan faktor pengali relaksasi* $1,5$ *dengan toleransi nilai error relatif* 1%

Penyelesaian:
Langkah 1: Tentukan nilai tebakan awal di setiap titik yaitu nilai $T_{1,1}, T_{1,2}, ..., T_{3,3}$ bernilai 0

Langkah 2: Kerjakan iterasi pertama terlebih dahulu. Selesaikan persamaan (7.16)-(7.17) dengan mensubtitusikan nilai batas yaitu $T_{i,0} = 0$ $T_{i,n+1} = 100$, $T_{0,j} = 75$, dan $T_{m+1,j} = 50$ dan tebakan awal Langkah 1 untuk mengetahui nilai di tiap titik diskritisasi

Iterasi Pertama

- untuk $T_{1,1}$
  Menggunakan Persamaan (7.16) diperoleh

$$T_{1,1} = \frac{0 + 75 + 0 + 0}{4} = 18,75 \tag{7.19}$$

dengan faktor pengali relaksasi $1,5$ dan nilai dari persamaan (7.19) diperoleh

$$T_{1,1} = 1,5(18,75) + (1-1,5)0 = 28,125 \tag{7.20}$$

- untuk $T_{2,1}$ gunakan nilai $T_{1,1}$ yang telah diperoleh

$$\begin{aligned} T_{2,1} &= \frac{0 + 28.125 + 0 + 0}{4} = 7,03125 \\ T_{2,1} &= 1,5(7,03125) + (1-1.5)0 = 10,54688 \end{aligned}$$

- untuk $T_{3,1}$ gunakan nilai $T_{2,1}$ yang telah diperoleh

$$\begin{aligned} T_{3,1} &= \frac{50 + 10,54688 + 0 + 0}{4} = 15,13672 \\ T_{3,1} &= 1,5(15,13672) + (1-1.5)0 = 22.70508 \end{aligned}$$

perhitungan di titik berikutnya, diperoleh nilai

$$\begin{array}{lll} T_{1,2} = 38,67188 & T_{2,2} = 18,45703 & T_{3,2} = 34,18579 \\ T_{1,3} = 80,12696 & T_{2,3} = 74.469003 & T_{3,3} = 96,99554 \end{array}$$

Langkah 3: Gunakan kembali persamaan (7.16)-(7.17) untuk mencari nilai titik di iterasi berikutnya, hingga diperoleh nilai:

Iterasi kedua

$$\begin{array}{lll} T_{1,1} = 32,51953 & T_{2,1} = 22,35718 & T_{3,1} = 28,60108 \\ T_{1,2} = 57,95288 & T_{2,2} = 61,63333 & T_{3,2} = 71,86833 \\ T_{1,3} = 75,21973 & T_{2,3} = 87,95872 & T_{3,3} = 67,68736 \end{array}$$

Langkah 3: Tentukan nilai error relatif antara perhitungan di iterasi pertama dan kedua menggunakan persamaan (7.16)

$$\begin{aligned} |\epsilon_{1,1}| &= \left|\frac{32,51953 - 28,12500}{32,51953}\right| \times 100\% = 13,5\% \\ |\epsilon_{2,1}| &= \left|\frac{22,35718 - 10,54688}{22,35718}\right| \times 100\% = 52\% \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pada iterasi kedua didapatkan bahwa nilai error belum memenuhi kriteria toleransi error yaitu 1%.

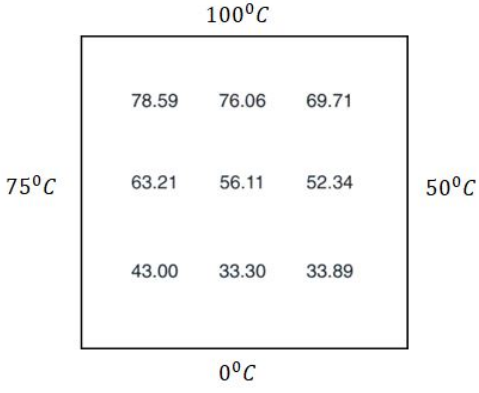
Langkah 4: Lanjutkan iterasi menggunakan komputer hingga diperoleh

nilai error maksimal dari $T_{1,1}$ hingga $T_{3,3}$ kurang dari batas toleransi error. Pada permasalahan ini, di iterasi kesembilan diperoleh nilai error maksimal dari tiap titik adalah $0,71\%$. Dengan demikian, proses iterasi dapat dihentikan. Berikut adalah ditribusi suhu lempengan logam di setiap titik pada iterasi kesembilan

Iterasi Kesembilan

$T_{1,1} = 43,00061$ $T_{2,1} = 33,29755$ $T_{3,1} = 33,8850$
$T_{1,2} = 63,21152$ $T_{2,2} = 56,11238$ $T_{3,2} = 52,3399$
$T_{1,3} = 78,58718$ $T_{2,3} = 76,06402$ $T_{3,3} = 69,7105$

Gambar 7.16 berikut merupakan gambar distribusi suhu pada lempengan logam yang dipanaskan, sepanjang sumbu-xy pada kondisi *steady*



Gambar 7.16: Distribusi suhu pada lempengan yang dipanaskan

7.3 Rangkuman

1. Metode *Forward Time Center Space* (FTCS) sering disebut sebagai metode eksplisit. Metode beda maju (*forward time*) diterapkan pada u_t dengan nilai error $O(\Delta t)$ dan metode beda tengah (*center space*) yang diterapkan pada u_{xx} dengan akurasi $O(\Delta x^2)$. Sistem grid untuk persamaan panas dengan menggunakan metode FTCS adalah

$$T_i^{l+1} = T_i^l + \lambda \left(T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l \right)$$

$$\text{dengan } \lambda = k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad l = 0, 1, 2, ...$$

2. Metode *Backward Time Center Space* (BTCS) memiliki akurasi $O(\Delta t, \Delta x^2)$. Sistem grid untuk persamaan panas dengan menggunakan metode BTCS adalah

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + (1+2\lambda)\, T_i^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = T_i^l$$
$$\text{dengan } \lambda = k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2},\ \ i = 1, 2, ..., m,\ \ l = 0, 1, 2, ...$$

3. Metode Crank-Nicolson merupakan skema implisit alternatif yang memiliki keakuratan orde dua dalam ruang dan waktu. Dalam hal ini, pendekatan beda dibangun dengan membuat sebuah titik tengah *dummy* pada dimensi waktu. Dengan kata lain, *center time* diterapkan untuk menghampiri u_t di titik grid $t^{l+\frac{1}{2}}$ pada persamaan konduksi panas. Sistem grid untuk persamaan panas dengan menggunakan metode Crank-Nicolson adalah

$$-\lambda T_{i-1}^{l+1} + 2\,(1+\lambda)\, T_i^{l+1} - \lambda T_{i+1}^{l+1} = \lambda T_{i-1}^{l} + 2\,(1-\lambda)\, T_i^{l} + \lambda T_{i+1}^{l}$$

dengan

$$\lambda = k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2},\ \ i = 1, 2, ..., m,\ \ l = 0, 1, 2, ...$$

4. Persamaan Laplace tidak bergantung waktu $T_{xx} + T_{yy} = 0$ pada domain D menerapkan metode beda pusat atau beda tengah (*center space*) untuk T_{xx} dan T_{yy} dengan akurasi $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$. Persamaan beda untuk persamaan Laplace adalah

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

5. Metode iterasi yang efektif dan sering digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada PD Eliptik sering dikenal sebagai Metode Liebmann. Berikut iterasi perhitungan Metode Liebmann

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

untuk $j = 1...n$ dan $i = 1...m$ dengan faktor pengali relaksasi sebagai berikut

$$T_{i,j}^{new} = \lambda T_{i,j}^{new} + (1-\lambda) T_{i,j}^{old}$$

7.4 Soal-soal Latihan

1. Diketahui MSAB tipe Parabolik berupa Persamaan Panas/Difusi sebagai berikut

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \;\; t > 0 \\ &T(0,t) = u_L, \qquad T(L,t) = u_R \\ &T(x,0) = T_0(x) \end{aligned}$$

   Formulasikan persamaan panas dengan menentukan nilai L, u_L, u_R dan T_0 berupa konstanta.

   - Selesaikan secara analitik (menggunakan penyelesaian steady state dan transient)
   - Selesaikan secara numerik dengan metode BTCS, FTCS dan Crank Nicolson menggunakan MATLAB ($\lambda \leq \frac{1}{4}$)

2. Diketahui MSAB tipe Eliptik berupa Persamaan Laplace steady sebagai berikut

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < a, \;\; 0 < y < b \\ &T(0,y) = T_L, \;\; T(a,y) = T_R, \;\; 0 \leq y \leq b \\ &T(x,0) = T_D, \;\; T(x,b) = T_U, \;\; 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

   Formulasikan persamaan panas dengan menentukan nilai T_L, T_R, T_D dan T_U berupa konstanta.

   - Selesaikan secara analitik
   - Selesaikan secara numerik dengan metode langsung dan tulis bagaimana proses matriks terbentuk (grid 9 titik interior), gunakan MATLAB untuk menentukan suhu di setiap titik interiornya
   - Selesaikan secara numerik dengan metode iterasi (9 titik interior) menggunakan faktor pengali relaksasi $1,5$. Tuliskan prosesnya sampai 2 iterasi beserta errornya di tiap titik, gunakan MATLAB untuk menentukan suhu di setiap titik interiornya dengan nilai error 1%

7.5 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu dalam menyelesaikan MSAB Persamaan Panas Dimensi Satu sebagai berikut

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 5, \;\; t > 0 \\
&T(0,t) = -8, \qquad T(5,t) = 4 \\
&T(x,0) = 2x - 8
\end{aligned}$$

dengan menggunakan metode beda hingga FTCS, BTCS dan Crank-Nicolson dan dengan mengambil $\Delta x = 1$ dan $\Delta t = 0,3$. Hitung nilai pendekatan interior T untuk $t = 0,3s$ dan $t = 0,6s$

7.6 Daftar Rujukan

1. J. David Logan, 2015, *Applied Partial Differential Equations*, 3rd, Springer International Publishing Switzerland

2. David Borthwick , 2016, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer International Publishing Switzerland

3. Valery Serov, 2017, *Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics*, Springer International Publishing Switzerland

4. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale , 2010, *Numerical Method for Engineers Sixth Edition*, The McGraw-Hill Companies, Inc, New York

Bibliografi

[1] Rusli Hidayat, 2006, *Persamaan Diferensial Parsial*, Jember: UPT Penerbitan Universitas Jember

[2] Jurgen Jost, 2013, *Partial Differential Equations*, 3rd, New York: Springer Science+Business Media

[3] Peter J. Olver, 2014. *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer International Publishing Switzerland

[4] J. David Logan, 2015, *Applied Partial Differential Equations*, 3rd, Springer International Publishing Switzerland

[5] David Borthwick , 2016, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer International Publishing Switzerland

[6] N.W. McLachlan , 2016, *Laplace Transforms and Their Applications to Differential Equations*, United States: Dover Publications

[7] Valery Serov, 2017, *Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics*, Springer International Publishing Switzerland

[8] Steven C. Chapra, Raymond P. Canale , 2010, *Numerical Method for Engineers Sixth Edition*, The McGraw-Hill Companies, Inc, New York

[9] Victor Ivrii, 2021, *Partial Differential Equations*, Department of Mathematics, University of Toronto

Glosarium

M

Masalah nilai awal masalah yang melibatkan satu atau lebih fungsi yang tidak diketahui beserta turunan-turunannya dalam sebuah persamaan yang memenuhi syarat awal yang diberikan.

Masalah syarat batas persamaan diferensial yang dilengkapi dengan kondisi yang melibatkan nilai-nilai penyelesaian dan/atau turunannya di dua titik atau lebih.

Masalah nilai awal dan nilai batas masalah yang terdiri dari suatu persamaan differensial yang dilengkapi dengan syarat awal dan syarat batas.

O

Orde persamaan diferensial orde tertinggi turunan yang muncul pada persamaan diferensial.

P

Persamaan diferensial persamaan yang memuat turunan (derivatif) satu atau lebih peubah tak bebas (peubah terikat) terhadap satu atau lebih peubah bebas suatu fungsi.

Persamaan diferensial biasa persamaan diferensial yang tergantung hanya pada satu peubah bebas.

Persamaan diferensial parsial persamaan diferensial yang tergantung pada dua atau lebih peubah bebas.

Penyelesaian umum persamaan diferensial penyelesaian persamaan diferensial yang mengandung konstanta/fungsi sebarang yang banyaknya sama dengan orde (tingkat) dari persamaan diferensial tersebut.

Penyelesaian khusus persamaan diferensial penyelesaian persamaan diferensial yang diperoleh dari penyelesaian umum persamaan diferensial jika konstanta/fungsi sebarangnya dinyatakan secara khusus.

S

Sistem persamaan diferensial kumpulan dari beberapa persamaan diferensial yang saling berkaitan dan konsisten.

Indeks

Backward Time Center Space, 138
Bentuk kanonik, 21
BTCS, 138

Center Space, 134, 139

Derajat persamaan diferensial, 3
Deret
    cosinus Fourier, 82
    Fourier, 80
    sinus Fourier, 82

FTCS, 134
Fungsi eigen, 86

Koefisien Fourier, 80
Kurva karakteristik, 21

linier, 4

Masalah
    syarat awal, 73
    syarat batas, 73
Metode
    beda hingga, 12, 132
    BTCS, 138
    Crank Nicolson, 142
    FTCS, 134
    integral langsung, 6
    iterasi, 150
    Liebmann, 150
    pemisahan peubah, 9
    pemisalan, 8
    transformasi, 12
MSA, 73
MSB, 73

Nilai eigen, 86
nonlinier, 4

Orde persamaan diferensial, 3

Penyelesaian
    khusus, 6
    lengkap, 27
    persamaan diferensial, 6
    umum, 6
Persamaan
    Burger, 3
    dapat direduksi, 51
    Diferensial Parsial, 2
    eikonal, 3
    eliptik, 5
    hiperbolik, 5
    homogen, 4
    Hunter-Saxton, 3
    Korteweg-deVries, 3
    nonhomogen, 4
    parabolik, 5
    singular, 28
    telegraf, 3
    tidak dapat direduksi, 54
    transpor, 3

SA, 72
SB, 73

Syarat
awal, 72
batas, 73

Transformasi
Laplace, 110
Laplace invers, 118

Biografi Penulis

Firdaus Ubaidillah lahir di Lamongan tanggal 6 Juni 1970, menempuh pendidikan dasar di SD Alun-alun II Lamongan dan SD Dinoyo III Malang, pendidikan menengah di MTsN Malang II dan MAN Malang II Batu. Tahun 1989 melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya (UB) Malang lulus tahun 1994. Studi S2 ditempuh di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Institut Teknologi Bandung (ITB) lulus tahun 2004. Pendidikan S3 di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta memperoleh gelar Doktor bidang matematika tahun 2016.

Dalam kesehariannya, penulis aktif mengajar di prodi S1 dan S2 Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember dengan matakuliah yang diampu adalah Kalkulus, Analisis Real, Fungsi Peubah Kompleks, Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Aljabar Linear, Analisis Numerik dan lain-lain. Selain buku Persamaan Diferensial Parsial, karya buku lain yang telah ditulis adalah Kalkulus Fungsi Satu Peubah (2018), Analisis Kompleks (2019), Kalkulus Integral (2019), Persamaan Diferensial Biasa (2020), dan Analisis Real (2021).

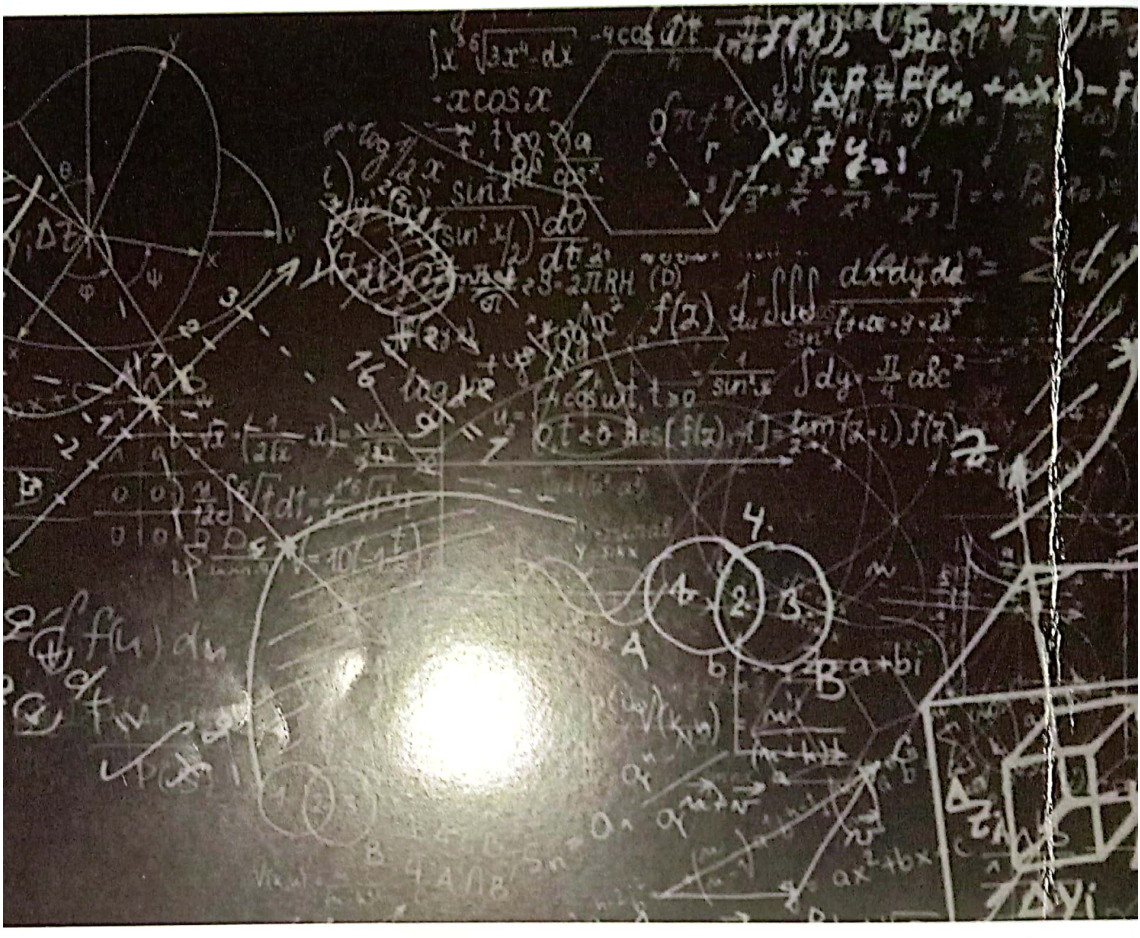
Millatuz Zahroh lahir di Jember tanggal 15 April 1993, menempuh pendidikan dasar di SDN Tembokrejo 1, pendidikan menengah di SMPN 1 Kencong dan SMAN 1 Jember. Tahun 2010 melanjutkan studi S1 di Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember (UNEJ) lulus tahun 2014. Studi S2 ditempuh di Jurusan Matematika (Matematika Terapan) FMIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta.

Penulis aktif mengajar di prodi S1 Jurusan Matematika, Fakultas MIPA dan beberapa Jurusan lain di Universitas Jember. Matakuliah yang diampu diantaranya Kalkulus, Kalkulus Lanjut, Kalkulus Multivariabel, Geometri, Geometri Analitik, Persamaan Diferensial Biasa,

Persamaan Diferensial Parsial, Metode Numerik, Aljabar Linier Numerik dan lain-lain.

Moh. Hasan lahir di Malang pada tanggal 4 April 1964. Menyelesaikan pendidikan jenjang S1 di Universitas Jember pada tahun 1987 dalam bidang Pendidikan Matematika. Pendidikan Jenjang S2 (bidang Matematika) dan S3 (bidang Matematika Terapan) masing-masing diperoleh dari The University of Western Australia, Australia (1995) dan Wageningen University, Belanda (2003).

Aktif sebagai abdi negara di Universitas Jember sejak tahun 1988. Mengawali karirnya sebagai dosen di FKIP hingga tahun 1996, medan pengabdian selanjutnya di Jurusan Matematika FMIPA hingga sekarang. Dalam dharma pendidikan, akhir-akhir ini ditugaskan untuk mengampu beberapa matakuliah, antara lain: Metode Numerik, Persamaan Diferensial, Pemodelan Matematika, dan Sistem Dinamik. Salah satu buku yang pernah ditulis berjudul Metode Simulasi Dinamika Molekul: From the beginning to the Real Applications yang diterbitkan oleh UNEJ Pres (2019).



Anggota APPTI No. 002.115.1.05.2020
Anggota IKAPI No. 127/JTI/2018

Jember University Press
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
Telp. 0331-330224. psw. 0319
E-mail: upt-penerbitan@unej.ac.id

ISBN 978-623-477-050-0

Dipindai dengan CamScanner