Biografi Penulis

Firdaus Ubaidillah lahir di Lamongan tanggal 6 Juni 1970, menempuh Pendidikan Dasar di SD Alun-alun II Lamongan dan SD Dinoyo III Malang. Pendidikan Menengah di MTsN Malang II dan MAN Malang II Batu. Tahun 1989 melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya (UB) Malang lulus tahun 1994. Studi S2 ditempuh di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Institut Teknologi Bandung (ITB) lulus tahun 2004. Pendidikan S3 ditempuh di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta dan memperoleh gelar Doktor bidang matematika tahun 2016.

Dalam kesehariannya, penulis aktif mengajar di prodi S1 dan S2 Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember dengan matakuliah yang diampu adalah Kalkulus, Analisis Real, Fungsi Peubah Kompleks, Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Aljabar Linier, Metode Numerik, dan lain-lain. Selain buku Kalkulus Peubah Banyak, karya buku lain yang telah ditulis adalah Kalkulus Fungsi Satu Peubah (2018), Analisis Kompleks (2019), Kalkulus Integral (2019), Persamaan Diferensial Biasa (2020), Analisis Real (2021), dan Persamaan Diferensial Parsial (2023).

Anggota APPTI No. 002.115.1.05.2020
Anggota IKAPI No. 127/JTI/2018

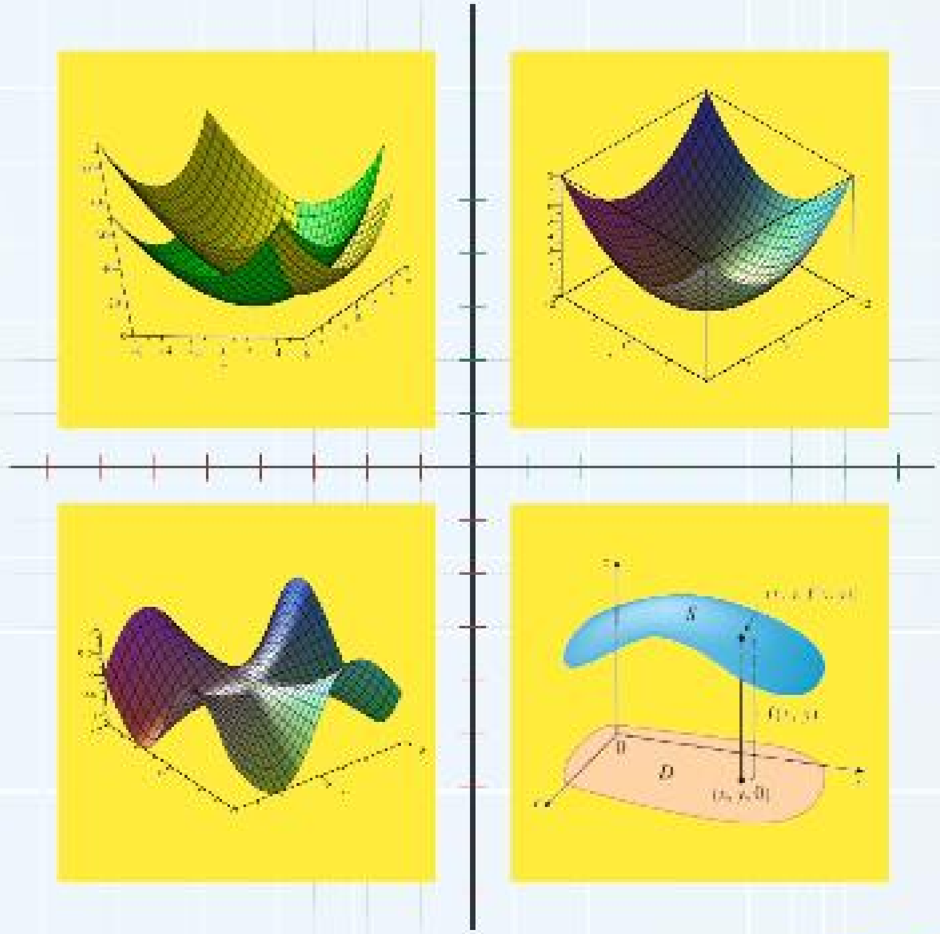
Jember University Press
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
Telp. 0331-330224. psw. 0319
***E-mail:* upt-penerbitan@unej.ac.id**

KALKULUS PEUBAH BANYAK

Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.

KALKULUS PEUBAH BANYAK

Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.



KALKULUS
PEUBAH BANYAK

Disusun oleh:
Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si, M.Si

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN IPA
UNIVERSITAS JEMBER
2024

KALKULUS PEUBAH BANYAK

Penulis:
Firdaus Ubaidillah

Cetakan Pertama: Januari 2024

ISBN: 978-623-477-137-4

Penerbit:
UPA Penerbitan Universitas Jember

Redaksi:
Jl. Kalimantan 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip 00319
e-mail : upt-penerbitan@unej.ac.id

Distributor Tunggal:
UNEJ Press
Jl. Kalimantan 37
Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip 0319
e-mail : upt-penerbitan@unej.ac.id

Kata Pengantar

Puji dan syukur kita panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan nikmat, rahmat, dan hidayahNya sehingga kita dapat beraktivitas sesuai dengan apa yang telah direncanakan. Shalawat beserta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita nabi Muhammad SAW.

Penyusunan buku ajar Kalkulus Peubah Banyak ini dimulai dengan mengenalkan ruang $\mathbb{R}^n$ dan topologi di dalamnya. Setelah itu dikenalkan pengertian fungsi peubah banyak bernilai real. Fungsi peubah banyak yang dibahas secara khusus adalah fungsi dua peubah dan tiga peubah bernilai real, mengingat domain dari kedua fungsi itu masih bisa digambarkan dalam ruang dimensi dua dan tiga. Dalam penjabaran Kalkulus Peubah Banyak, Anda akan diajak untuk mengenali fungsi peubah banyak bernilai real, domain, range, dan grafik fungsi. Kemudian dikenalkan limit fungsi peubah banyak dan kekontinuan fungsi. Berikutnya dikenalkan turunan parsial fungsi peubah banyak yang mana turunan parsial ini tidak dikenal pada fungsi satu peubah. Menentukan titik-titik kritis fungsi peubah banyak dalam kaitannya untuk menentukan nilai maksimum dan minimum. Terdapat integral tentu pada fungsi peubah banyak yang terdefinisi pada suatu luasan atau pada benda pejal yang merupakan perluasan konsep dari integral Riemann dari fungsi satu peubah yang terdefinisi pada suatu selang. Pada buku Kalkulus Peubah Banyak ini, banyak diberikan contoh soal dan penyelesaiannya dari hal sederhana hingga yang rumit. Dengan demikian, saya merekomendasikan buku ajar ini bisa juga digunakan oleh mahasiswa di luar program studi matematika misalkan dari program studi fisika, teknik pertanian, program-program studi di fakultas teknik, ekonomi, dan lain-lain.

Secara umum, Anda akan menemukan bahwa penyajian materi dalam buku ajar ini mengikuti alur penyajian pada perkuliahan Kalkulus Peubah Banyak di kelas. Dengan demikian, bisa dikatakan bahwa untuk memahami materi perkuliahan Kalkulus Peubah Banyak perlu mempelajari buku ajar ini.

Selain pembahasan materinya yang disajikan secara terstruktur, buku ajar ini juga dilengkapi dengan rangkuman materi, bahan diskusi, dan soal-soal latihan yang dikolaborasikan dengan hasil-hasil penelitian yang dapat Anda gunakan untuk mengetahui sejauh mana

Anda memahami materi yang telah dipelajari di tiap-tiap bab yang diberikan.

Jember, September 2023
Dr. Mohammad Fatekurrohman, S.Si., M.Si.

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya sehingga penulisan buku ajar **Kalkulus Peubah Banyak** ini dapat diselesaikan dengan baik tanpa kendala yang berarti. Tidak lupa, ucapan terima kasih disampaikan kepada rekan-rekan dosen tim pengajar matakuliah Kalkulus Peubah Banyak di Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah ikut memberikan kontribusi dalam penulisan buku ajar ini.

Kalkulus Peubah Banyak (MAM1309) merupakan matakuliah wajib semester ketiga pada program studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember semenjak diberlakukan Kurikulum 2017, terdiri dari 3 sks (3 sks kuliah tanpa praktikum). Matakuliah ini mempunyai prasyarat mahasiswa telah menempuh matakuliah Kalkulus (MAU1101) dan Kalkulus Lanjut (MAM1205).

Buku ajar Kalkulus Peubah Banyak ini ditulis untuk digunakan pada perkuliahan Kalkulus Peubah Banyak di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, meskipun tidak menutup kemungkinan bisa dipakai pada perkuliahan di program studi lain bahkan di luar fakultas MIPA. Penyusunan buku ajar ini dalam rangka untuk mengefektifkan proses pembelajaran. Pada proses pembelajaran di kelas, biasanya dosen menjelaskan perkuliahan dengan mencatat atau melalui media presentasi atau bahkan video. Mahasiswa umumnya menyalin catatan tersebut sambil menyimak dan mengikuti penjelasan dosen. Proses pembelajaran lebih banyak mendengarkan ceramah dari dosen.

Fungsi dari buku ajar ini, untuk dosen digunakan dalam menjelaskan materi kuliah, sedangkan untuk mahasiswa sebagai pengganti catatan kuliah. Oleh karena itu waktu pembelajaran di kelas dapat digunakan lebih efektif untuk caramah dan diskusi. Pada buku ajar ini, diberikan banyak contoh soal yang dilengkapi dengan penyelesaiannya. Harapannya soal-soal yang diberikan di tiap akhir bab dapat diselesaikan oleh mahasiswa sebagai alat ukur keberhasilan memahami materi, begitu juga bahan diskusi yang sudah diberikan di tiap bab.

Buku ajar ini dalam penyusunannya didasarkan pada beberapa buku teks mutakhir yang digunakan seperti dituliskan dalam Bibliografi (Daftar Pustaka). Semoga buku ajar ini dapat berguna untuk meningkatkan kualitas pembelajaran matakuliah Kalkulus Peubah Banyak, terlebih khusus di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Jember, September 2023
Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar **iii**

Prakata **v**

Daftar Isi **vii**

Daftar Tabel **xi**

Daftar Gambar **xiv**

Tinjauan Matakuliah **xv**

1 Fungsi Peubah Banyak **1**
- 1.1 Ruang $\mathbb{R}^n$ 3
- 1.2 Fungsi Dua Peubah 7
- 1.3 Fungsi Tiga Peubah atau Lebih 14
- 1.4 Kurva dan Permukaan Ketinggian 15
- 1.5 Permukaan 18
- 1.6 Fungsi Simetri 23
- 1.7 Rangkuman 25
- 1.8 Latihan Soal 27
- 1.9 Bahan Diskusi 29
- 1.10 Daftar Rujukan 30

2 Limit dan Kekontinuan **31**
- 2.1 Limit Fungsi 32
- 2.2 Kekontinuan Fungsi 38
- 2.3 Rangkuman 43
- 2.4 Latihan Soal 45
- 2.5 Bahan Diskusi 47

2.6 Daftar Rujukan 48

3 Turunan Parsial dan Keterdiferensialan 49

3.1 Turunan Parsial 50
3.2 Turunan Parsial Tingkat Tinggi 56
3.3 Bidang Singgung dan Hampiran Linier 60
3.4 Rangkuman 65
3.5 Latihan Soal 68
3.6 Bahan Diskusi 70
3.7 Daftar Rujukan 70

4 Aturan Rantai dan Turunan Berarah 71

4.1 Aturan Rantai 72
4.2 Turunan Fungsi Implisit 75
4.3 Turunan Berarah 77
4.4 Rangkuman 82
4.5 Latihan Soal 84
4.6 Bahan Diskusi 85
4.7 Daftar Rujukan 85

5 Maksimum dan Minimum 87

5.1 Ekstrim Relatif/Lokal 88
5.2 Maksimum dan Minimum Mutlak 92
5.3 Metode Pengali Lagrange 94
5.4 Rangkuman 98
5.5 Latihan Soal 100
5.6 Bahan Diskusi 101
5.7 Daftar Rujukan 101

6 Integral Lipat Dua 103

6.1 Integral Lipat Dua atas Persegipanjang 104
6.2 Integral Berulang 107
6.3 Integral Lipat Dua atas Daerah Umum 111
6.4 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar 118
6.5 Aplikasi Integral Lipat Dua 120
6.6 Rangkuman 122
6.7 Latihan Soal 125
6.8 Bahan Diskusi 126
6.9 Daftar Rujukan 127

7 Integral Lipat Tiga **129**
7.1 Integral Lipat Tiga atas Balok 130
7.2 Integral Lipat Tiga atas Benda Pejal Umum 132
7.3 Aplikasi Integral Lipat Tiga 136
7.4 Rangkuman 137
7.5 Latihan Soal 139
7.6 Bahan Diskusi 141
7.7 Daftar Rujukan 141

DAFTAR PUSTAKA **143**

Glosarium **144**

Indeks **145**

Daftar Tabel

1.1 Beberapa persamaan permukaan dan sketsanya 22

Daftar Gambar

1.1 Grafik fungsi satu peubah $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ . . 2
1.2 Penjumlahan dua vektor pada $\mathbb{R}^2$ 4
1.3 Bola buka di (a) $\mathbb{R}$, (b) $\mathbb{R}^2$, dan (c) $\mathbb{R}^3$ 5
1.4 Himpunan A pada $\mathbb{R}^2$ 6
1.5 Domain fungsi $f(x,y) = \sqrt{\frac{x-1}{y+1}}$ 9
1.6 Domain D berupa cakram satuan berpusat di $(0,0)$ . . . 10
1.7 Domain dan grafik fungsi dua peubah 10
1.8 Grafik fungsi $f(x,y) = x^2 + y^2$ berupa paraboloida . . . 11
1.9 Grafik fungsi $f(x,y) = 12 - 4x - 3y$ di oktan I 12
1.10 Grafik fungsi $f(x,y) = x^2+y^2$ warna kuning dan $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 8$ warna hijau 13
1.11 Kurva ketinggian 15
1.12 Kurva ketinggian dan peta kontur 16
1.13 Kurva-kurva ketinggian fungsi $f(x,y) = x^2 - y^2$ untuk $c = 0, c = \pm 1, c = \pm 2$, dan $c = \pm 3$. 17
1.14 Permukaan-permukaan ketinggian fungsi $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z = c$ untuk $c = 4, c = 8, c = 16$. 17
1.15 Membentuk persamaan bidang 19
1.16 Bola berjari-jari 3 dan berpusat di titik asal 20
1.17 Hiperboloida dua lembar 21
1.18 Grafik fungsi ganjil $f(x,y) = 2x^2y - 2xy^2$ 23
1.19 Grafik fungsi genap $f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$ 24

2.1 Ilustrasi limit fungsi f di titik (x_0, y_0) 33
2.2 Grafik fungsi $(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 35
2.3 Kurva-kurva ketinggian $f(x,y) = c$ selalu berpotongan dengan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ 36

3.1 Turunan parsial f di titik (a, b) merupakan gradien-gradien garis singgung kurva C_1 dan C_2 53
3.2 Grafik fungsi f 57
3.3 Bidang singgung permukaan $z = f(x, y)$ di titik P . . . 61
3.4 Diferensial total 63

4.1 Turunan berarah permukaan f di (x_0, y_0) 77

5.1 Titik maksimum/minimum relatif/lokal dan titik maksimum/ minimum 88
5.2 Grafik fungsi $f(x, y) = x^4y^2$ 91
5.3 Fungsi $f(x, y) = 8x^2 - 2y$ dengan kendala $x^2 + y^2 = 1$. 94

6.1 Permukaan $z = f(x, y)$ pada daerah persegi panjang R . 104
6.2 Partisi daerah persegi panjang R ke dalam sub-subpersegipanjang kecil 105
6.3 Daerah jenis pertama 112
6.4 Daerah jenis kedua 112
6.5 Daerah $D = \{(x, y) \big| -1 \leq x \leq 1, 3x^2 \leq y \leq 1 + 2x^2\}$ . . 113
6.6 Daerah $D = \{(x, y) \big| 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$ 114
6.7 Daerah D pada Contoh 6.19 116
6.8 Koordinat polar 118
6.9 Cincin yang dibatasi oleh dua lingkaran 119
6.10 Luas permukaan di atas daerah $D \subset \mathbb{R}^2$ 120

7.1 Daerah B di dalam $\mathbb{R}^3$ 132
7.2 Tetrahedron 133

Tinjauan Matakuliah

Matakuliah Kalkulus Peubah Banyak (MAM1309) merupakan matakuliah yang wajib ditempuh bagi setiap mahasiswa Program Studi S1 Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember dengan beban 3 sks (3 sks tatap muka tanpa praktikum). Matakuliah Kalkulus Peubah Banyak mempunyai prasyarat matakuliah yang harus telah ditempuh, yakni Kalkulus (MAU1101) dan Kalkulus Lanjut (MAM1205).

Matakuliah Kalkulus Peubah Banyak dirancang terdiri atas 16 kali tatap muka perkuliahan. Materi matakuliah Kalkulus Peubah Banyak membahas ruang $\mathbb{R}^n$ dan topologinya, domain dan range fungsi peubah banyak, sebagian kalkulus pada $\mathbb{R}^n$, fungsi peubah banyak bernilai real (khususnya fungsi dua atau tiga peubah), limit dan kekontinuan fungsi, turunan parsial, turunan berarah, dan turunan total, bidang singgung permukaan, hampiran linier, maksimum-minimum, integral lipat dua, dan integral lipat tiga.

Capaian Pembelajaran Matakuliah (CPMK) Kalkulus Peubah Banyak ini adalah:

- CPMK-1: Mahasiswa mampu memahami konsep limit dan kekontinuan fungsi peubah banyak.
- CPMK-2: Mahasiswa mampu memahami konsep fungsi peubah banyak, khususnya yang berkaitan dengan diferensiasi dan integrasi.
- CPMK-3: Mahasiswa mampu menerapkan masalah maksimum dan minimum dalam masalah kehidupan sehari-hari.
- CPMK-4: Mahasiswa mampu menerapkan integral lipat dalam menyelesaikan masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Bab 1

Fungsi Peubah Banyak

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa mampu menentukan dan mensketsakan domain suatu fungsi dua peubah dan tiga peubah

2. Mahasiswa mampu menentukan range fungsi dua peubah dan tiga peubah

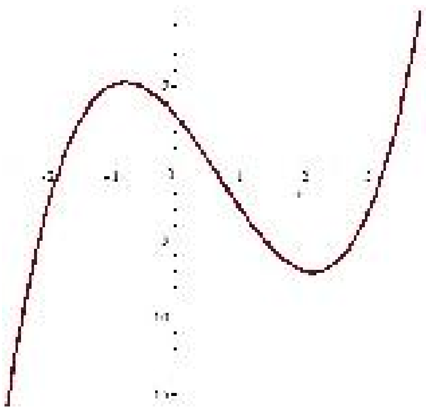
3. Mahasiswa mampu menentukan kurva ketinggian

4. Mahasiswa mampu mensketsa grafik fungsi dua peubah

Fungsi-fungsi yang telah dibahas dalam matakuliah Kalkulus dan Kalkulus Lanjut adalah fungsi satu peubah yang bernilai real ($\mathbb{R}$). Daerah definisi (domain) fungsi-fungsi ini berupa selang atau gabungan beberapa selang yang berada di ruang dimensi satu. Daerah hasil (range) dari fungsi tersebut juga berupa selang atau himpunan bagian di $\mathbb{R}$. Jika daerah definisi dan daerah hasilnya diplot dalam satu sistem koordinat, akan membentuk kurva di ruang dimensi dua. Sebagai contoh, fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ mengasosiasikan suatu peubah x yang bernilai real dengan suatu nilai real $x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ yang grafiknya diberikan pada Gambar 1.1. Jadi, dapat dituliskan

$$f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 3.$$

Karena untuk sebarang x di $\mathbb{R}$ berlaku $x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ juga di $\mathbb{R}$, maka dikatakan bahwa fungsi f mengasosiasikan suatu himpunan di $\mathbb{R}$ ke suatu himpunan di $\mathbb{R}$.



Gambar 1.1: Grafik fungsi satu peubah $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 3$

Secara umum, fungsi di atas dituliskan

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Jika domainnya bukan keseluruhan bilangan real biasanya dituliskan

$$f : D \to \mathbb{R}$$

dengan $D \subseteq \mathbb{R}$.

Di dalam matakuliah Kalkulus Peubah Banyak, konsep fungsi satu peubah akan dikembangkan menjadi fungsi peubah banyak. Secara teori, grafik fungsi yang dapat divisualisasikan hanyalah sampai dengan fungsi dua peubah saja dan grafik yang terbentuk dari fungsi ini berada di ruang dimensi tiga. Karena pertimbangan ini, maka kebanyakan contoh fungsi peubah banyak yang disajikan pada buku ini adalah fungsi dua peubah. Untuk memahami secara umum fungsi peubah banyak, diperkenalkan terlebih dahulu pengertian ruang $\mathbb{R}^n$ dan sifat-sifatnya.

1.1 Ruang $\mathbb{R}^n$

Diberikan $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real. Elemen-elemen $\mathbb{R}$ ini disebut **skalar**. Untuk n bilangan asli, $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai himpunan semua $\mathbf{x}$ dari n bilangan real

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

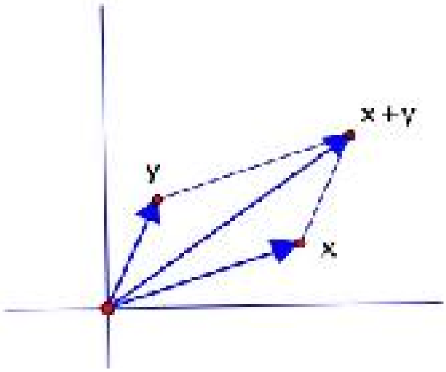
Elemen-elemen dari $\mathbb{R}^n$ disebut **titik** atau **vektor**. Untuk suatu vektor $\mathbf{x}$, entri-entri skalar x_i untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ disebut **koordinat** atau **komponen**. Pada kasus $\mathbb{R}^2$, koordinat-koordinat x_1 dan x_2 biasanya dinyatakan masing-masing dengan x dan y. Pada kasus $\mathbb{R}^3$, koordinat-koordinat x_1, x_2, dan x_3 biasanya dinyatakan masing-masing dengan x, y, dan z. Dua titik $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ dikatakan sama, ditulis $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, jika $x_i = y_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$.

Ada dua operasi aljabar yang dikenal di $\mathbb{R}^n$. Misal diberikan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, dan misalkan c bilangan real. Dua operasi aljabar di $\mathbb{R}^n$ adalah

i. **Penjumlahan**: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$, dan

ii. **Perkalian skalar**: $c\mathbf{x} = (cx_1, cx_2, \cdots, cx_n)$.

Sebagai contoh pada $\mathbb{R}^2$, jika $\mathbf{x} = (2, -1)$ dan $\mathbf{y} = (1, 3)$, maka $4\mathbf{x} = (4 \cdot 2, 4 \cdot -1) = (8, -4)$ dan $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (2 + 1, -1 + 3) = (3, 2)$. Hasil penjumlahan dua vektor pada $\mathbb{R}^2$ diberikan pada Gambar 1.2.



Gambar 1.2: Penjumlahan dua vektor pada $\mathbb{R}^2$

Norm dari vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, ditulis $||\mathbf{x}||$, adalah sebuah bilangan real yang didefinisikan sebagai

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Sebagai contoh, jika $\mathbf{x} = (1, 3, -2) \in \mathbb{R}^3$ maka $||\mathbf{x}|| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$.

Himpunan yang terdiri n vektor $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$ di $\mathbb{R}^n$ disebut **basis** jika setiap $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier secara tunggal $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots + c_n\mathbf{v_n}$ untuk suatu skalar-skalar $c_1, c_2, \cdots, c_n$. Sebarang basis dapat digunakan untuk mendefinisikan sistem koordinat di $\mathbb{R}^n$, dan $\mathbb{R}^n$ bisa mempunyai beberapa basis yang berbeda. Basis standar di $\mathbb{R}^2$ biasanya dituliskan $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ dengan $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ dan $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$. Sedangkan basis standar di $\mathbb{R}^3$ biasanya dituliskan $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dengan $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$, dan $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$.

Pada $\mathbb{R}^2$ dikenal istilah **kwadran**, yakni kwadran I, II, III, dan IV. Kwadran I adalah daerah pada $\mathbb{R}^2$ yang memenuhi $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, kwadran II adalah daerah pada $\mathbb{R}^2$ yang memenuhi $x \leq 0$ dan $y \geq 0$, kwadran III adalah daerah pada $\mathbb{R}^2$ yang memenuhi $x \leq 0$ dan $y \leq 0$, dan kwadran IV adalah daerah pada $\mathbb{R}^2$ yang memenuhi $x \geq 0$ dan $y \leq 0$. Sedangkan pada $\mathbb{R}^3$ dikenal istilah **oktan**, yakni oktan I,II,$\cdots$, VIII. Oktan I adalah daerah pada $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi $x \geq 0, y \geq 0$, dan $z \geq 0$. Oktan II adalah daerah pada $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi $x \leq 0, y \geq 0$, dan $z \geq 0$. Oktan III adalah daerah pada $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi $x \leq 0, y \leq 0$, dan $z \geq 0$. Oktan IV adalah daerah pada

$\mathbb{R}^3$ yang memenuhi $x \geq 0, y \leq 0$, dan $z \geq 0$. Oktan V adalah daerah pada $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi $x \geq 0, y \geq 0$, dan $z \leq 0$. Oktan VI adalah daerah pada $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi $x \leq 0, y \geq 0$, dan $z \leq 0$. Oktan VII adalah daerah pada $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi $x \leq 0, y \leq 0$, dan $z \leq 0$. Oktan VIII adalah daerah pada $\mathbb{R}^3$ yang memenuhi $x \geq 0, y \leq 0$, dan $z \leq 0$.

Pada $\mathbb{R}^2$, persamaan $x = 0$ menyatakan sebuah garis yang biasa disebut **sumbu-**y. Tetapi pada $\mathbb{R}^3$, persamaan $x = 0$ menyatakan suatu bidang yang dikenal dengan **bidang-**yz. Persamaan $y = 0$ menyatakan suatu bidang, yang dikenal dengan **bidang-**xz. Persamaan $z = 0$ menyatakan suatu bidang, yang dikenal dengan **bidang-**xy.

Berikutnya diberikan pengertian bola buka dan beberapa pengertian titik di dalam $\mathbb{R}^n$, yang diberikan dalam definisi-definisi berikut.

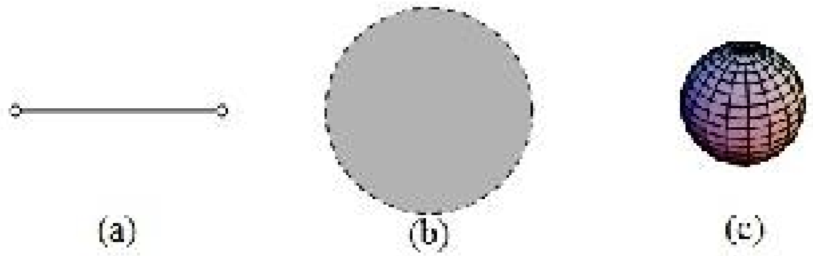
Definisi 1.1. *Diberikan* $\mathbf{x_0} = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$. **Bola buka** *yang berpusat di titik* $\mathbf{x_0}$ *dengan jari-jari* $r > 0$, *ditulis* $B_r(\mathbf{x_0})$, *didefinisikan sebagai*

$$B_r(\mathbf{x_0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \ ||\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|| < r\}.$$

atau dengan penulisan lain

$$\begin{aligned} B_r(\mathbf{x_0}) &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \\ &\quad \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2} < r\}. \end{aligned}$$

Bola-bola buka di $\mathbb{R}^n$ diberikan pada Gambar 1.3. Bola buka di $\mathbb{R}$ biasanya dinamakan **selang buka** dan bola buka di $\mathbb{R}^2$ biasanya disebut **cakram buka**.



Gambar 1.3: Bola buka di (a) $\mathbb{R}$, (b) $\mathbb{R}^2$, dan (c) $\mathbb{R}^3$

Definisi 1.2. *Diberikan* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *dan* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(i). *Titik* $\mathbf{x}$ *disebut* **titik-limit** *himpunan* A *jika*

$$(A \backslash \{\mathbf{x}\}) \cap B_r(\mathbf{x}) \neq \emptyset, \qquad \textit{untuk setiap } r > 0.$$

Selanjutnya, himpunan semua titik-limit A *dinotasikan dengan* A'.

(ii). *Titik* $\mathbf{x}$ *disebut* **titik-dalam** *atau* **titik interior** *himpunan* A *jika terdapat* $r > 0$ *sehingga*

$$B_r(\mathbf{x}) \subseteq A.$$

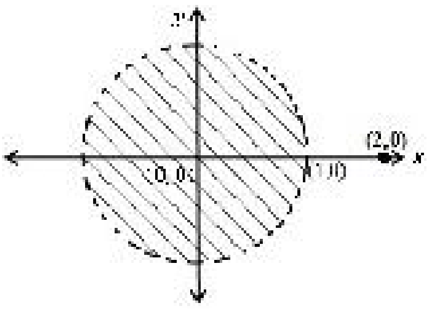
Selanjutnya, himpunan semua titik-dalam A *dinotasikan dengan* A^0.

(iii). *Titik* $\mathbf{x}$ *disebut* **titik-batas** *himpunan* A *jika untuk setiap* $r > 0$ *berlaku*

$$B_r(\mathbf{x}) \cap (A \backslash \{\mathbf{x}\}) \neq \emptyset \qquad \textit{dan} \qquad B_r(\mathbf{x}) \cap (A^C \backslash \{\mathbf{x}\}) \neq \emptyset.$$

Selanjutnya, himpunan semua titik-batas A *dinotasikan dengan* ∂A.

Sebagai contoh pada $\mathbb{R}^2$, misalkan diberikan $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(2, 0)\}$, yakni himpunan semua titik di daerah lingkaran dengan jari-jari 1 yang berpusat di titik asal digabung dengan sebuah titik $(2, 0)$ seperti diberikan pada Gambar 1.4.



Gambar 1.4: Himpunan A pada $\mathbb{R}^2$

Titik $(1,0)$ merupakan titik-limit dan titik-batas A, tetapi $(1,0)$ bukan titik-dalam A. Titik $(2,0)$ bukan merupakan titik-limit A, bukan titik-dalam A, dan juga bukan titik-batas A. Titik $(0,0)$ merupakan titik-dalam dan titik-limit A, tetapi bukan titik-batas A. Dalam hal ini, diperoleh

$$A' = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\},$$

$$A^0 = \{(x,y)|x^2+y^2 < 1\},$$

dan

$$\partial A = \{(x,y)|x^2+y^2 = 1\}.$$

Definisi 1.3. *Diberikan* $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(i). Himpunan A *dikatakan* **buka** *jika setiap anggota* A *merupakan titik-dalam himpunan* A.

(ii). Himpunan A *dikatakan* **tutup** *jika* A^C *buka.*

Himpunan $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ merupakan contoh himpunan buka, $\{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$ merupakan contoh himpunan tutup, sedangkan $\{(x,y)|x^2+y^2<1\} \cup \{(2,0)\}$ merupakan contoh himpunan tidak buka sekaligus tidak tutup pada $\mathbb{R}^2$.

1.2 Fungsi Dua Peubah

Pengertian dan konsep tentang daerah definisi (domain) dan daerah hasil (range) fungsi dua peubah sama persis dengan fungsi satu peubah. Pada subbab ini dibahas fungsi dari himpunan bagian pada $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}$.

Definisi 1.4. Fungsi dua peubah bernilai real, *atau cukup dikatakan* **fungsi dua peubah** *dari* f, *adalah suatu aturan yang mengkaitkan setiap pasangan terurut bilangan-bilangan real* (x,y) *di himpunan* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *ke tepat satu bilangan real* $f(x,y)$. *Secara umum fungsi dua peubah* f *dapat dituliskan sebagai*

$$f : D \to \mathbb{R}$$

dengan $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Misalkan diberikan fungsi dua peubah $f(x,y) = x^3y$, dikatakan bahwa fungsi f memetakan atau mengasosiasikan suatu titik (x,y) di ruang dimensi dua (yaitu pada $\mathbb{R}^2$ atau juga disebut bidang-xy) ke suatu nilai $f(x,y)$ di himpunan bilangan real. Dalam hal ini dapat dituliskan

$$f : (x,y) \mapsto x^3y$$

Nilai fungsi dua peubah ini dapat ditentukan dengan memasukkan nilai-nilai x dan y. Sebagai contoh pada fungsi f di atas, $f(1,2) = 1^3 2 = 2, f(2,1) = 2^3 1 = 8, f(-2,3) = (-2)^3 3 = -24$, dan sebagainya.

Seringkali fungsi dua peubah bebas f dituliskan sebagai $z = f(x,y)$. Peubah x dan y disebut **peubah bebas** dan z disebut **peubah terikat**.

Secara umum dapat dikembangkan berbagai bentuk fungsi dengan daerah definisi dan daerah hasil di ruang dimensi sebarang. Penulisan simbol fungsi f yang bernilai real atau vektor dalam hal ini tidak dibedakan.

Domain atau **daerah definisi** fungsi dua peubah $f : D \to \mathbb{R}$ adalah himpunan D yang merupakan himpunan semua titik di $\mathbb{R}^2$ sehingga fungsi f terdefinisikan, atau dapat dituliskan sebagai

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| f(x,y) \text{ ada}\}.$$

Jika domain fungsi f tidak diberikan secara khusus, maka yang menjadi domain fungsi f adalah himpunan bagian di $\mathbb{R}^2$ seluas mungkin sehingga fungsi f terdefinisi.

Contoh 1.5. *Jika $D \subseteq \mathbb{R}^2$ menyatakan domain seluas mungkin fungsi dua peubah $f(x,y) = \sqrt{\frac{x-1}{y+1}}$, evaluasi nilai $f(3,0)$, tentukan D, dan sketsakan D pada bidang $\mathbb{R}^2$.*

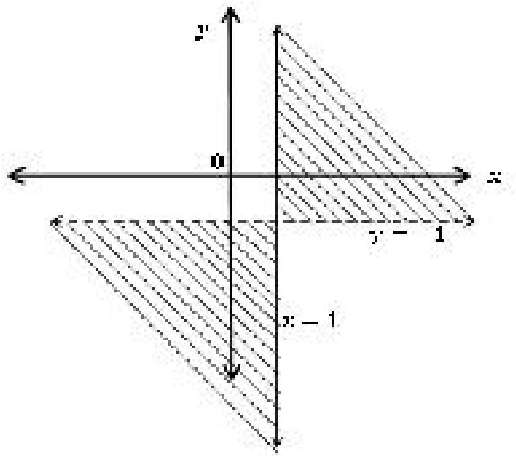
Penyelesaian: $f(3,0) = \sqrt{\frac{3-1}{0+1}} = \sqrt{2}$.
Untuk mendapatkan D domain dari f seluas mungkin maka haruslah $\frac{x-1}{y+1} \geq 0$, yang berarti

$$x - 1 \geq 0 \text{ dan } y + 1 > 0 \quad \text{atau} \quad x - 1 \leq 0 \text{ dan } y + 1 > 0.$$

Jadi diperoleh domain fungsi f adalah

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| x \geq 1, y > -1 \text{ atau } x \leq 1, y < -1\}.$$

Sketsa daerah D diberikan pada Gambar 1.5.



Gambar 1.5: Domain fungsi $f(x, y) = \sqrt{\frac{x-1}{y+1}}$

Range atau **daerah hasil** dari fungsi dua peubah f, dinotasikan R, adalah himpunan semua bilangan real $f(x, y)$ dengan (x, y) elemen-elemen di D (domain fungsi f), atau dituliskan

$$R = \{f(x, y) \in \mathbb{R} \big| (x, y) \in D\}$$

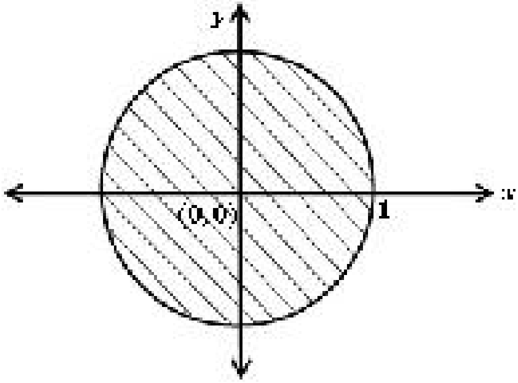
Contoh 1.6. *Tentukan domain dan range fungsi* $g(x, y) = \sin{(x + y^2)}$.

Penyelesaian: Pada fungsi satu peubah, fungsi $y = \sin x$ terdefinisi untuk semua nilai x di $\mathbb{R}$ dan $-1 \leq \sin x \leq 1$. Dengan demikian, domain dari fungsi $g(x, y) = \sin{(x + y^2)}$ adalah $\mathbb{R}^2$ dan range g adalah $[-1, 1]$.

Pada Contoh 1.6, domain tidak diberikan secara khusus, sehingga yang menjadi domain adalah seluas mungkin dan rangenya mengikuti domainnya. Jika domain suatu fungsi diberikan secara khusus, maka rangenya juga akan mengikuti domainnya, seperti diberikan pada contoh berikut.

Contoh 1.7. *Diberikan* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| x^2 + y^2 \leq 1\}$ *dan fungsi* $f : D \to \mathbb{R}$ *yang didefinisikan* $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ *untuk setiap* x *di* D. *Tentukan range fungsi* f.

Penyelesaian: D merupakan cakram satuan (daerah lingkaran) yang berpusat di titik asal, seperti diberikan pda Gambar 1.6.

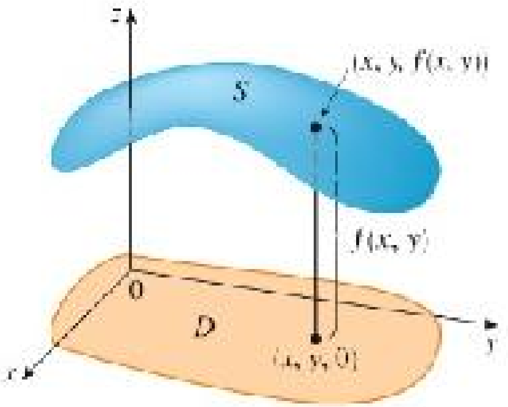


Gambar 1.6: Domain D berupa cakram satuan berpusat di $(0, 0)$

Karena $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, akibatnya diperoleh $1 \leq 2 - x^2 - y^2 \leq 2$. Jadi range fungsi f adalah $[1, 2]$.

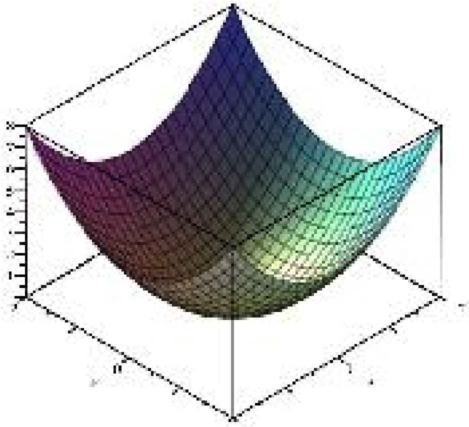
Definisi 1.8. *Diberikan $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dan fungsi dua peubah $f : D \to \mathbb{R}$.* **Grafik** *fungsi f adalah himpunan semua titik (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ sedemikian hingga $z = f(x, y)$ untuk setiap (x, y) di D.*

Dari Definisi 1.8, bila grafik fungsi dua peubah disketsakan pada $\mathbb{R}^3$ maka berupa permukaan, seperti diilustrasikan pada Gambar 1.7.



Gambar 1.7: Domain dan grafik fungsi dua peubah

Sebagai contoh, grafik $f(x, y) = x^2 + y^2$ pada domain $\{(x, y) \big| -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$ diberikan pada Gambar 1.8, yang dinamakan **paraboloida**.



Gambar 1.8: Grafik fungsi $f(x, y) = x^2 + y^2$ berupa paraboloida

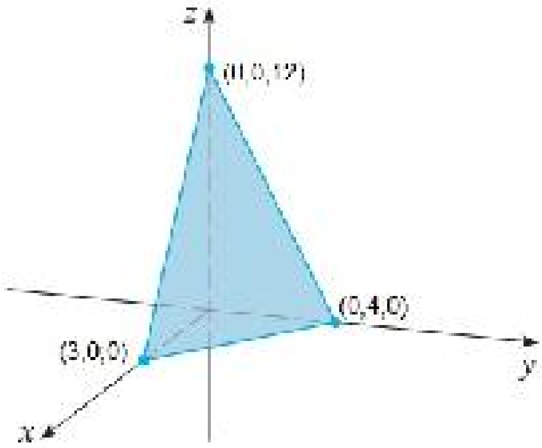
Contoh 1.9. *Sketsakan grafik fungsi* $f(x, y) = 12 - 4x - 3y$.

Penyelesaian: Grafik fungsi f mempunyai persamaan $z = 12 - 4x - 3y$, atau $4x + 3y + z = 12$, yang menyatakan sebuah bidang. Untuk mensketsa bidang tersebut, pertama menentukan titik-titik potong pada sumbu-sumbu koordinat. Dengan mengambil $y = z = 0$ di persamaan bidang tersebut, diperoleh $x = 3$. Dengan cara serupa, untuk $x = z = 0$, diperoleh $y = 4$, dan untuk $x = y = 0$, diperoleh $z = 12$. Jadi, bidang tersebut melewati titik $(3, 0, 0), (0, 4, 0)$, dan $(0, 0, 12)$. Sketsa grafik f pada oktan pertama diberikan pada Gambar 1.9.

Misal diberikan fungsi dua peubah f pada $\mathbb{R}$ dan grafiknya. Kemudian diberikan tiga bilangan positif a, b, dan c dan didefinisikan fungsi dua peubah g dengan

$$g(x, y) = f(x - a, y - b) + c, \qquad \text{untuk setiap } (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Grafik fungsi g dapat diperoleh dari grafik fungsi f yang digeser sejauh a satuan searah sumbu-x positif lalu dilanjutkan digeser sejauh b satuan searah sumbu-y positif, dan terakhir digeser sejauh c satuan searah



Gambar 1.9: Grafik fungsi $f(x, y) = 12 - 4x - 3y$ di oktan I

sumbu-z positif. Jika a, b, dan c negatif, maka menggesernya sejauh a satuan ke arah sumbu-x negatif lalu dilanjutkan b satuan searah sumbu-y negatif, dan terakhir digeser sejauh c satuan searah sumbu-z negatif. Sebagai contoh, misalkan diberikan fungsi $f(x, y) = x^2 + y^2$ yang grafiknya merupakan paraboloida terbuka ke atas dengan titik puncak bawah di titik asal (lihat Gambar 1.8). Jika diinginkan grafik fungsi g yang didefinisikan $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 8$, maka grafik fungsi g dapat diperoleh dari grafik fungsi f yang digeser sejauh 2 satuan searah sumbu-x positif lalu digeser sejauh 1 satuan searah sumbu-y positif dan terakhir digeser sejauh 3 satuan searah sumbu-z positif, karena $g(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + 3 = f(x - 2, y - 1) + 3$. Grafik kedua fungsi f dan g diberikan pada Gambar 1.10

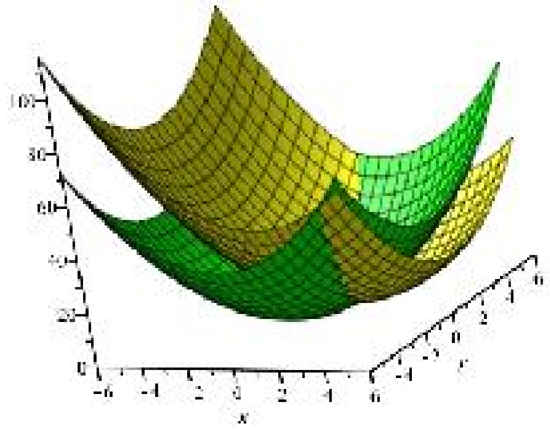
Misal diberikan fungsi dua peubah f pada $\mathbb{R}$ dan grafiknya. Kemudian diberikan bilangan $a \neq 0$ dan didefinisikan fungsi dua peubah h dengan

$$h(x, y) = af(x, y), \qquad \text{untuk setiap } (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Grafik fungsi h dapat diperoleh dari grafik fungsi f dengan cara

i. Jika $a > 1$ maka grafik fungsi f diregangkan searah sumbu-z dengan faktor peregangan a;

ii. Jika $0 < a < 1$ maka grafik fungsi f dimampatkan searah sumbu-z dengan faktor pemampatan a;



Gambar 1.10: Grafik fungsi $f(x, y) = x^2 + y^2$ warna kuning dan $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 8$ warna hijau

iii. Jika $a < -1$ maka grafik fungsi f dicerminkan terhadap bidang-xy lalu diregangkan searah sumbu-z dengan faktor peregangan sebesar $|a|$;

iv. Jika $-1 < a < 0$ maka grafik fungsi f dicerminkan terhadap bidang-xy lalu dimampatkan searah sumbu-z dengan faktor pemampatan sebesar $|a|$.

Contoh 1.10. *Diberikan fungsi dua peubah $f(x, y) = xy$ pada $\mathbb{R}$. Didefinisikan fungsi dua peubah g pada $\mathbb{R}$ dengan $g(x, y) = 2xy + 4x - 2y - 1$. Dapatkan grafik fungsi g yang diperoleh dari fungsi f dengan cara mengkombinasikan menggeser dan meregangkan/memampatkan grafik fungsi f.*

Penyelesaian: Fungsi g dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 2xy + 4x - 2y - 1 \\ &= 2(x - 1)(y + 2) + 3 \\ &= 2f(x - 1, y + 2) + 3. \end{aligned}$$

Dengan demikian, grafik fungsi g dapat diperoleh dari grafik fungsi f dengan cara digeser 1 satuan searah sumbu-x positif lalu digeser sejauh 2 satuan searah sumbu-y negatif, kemudian hasilnya diregangkan searah sumbu-z dengan faktor peregangan 2, dan hasil terakhir digeser 3 satuan searah sumbu-z positif.

1.3 Fungsi Tiga Peubah atau Lebih

Pada subbab ini akan dibahas pengertian fungsi tiga peubah bernilai real, domain, dan range fungsi.

Definisi 1.11. Fungsi tiga peubah bernilai real, *atau cukup dikatakan* **fungsi tiga peubah** *dari f, adalah suatu aturan yang mengkaitkan setiap pasangan terurut bilangan-bilangan real (x, y, z) di himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ke tepat satu bilangan real $f(x, y, z)$. Secara umum fungsi tiga peubah f dapat dituliskan sebagai*

$$f : D \to \mathbb{R}$$

dengan $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Domain fungsi tiga peubah $f : D \to \mathbb{R}$ adalah himpunan D yang merupakan himpunan semua titik di $\mathbb{R}^3$ sehingga fungsi f terdefinisikan, atau dapat dituliskan sebagai

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| f(x, y, z) \text{ ada}\}.$$

Jika domain fungsi f tidak diberikan secara khusus, maka yang menjadi domain fungsi f adalah himpunan bagian di $\mathbb{R}^3$ sebesar mungkin sehingga fungsi f terdefinisi.

Contoh 1.12. *Tentukan domain dari fungsi f jika*

$$f(x, y, z) = z \cos xy + \ln (x + z)$$

Penyelesaian: Fungsi f terdefinisi jika $x + z > 0$, sehingga domain dari f adalah

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| z > -x\},$$

yang merupakan semua titik di $\mathbb{R}^3$ yang berada di atas bidang $z = -x$.

Range dari fungsi tiga peubah f adalah himpunan semua bilangan real $f(x, y, z)$ dengan (x, y, z) elemen-elemen di D domain fungsi f, atau dituliskan

$$R = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R} \big| (x, y, z) \in D\}$$

Contoh 1.13. *Tentukan range fungsi tiga peubah*

$$f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Penyelesaian: Fungsi f terdefinisi jika $9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$. Dengan demikian, diperoleh

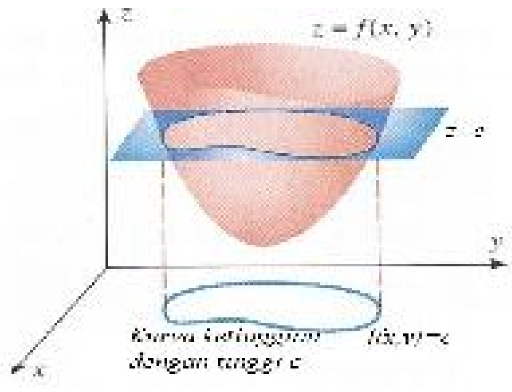
$$\begin{aligned} 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \quad &\Leftrightarrow \quad -9 \leq -(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq 9 - (x^2 + y^2 + z^2) \leq 9 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \sqrt{9 - (x^2 + y^2 + z^2)} = f(x, y, z) \leq 3 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, diperoleh range dari f adalah selang $[0, 3]$.
Grafik fungsi tiga peubah tidak bisa disketsakan pada $\mathbb{R}^3$.

1.4 Kurva dan Permukaan Ketinggian

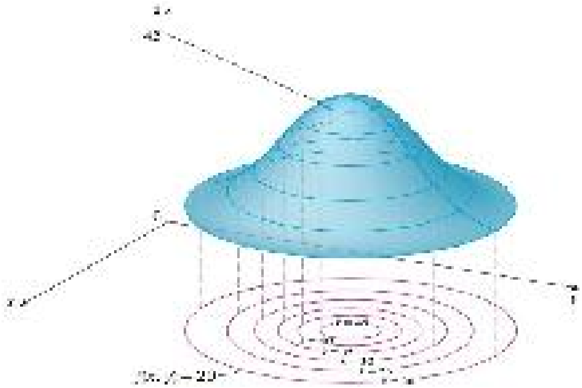
Definisi 1.14. Kurva ketinggian *adalah proyeksi kurva permukaan pada bidang-xy yang dibentuk dari perpotongan bidang mendatar $z = c$ (konstanta) dengan permukaan $f(x, y)$. Kumpulan dari kurva ketinggian disebut* **peta kontur**.

Penjelasan kurva ketinggian diberikan sebagai berikut. Misal diberikan permukaan $z = f(x, y)$. Iriskan permukaan tersebut dengan bidang $z = c$. Hasil irisan tersebut berupa kurva di ruang. Proyeksikan kurva tersebut pada bidang-xy. Hasil proyeksi ini merupakan kurva ketinggian dari permukaan $z = f(x, y)$ dengan ketinggian c. Jadi kurva ketiggian dari suatu fungsi dua peubah $z = f(x, y)$ adalah kumpulan titik-titik pada bidang-xy yang mempunyai nilai fungsi yang sama, seperti diberikan pada Gambar 1.11.



Gambar 1.11: Kurva ketinggian

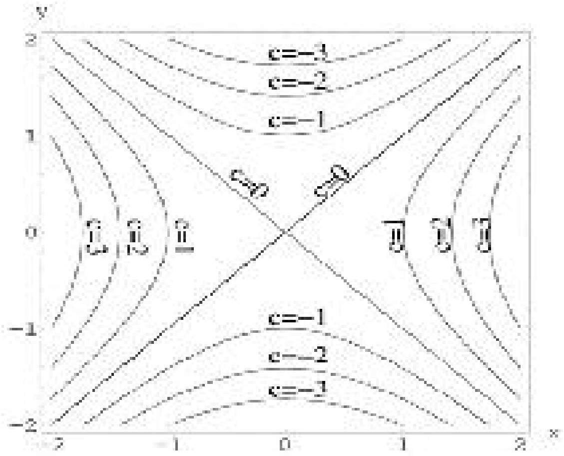
Sedangkan untuk peta kontur merupakan kumpulan dari beberapa kurva ketinggian. Untuk lebih jelasnya kedua pengertian tersebut (kurva ketinggian dan peta kontur) dijelaskan pada Gambar 1.12. Kurva-kurva yang berwarna biru merupakan kurva-kurva ketinggian, sedangkan kumpulan kurva yang berwarna merah merupakah peta kontur.



Gambar 1.12: Kurva ketinggian dan peta kontur

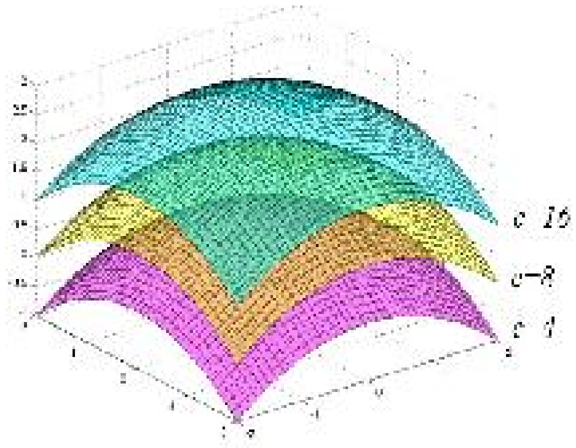
Contoh 1.15. *Diberikan fungsi $f(x,y) = x^2 - y^2$. Sketsakan beberapa kurva ketinggian $f(x,y) = c$ untuk $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.*

Penyelesaian: Pertama pandang kasus $c = 0$. Persamaan kurva ketinggiannya adalah $x^2 - y^2 = 0$. Persamaan ini memenuhi $y = x$ atau $y = -x$, yang merupakan garis lurus. Dengan demikian kurva ketinggian permukaan f ketika $c = 0$ berupa garis lurus $y = x$ dan garis $y = -x$. Selanjutnya, untuk kasus $c = 1$, persamaan kurva ketinggiannya adalah $x^2 - y^2 = 1$. Persamaan ini memenuhi $y = \sqrt{x^2 - 1}$ atau $y = -\sqrt{x^2 - 1}$, yang merupakan kurva hiperbola dengan domain $|x| \geq 1$ dan rangenya $\mathbb{R}$. Begitu pula untuk kasus $c = 2$ dan $c = 3$ keduanya berbentuk hiperbola dengan domain masing-masing $|x| \geq \sqrt{2}$ dan $|x| \geq \sqrt{3}$. Untuk kasus $c = -1$, persamaan kurva ketinggiannya adalah $x^2 - y^2 = -1$. Persamaan ini memenuhi $y = \sqrt{x^2 + 1}$ atau $y = -\sqrt{x^2 + 1}$, yang merupakan kurva hiperbola dengan domain $\mathbb{R}$ dan rangenya $[1, \infty)$. Begitu pula untuk kasus $c = -2$ dan $c = -3$ keduanya berbentuk hiperbola dengan domain $\mathbb{R}$ dan rangenya masing-masing $[\sqrt{2}, \infty)$ dan $[\sqrt{3}, \infty)$. Sketsa kurva-kurva ketinggian selengkapnya diberikan pada Gambar 1.13.



Gambar 1.13: Kurva-kurva ketinggian fungsi $f(x, y) = x^2 - y^2$ untuk $c = 0, c = \pm 1, c = \pm 2$, dan $c = \pm 3$.

Pada fungsi tiga peubah, kurva ketinggian ini dinamakan **permukaan ketinggian**. Sebagai contoh, fungsi tiga peubah $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z$ dengan $c = 4, 8$, dan 16 diberikan pada Gambar 1.14.



Gambar 1.14: Permukaan-permukaan ketinggian fungsi $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z = c$ untuk $c = 4, c = 8, c = 16$.

Contoh 1.16. *Misalkan temperatur di suatu titik* (x, y, z) *dinyatakan oleh* $T(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$. *Tentukan permukaan-permukaan ketinggian dari* T.

Penyelesaian: Fungsi T mempunyai nilai maksimum 1 di titik asal, dan $T(x, y, z) > 0$ untuk setiap (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ selain di titik asal. Jika $0 < c \leq 1$, himpunan titik-titik yang memenuhi $T(x, y, z) = c$ adalah titik-titik yang memenuhi $x^2 + y^2 + z^2 = -\ln c$, yakni permukaan bola yang berpusat di titik asal. Jadi permukaan-permukaan ketinggian T adalah bola-bola yang berpusat di titik asal.

1.5 Permukaan

Pada fungsi satu peubah $y = f(x)$, persamaan $x = a, y = b$, atau $y = ax + b$ dengan a dan b konstanta-konstanta, menyatakan persamaan-persamaan garis. Tetapi pada fungsi dua peubah, persamaan-persamaan tersebut menyatakan persamaan-persamaan bidang. Secara umum, persamaan bidang adalah

$$ax + by + cz = d,$$

dengan a, b, c, dan d adalah konstanta-konstanta.

Untuk menentukan persamaan bidang pada fungsi dua peubah, misalkan diberikan $\mathbf{p_0} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ menyatakan vektor posisi sebuah titik di bidang, dan diberikan $\mathbf{p} = \langle x, y, z \rangle$ menyatakan vektor posisi sebarang titik di bidang, dan diberikan $\mathbf{n}$ menyatakan vektor normal bidang. Karena vektor normal tegak lurus dengan bidang, mka diperoleh persamaan

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p_0}) = 0,$$

yang secara geometris diilustrasikan seperti pada Gambar 1.15.

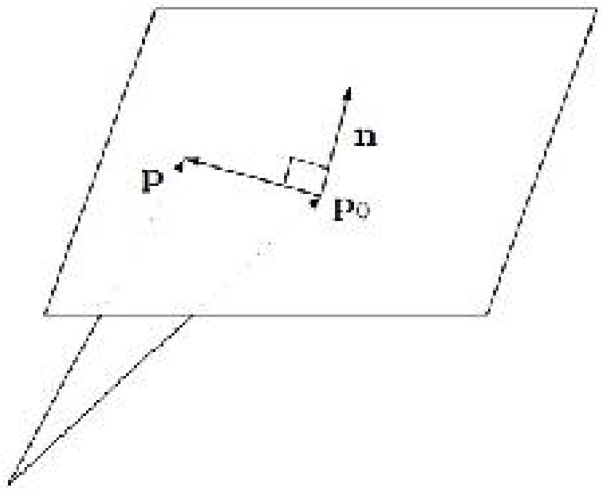
Contoh 1.17. *Tentukan persamaan bidang yang memiliki vektor normal* $\langle 1, 3, 2 \rangle$ *dan memuat titik* $(1, -2, 4)$.

Penyelesaian: Persamaan bidang adalah

$$\mathbf{n} \cdot [\langle x, y, z \rangle - \langle 1, -2, 4 \rangle] = \langle 1, 3, 2 \rangle \cdot \langle x - 1, y + 2, z - 4 \rangle = 0$$

atau dapat dituliskan

$$x + 3y + 2z = 3.$$



Gambar 1.15: Membentuk persamaan bidang

Contoh 1.18. *Tentukan vektor normal bidang*

$$x + 3y - 4z = 8.$$

Penyelesaian: Vektor normal bidang adalah

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

atau dapat dituliskan

$$\mathbf{n} = \langle 1, 3, -4 \rangle.$$

Contoh 1.19. *Tentukan persamaan bidang yang melewati tiga titik* $(1, 2, 1), (3, -1, 2)$, *dan* $(4, 2, 1)$.

Penyelesaian: Vektor normal bidang adalah

$$[\langle 3, -1, 2 \rangle - \langle 1, 2, 1 \rangle] \times [\langle 4, 2, 1 \rangle - \langle 1, 2, 1 \rangle] = \langle 2, -3, 1 \rangle \times \langle 3, 0, 0 \rangle = \langle 0, 3, 9 \rangle.$$

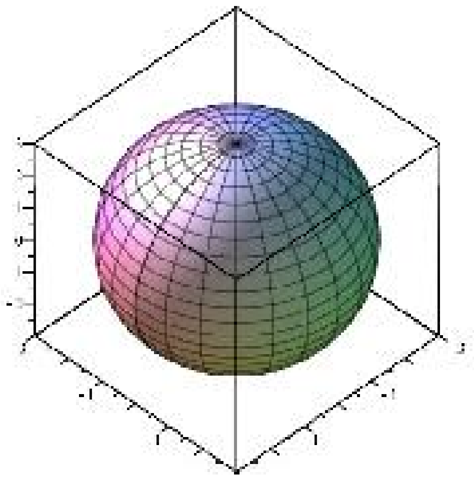
Oleh karena itu, diperoleh persamaan bidang

$$0(x - 1) + 3(y - 2) + 9(z - 1) = 0,$$

atau dapat dituliskan

$$y + 3z = 5.$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ menyatakan **bola** dengan jari-jari 3 dan berpusat di titik asal yang grafiknya diberikan pada Gambar 1.16. Bentuk ini tidak dapat disajikan dalam bentuk fungsi $f(x, y)$ karena untuk setiap (x, y) di $\mathbb{R}$ yang memenuhi $x^2 + y^2 < 9$ terdapat dua titik yang bersesuaian pada bola. Seperti pada persamaan lingkaran, ini dapat dipisah menjadi dua fungsi, yakni misalkan $f_1(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ yang merupakan separuh bola bagian atas (di atas bidang $z = 0$) dan $f_2(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ merupakan separuh bola bagian bawah (di bawah bidang $z = 0$).



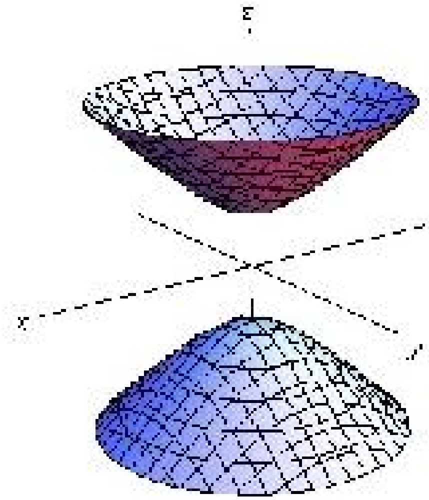
Gambar 1.16: Bola berjari-jari 3 dan berpusat di titik asal

Sebagai contoh yang lain, persamaan permukaan **hiperboloida dua lembar** adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

dengan a, b, dan c konstanta-konstanta yang grafiknya diberikan pada Gambar 1.17.

Fungsi peubah banyak bisa ditulis dalam bentuk eksplisit atau implisit. Untuk fungsi dua peubah yang dinyatakan dalam bentuk eksplisit, maka secara umum ditulis dalam bentuk $z = f(x, y)$. Sebaliknya, jika fungsi dua peubah dituliskan dalam bentuk implisit, secara umum ditulis dalam bentuk $f(x, y, z) = 0$. Setiap fungsi eksplisit bisa dengan mudah ditulis dalam bentuk implisit, tetapi tidak setiap fungsi implisit bisa dinyatakan dalam bentuk eksplisit. Sebagai contoh, bentuk

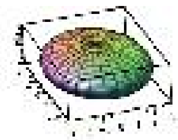
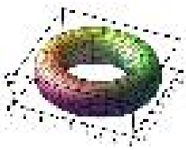
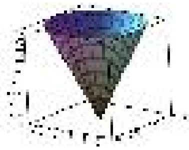
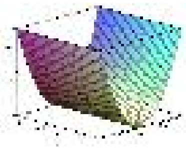
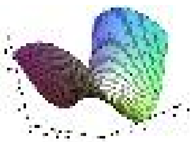


Gambar 1.17: Hiperboloida dua lembar

$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 1$ merupakan bentuk implisit yang sulit dinyatakan dalam bentuk eksplisit.

Selain bola dan hiperboloida yang telah dikenalkan di atas, nama-nama permukaan familiar lain yang sering muncul diberikan pada Tabel 1.1.

Tabel 1.1: Beberapa persamaan permukaan dan sketsanya

No.	Bentuk persamaan	Nama permukaan	Sketsa permukaan
1.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Elipsoida	
2.	$(c - \sqrt{x^2 + y^2})^2$ $+z^2 = a^2$	Torus	
3.	$z = a\sqrt{x^2 + y^2}$	Kerucut	
4.	$z = x^2 + ay$	Silinder parabolik	
5.	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	Paraboloida hiperbolik	

Keterangan: a, b, dan c konstanta-konstanta

1.6 Fungsi Simetri

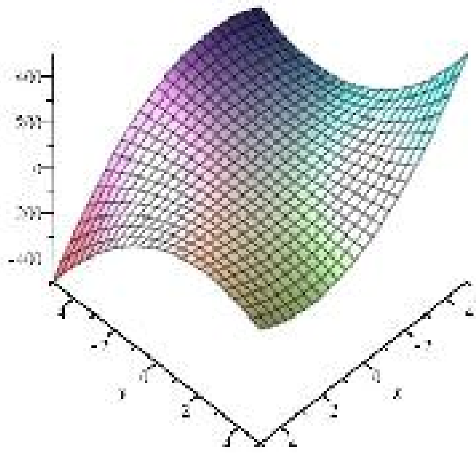
Fungsi simetri dari fungsi peubah banyak merupakan generalisasi fungsi ganjil dan fungsi genap. Untuk itu, sebelum membahas fungsi simetri terlebih dahulu dikenalkan fungsi ganjil dan fungsi genap pada peubah banyak.

Definisi 1.20. *Fungsi* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *disebut* **fungsi ganjil** *jika untuk setiap* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *berlaku* $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.

Sebagai contoh, fungsi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan $f(\mathbf{x}) = f(x, y) = 2x^2y - 2xy^2$ merupakan fungsi ganjil pada $\mathbb{R}^2$, sebab

$$\begin{aligned} f(-\mathbf{x}) &= f(-x, -y) \\ &= 2(-x)^2(-y) - 2(-x)(-y)^2 \\ &= -2x^2y + 2xy^2 \\ &= -f(x, y) \\ &= -f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Grafik fungsi ganjil pada $\mathbb{R}^n$ simetri terhadap titik asal. Sebagai contoh grafik fungsi ganjil $f(x, y) = 2x^2y - 2xy^2$ diberikan pada Gambar 1.18.



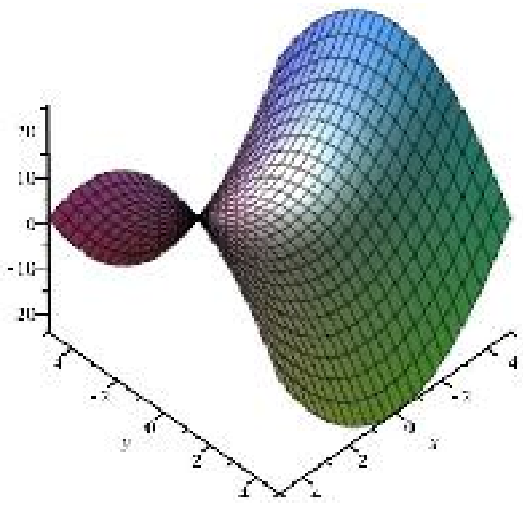
Gambar 1.18: Grafik fungsi ganjil $f(x, y) = 2x^2y - 2xy^2$

Definisi 1.21. *Fungsi* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *disebut* **fungsi genap** *jika untuk setiap* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *berlaku* $f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

Sebagai contoh, fungsi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan $f(\mathbf{x}) = f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ merupakan fungsi genap pada $\mathbb{R}^2$, sebab

$$\begin{aligned} f(-\mathbf{x}) &= f(-x, -y) \\ &= (-x)^2 - (-y)^2 + 1 \\ &= x^2 - y^2 + 1 \\ &= f(x, y) \\ &= f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Grafik fungsi genap pada $\mathbb{R}^2$ simetri terhadap sumbu-z. Sebagai contoh grafik fungsi ganjil $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ diberikan pada Gambar 1.19.



Gambar 1.19: Grafik fungsi genap $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$

Banyak fungsi yang bukan fungsi ganjil tetapi grafik fungsi tersebut simetri terhadap titik tertentu, misalkan simetri terhadap titik $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Fungsi yang demikian dinamakan fungsi simetri terhadap titik $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, yang pengertiannya diberikan pada definisi berikut.

Definisi 1.22. *Diberikan* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *dan diberikan fungsi* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Fungsi* f *dikatakan* **simetri terhadap titik a** *di* $\mathbb{R}^n$ *jika terdapat fungsi* h *pada* $\mathbb{R}^n$ *yang didefinisikan*

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{a}), \qquad \textit{untuk setiap } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

sedemikian hingga h *fungsi ganjil pada* $\mathbb{R}^n$.

Sebagai contoh pada $\mathbb{R}^2$, fungsi f yang didefinisikan $f(x, y) = (x - 2)(y - 2)^2 + y - 2$ merupakan fungsi simetri terhadap titik $\mathbf{a} = (1, 2)$ sebab fungsi $h(x, y) = f(x + 1, y + 2) = xy^2 + y$ merupakan fungsi ganjil.

1.7 Rangkuman

1. Diberikan $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$. **Bola buka** yang berpusat di titik $\mathbf{x_0}$ dengan jari-jari r, ditulis $B_r(\mathbf{x_0})$, didefinisikan sebagai

$$B_r(\mathbf{x_0}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n |\ ||\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|| < r\}.$$

2. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

   (i). Titik $\mathbf{x}$ disebut **titik-limit** himpunan A jika

$$(A \backslash \{\mathbf{x}\}) \cap B_r(\mathbf{x}) \neq \emptyset, \qquad \text{untuk setiap } r > 0.$$

   Himpunan semua titik-limit A dinotasikan dengan A'.

   (ii). Titik $\mathbf{x}$ disebut **titik-dalam** himpunan A jika terdapat $r > 0$ sehingga

$$B_r(\mathbf{x}) \subseteq A.$$

   Himpunan semua titik-dalam A dinotasikan dengan A^0.

   (iii). Titik $\mathbf{x}$ disebut **titik-batas** himpunan A jika untuk setiap $r > 0$ berlaku

$$B_r(\mathbf{x}) \cap (A \backslash \{\mathbf{x}\}) \neq \emptyset \qquad \text{dan} \qquad B_r(\mathbf{x}) \cap (A^C \backslash \{\mathbf{x}\}) \neq \emptyset.$$

   Himpunan semua titik-batas A dinotasikan dengan ∂A.

3. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

   (i). Himpunan A dikatakan **buka** jika setiap anggota A merupakan titik-dalam himpunan A.

(ii). Himpunan A dikatakan **tutup** jika A^C buka.

4. **Fungsi dua peubah bernilai real**, atau cukup dikatakan **fungsi dua peubah** dari f, adalah suatu aturan yang mengkaitkan setiap pasangan terurut bilangan-bilangan real (x, y) di himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ke tepat satu bilangan real $f(x, y)$. Secara umum fungsi dua peubah f dapat dituliskan sebagai

$$f : D \to \mathbb{R}$$

dengan $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

(i). **Domain** atau **daerah definisi** fungsi dua peubah $f : D \to \mathbb{R}$ adalah himpunan D yang merupakan himpunan semua titik di $\mathbb{R}^2$ sehingga fungsi f terdefinisikan, atau dapat dituliskan sebagai

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| f(x, y) \text{ ada}\}.$$

(ii). **Range** atau **daerah hasil** dari fungsi dua peubah f, dinotasikan R, adalah himpunan semua bilangan real $f(x, y)$ dengan (x, y) elemen-elemen di D domain fungsi f, atau dituliskan

$$R = \{f(x, y) \in \mathbb{R} \big| (x, y) \in D\}$$

5. **Fungsi tiga peubah bernilai real**, atau cukup dikatakan **fungsi tiga peubah** dari f, adalah suatu aturan yang mengkaitkan setiap pasangan terurut bilangan-bilangan real (x, y, z) di himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ke tepat satu bilangan real $f(x, y, z)$. Secara umum fungsi tiga peubah f dapat dituliskan sebagai

$$f : D \to \mathbb{R}$$

dengan $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

6. **Kurva ketinggian** adalah proyeksi kurva permukaan pada bidang-xy yang dibentuk dari perpotongan bidang mendatar $z = c$ (konstanta) dengan permukaan $f(x, y)$. Kumpulan dari kurva ketinggian disebut **peta kontur**.

7. Diberikan fungsi peubah banyak bernilai real $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(i). Fungsi f disebut **fungsi ganjil** jika untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ berlaku $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.

(ii). Fungsi f disebut **fungsi genap** jika untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ berlaku $f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

8. Diberikan $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ dan diberikan fungsi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan **simetri terhadap titik a** di $\mathbb{R}^n$ jika terdapat fungsi h pada $\mathbb{R}^n$ yang didefinisikan

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{a}), \qquad \text{untuk setiap } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

sedemikian hingga h fungsi ganjil pada $\mathbb{R}^n$.

1.8 Latihan Soal

1. Diberikan himpunan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$. Berikan contoh dua titik di $\mathbb{R}^2$ yang merupakan

   a. titik-dalam

   b. titik-limit

   c. titik-batas

   himpunan A.

2. Pada soal nomor 1, tentukan himpunan A', A^0, dan ∂A.

3. Adakah himpunan bagian dari $\mathbb{R}^2$ yang merupakan himpunan buka sekaligus himpunan tutup? Jika ada, berikan contohnya.

4. Diberikan fungsi dua peubah $f(x, y) = 2xy^2 - x^2y$. Evaluasi nilai $f(1, 2)$ dan $f(2, 1)$.

5. Tentukan domain seluas mungkin dari fungsi-fungsi berikut:

   a. $f(x, y) = \ln(x^2 - 2y)$ b. $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$

   c. $f(x, y) = \arctan(y/x)$ d. $f(x, y) = \sin(x^2 - y)$

6. Tentukan daerah asal (*domain*) dari fungsi g berikut dan sketsakan daerah yang dimaksud pada $\mathbb{R}^2$:

$$g(x, y) = \frac{\sin\sqrt{x + y} + \cos\sqrt{y - x}}{x^2 - y^2}$$

7. Tentukan domain dan range fungsi $h(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

8. Sketsakan domain fungsi $h(x, y, z) = \ln(8 - 2x^2 - 2y^2 - z^2)$.

9. Sketsakan grafik fungsi
$$f(x, y) = 25 - x^2 - y^2.$$

10. Sketsakan grafik fungsi $g(x, y) = 12 + 2x - 4y - x^2 - y^2$ dengan cara menggeser grafik fungsi f pada soal nomor 9.

11. Grafik persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, dengan $r > 0$, menyatakan permukaan bola yang berpusat di titik $(0, 0, 0)$ dan berjari-jari r. Dari permukaan bola tersebut, grafik persamaan $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$ dapat ditentukan merupakan permukaan bola yang berpusat di titik apa dan jari-jari berapa?

12. Diberikan fungsi $f(x, y) = (x - y)^2$. Tentukan persamaan dan bentuk penampang masing-masing ketika $x = 0, y = 0, x = y$, dan sketsakan kurva ketinggiannya. Gunakan komputer atau sejenisnya untuk mensketsa grafik permukaan tiga dimensi fungsi f.

13. Sketsakan kurva ketinggian fungsi $f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$ untuk $c = 0, 1, 2$.

14. Sketsakan peta kontur $z = 2xy$.

15. Sketsakan peta kontur persamaan $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5$.

16. Diberikan fungsi tiga peubah $g(x, y, z) = \sqrt{8 - x - y - z}$. Tentukan domain fungsi g.

17. Sketsakan peta kontur dari $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$.

18. Dari fungsi-fungsi dua peubah berikut, periksa apakah merupakan fungsi ganjil, fungsi genap, atau bukan kedua-duanya.

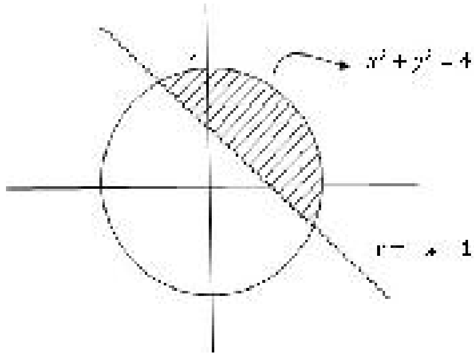
a.	$f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$	b.	$f(x, y) = x^2y - x^3y^2 + x$
c.	$f(x, y) = \arctan(y/x)$	d.	$f(x, y) = \sin(x^2 - y)$

19. Tunjukkan bahwa grafik fungsi $g(x, y) = 2xy - xy^3 + 3x^3y - 1$ simetri terhadaap sumbu-z.

1.9 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu di kelas!

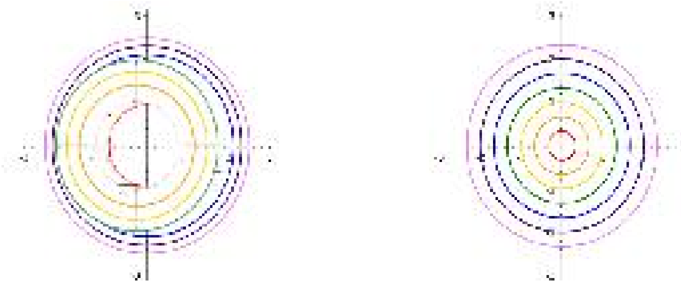
1. Nyatakan daerah yang diarsir pada gambar berikut sebagai himpunan bagian di $\mathbb{R}^2$.



2. Tentukan domain fungsi $g(x, y) = \sin\sqrt{\frac{y-x}{y+x}}$.

3. Tentukan persamaan bidang yang melalui tiga titik $(1, 2, 3), (2, 3, 1)$, dan $(2, -1, 0)$.

4. Berikut diberikan gambar dua koleksi kurva ketinggian. Yang manakah merupakan kerucut dan yang mana merupakan paraboloida. Jelakan!



5. Mungkinkah dua kontur dengan c berbeda berpotongan?

6. Mungkinkah dua buah kontur yang tidak berpotongan mempunyai nilai c yang sama?

7. Periksa perbedaan grafik persamaan $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ dengan $z^2 = 4 - x^2 - y^2$.

8. Misal diberikan grafik fungsi dua peubah f dan diberikan fungsi dua peubah g yang diberikan $g(x, y) = -2f(x - 2, y + 1) + 3$. Coba jelaskan bagaimana grafik fungsi g diperoleh dari grafik fungsi f.

1.10 Daftar Rujukan

1. Feldman, J., Andrew Rechnitzer dan Elyse Yeager, 2021, *Multivariable Calculus*, Creative Commons Attribution, British Columbia.

2. Guichard, D. dan N. Koblitz, 2022, *Single and Multivariable Calculus*, Creative Commons, San Francisco.

3. Savage, A., 2021, *Multivariable Calculus*, University of Ottawa, Ottawa

4. Stewart, J., 2018, *Multivariable Calculus*, Edisi 8, Cengage Learning: Belmont, USA

5. Ubaidillah, F., 2022, Generalisasi Fungsi Genap pada Sistem Koordinat Kutub dan Beberapa Sifatnya, *Prosidiing Seminar Nasional Matematika, Geometri, Statistika, dan Komputasi*, hal. 293-301

6. Ubaidillah, F., 2022, Symmetry Functions with Respect to Any Point in $\mathbb{R}^n$ and Their Properties, *Advances in Computer Science Research*, Vol 96, hal. 109-112

Bab 2

Limit dan Kekontinuan

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa mampu memeriksa suatu fungsi dua peubah atau lebih memiliki limit atau tidak di suatu titik
2. Mahasiswa mampu menghitung limit fungsi dua peubah atau lebih
3. Mahasiswa mampu memeriksa kekontinuan fungsi dua peubah atau lebih di suatu titik
4. Mahasiswa mampu memeriksa kekontinuan fungsi dua peubah atau lebih pada suatu himpunan

Sebelum membahas limit fungsi, terlebih dahulu kembali ke pengertian titik-limit suatu himpunan yang sudah diberikan pada Bab 1 secara umum. Di sini dibahas lebih khusus pengertian titik-limit di $\mathbb{R}^2$ atau di $\mathbb{R}^3$. Elemen (x_0, y_0) di $\mathbb{R}^2$ dikatakan **titik-limit** himpunan $A \subseteq \mathbb{R}^2$ jika untuk setiap $\delta > 0$ terdapat titik (x, y) di A sedemikian hingga $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$. Sebagai contoh, $(0, 0)$ dan $(1, 0)$ merupakan titik-limit dari $A = \{(x, y) \big| 0 \leq x^2 + y^2 < 1\}$. Titik-limit suatu himpunan tidak perlu merupakan elemen himpunan tersebut.

Pada $\mathbb{R}$, barisan (x_n) dapat mendekati titik a dalam dua cara, yakni dari arah kiri atau kanan. Tetapi pada $\mathbb{R}^n$ dengan $n \geq 2$, barisan $(\mathbf{x_n})$ dapat mendekati titik $\mathbf{a}$ dengan tak berhingga banyak cara. Sebagai contoh pada $\mathbb{R}^2$, untuk mendekati titik $(0, 0)$ dapat dilakukan sepanjang sumbu-x, sumbu-y, garis $y = mx$, kurva $y = x^2$, dan lain sebagainya. Untuk itu, dalam memahami limit fungsi n peubah di suatu titik $\mathbf{a}$ di $\mathbb{R}^n$, tidak cukup dengan mengambil pendekatan $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ dalam beberapa cara dan limit fungsinya sama lalu disimpulkan ia punya limit.

2.1 Limit Fungsi

Untuk mengawali subbab ini dikenalkan pengertian limit fungsi dua peubah di suatu titik.

Definisi 2.1. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) titik-limit A, dan diberikan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Bilangan L dikatakan* **limit** *fungsi f di (x_0, y_0) jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $(x, y) \in A$ dan $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ maka berlaku*

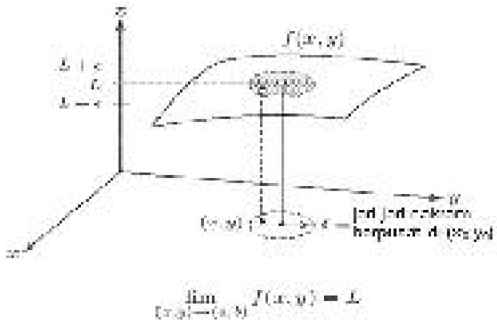
$$|f(x, y) - L| < \epsilon.$$

Jika demikian, dikatakan f mempunyai limit L di (x_0, y_0) dan ditulis

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Sebagai ilustrasi limit fungsi dua peubah diberikan pada Gambar 2.1.

Pada Definisi 2.1, untuk membicarakan limit fungsi f di titik (x_0, y_0) tidak diperhatikan apakah nilai f di (x_0, y_0) terdefinisi atau tidak, atau dengan kata lain titik (x_0, y_0) tidak perlu menjadi elemen domain f.



Gambar 2.1: Ilustrasi limit fungsi f di titik (x_0, y_0)

Contoh 2.2. *Buktikan*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Penyelesaian: Pada contoh ini, fungsi $f(x, y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ terdefinisi pada $\mathbb{R}$ kecuali di titik $(0, 0)$. Cukup jelas bahwa titik $(0, 0)$ merupakan titik-limit domain fungsi f. Berdasarkan Definisi 2.1, untuk setiap $\epsilon > 0$ yang diberikan, akan dicari $\delta > 0$ sehingga jika $\sqrt{(x-0)^2 - (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ maka berlaku $\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$.
Karena $|x^3 - y^3| \leq |x|x^2 + |y|y^2$ dan $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, maka untuk setiap $(x, y) \neq (0, 0)$ diperoleh

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| &= \frac{|x^3 - y^3|}{|x^2 + y^2|} \leq \frac{|x|x^2 + |y|y^2}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, pilih $\delta < \epsilon$.
Dengan demikian

$$\left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta < \epsilon.$$

Nilai L pada Definisi 2.1 tidak bergantung dari arah mana (x, y) mendekati (x_0, y_0). Oleh karena itu, untuk memeriksa sutu fungsi tidak memiliki limit di titik (x_0, y_0), cukup dengan mengambil dua kurva yang melewati titik (x_0, y_0) dan ditunjukkan bahwa nilai limitnya berbeda jika didekati dari dua kurva tersebut. Berikut teorema yang berkenaan dengan hal tersebut.

Teorema 2.3. *Diberikan dua kurva C_1 dan C_2 pada $\mathbb{R}^2$ keduanya melalui titik (x_0, y_0). Jika $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = L_1$ sepanjang kurva C_1 dan $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = L_2$ sepanjang kurva C_2 dengan $L_1 \neq L_2$, maka f tidak mempunyai limit di titik (x_0, y_0).*

Contoh 2.4. *Tunjukkan bahwa fungsi*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

tidak mempunyai limit di titik $(0,0)$.

Penyelesaian: Ambil dua kurva C_1 dan C_2 yang melalui titik $(0,0)$ dengan $C_1 : y = 0$ dan $C_2 : x = 0$. Oleh karena itu, jika (x,y) menuju $(0,0)$ melalui C_1, maka

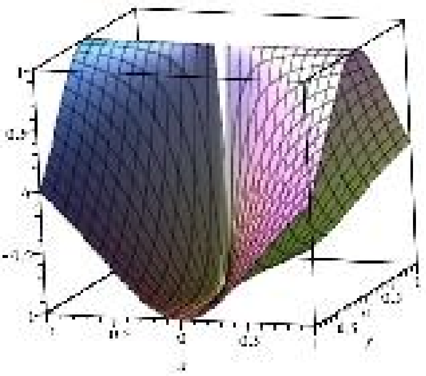
$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1. \end{aligned}$$

Sedangkan, jika (x,y) menuju $(0,0)$ melalui C_2, maka

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{y^2}{y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -1 = -1. \end{aligned}$$

Karena kedua nilai limit di atas tidak sama, disimpulkan $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ tidak mempunyai limit di $(0,0)$. Grafik fungsi f pada domain $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ diberikan pada Gambar 2.2.

Adakalanya untuk memeriksa suatu fungsi memiliki atau tidak memiliki limit di suatu titik, tidak cukup dengan mengambil beberapa



Gambar 2.2: Grafik fungsi $(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

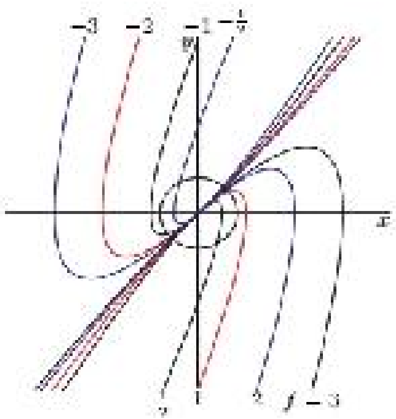
kurva yang melewati titik limit dan ternyata memiliki nilai limit fungsi yang sama sepanjang kurva menuju titik limitnya lalu disimpulkan mempunyai limit. Ini tidak menjamin fungsi tersebut mempunyai limit, seperti diberikan contoh berikut.

Contoh 2.5. *Periksa, apakah fungsi*

$$f(x, y) \quad = \quad \begin{cases} \frac{(2x-y)^2}{x-y} & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

mempunyai limit di titik $(0, 0)$ *?*

Penyelesaian: Misalkan diambil beberapa kurva yang melewati titik $(0, 0)$, diantaranya $C_1 : y = 0, C_2 : x = 0, C_3 : y = -x, C_4 : y = x/2, C_5 : y = x^2, C_6 : x = y^2$, dan $C_7 : y = \sqrt{x}$. Untuk setiap $(x, y) \to (0, 0)$ sepanjang $C_n (n = 1, 2, \cdots, 7)$ diperoleh $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Namun hal ini tidak bisa disimpulkan $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Kenyataannya, limit$f(x, y)$ tidak ada apabila $(x, y) \to (0, 0)$. Untuk menunjukkan hal itu, amati bahwa jika diambil $r > 0$, $f(x, y)$ mempunyai nilai-nilai dari $-\infty$ hingga ∞ pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Untuk setiap sudut $-\infty < c < \infty$, kurva ketinggian $f(x, y) = c$ berpotongan dengan lingkaran tersebut (Gambar 2.3.). Akibatnya, tidak terdapat bilangan L sedemikian hingga $f(x, y)$ mendekati L bilamana (x, y) cukup dekat ke $(0, 0)$. Hal ini menunjukkan bahwa f tidak mempunyai limit di titik $(0, 0)$.



Gambar 2.3: Kurva-kurva ketinggian $f(x,y)=c$ selalu berpotongan dengan lingkaran $x^2+y^2=r^2$

Teorema 2.6. Teorema Apit *Diberikan fungsi-fungsi dua peubah* $f,g,h : D\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sedemikian hingga* $f(x,y)\leq g(x,y)\leq h(x,y)$ *untuk setiap* $(x,y)\in D$. *Jika*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y),$$

maka g *mempunyai limit di* (x_0,y_0) *dan*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L,$$

Contoh 2.7. *Evaluasi*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4 \sin\left(\frac{1}{x^2+|y|}\right).$$

Penyelesaian: Telah diketahui bahwa $-1\leq \sin\left(\frac{1}{x^2+|y|}\right)\leq 1$, kemudian dengan mengalikan semua ruas dengan x^4, diperoleh

$$-x^4 \leq x^4 \sin\left(\frac{1}{x^2+|y|}\right) \leq x^4.$$

Selanjutnya, diambil limit di semua ruas, diperoleh

$$0=\lim_{(x,y)\to(0,0)} -x^4 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4 \sin\left(\frac{1}{x^2+|y|}\right) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4 = 0.$$

Berdasarkan Teorema Apit, disimpulkan

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4 \sin\left(\frac{1}{x^2+|y|}\right) = 0.$$

Beberapa sifat limit fungsi, diantaranya diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.8. *Diberikan* $A \subseteq \mathbb{R}^2$, *fungsi* $f, g : A \to \mathbb{R}$, *dan* (x_0, y_0) *titik-limit* A. *Jika* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ *dan* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$, *maka*

a. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL_1$, *untuk setiap* $k \in \mathbb{R}$;

b. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big[f(x,y) + g(x,y)\big] = L_1 + L_2$;

c. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = L_1L_2$;

d. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$, *asalkan* $L_2 \neq 0$ *dan* $g(x,y) \neq 0$ *untuk setiap* (x,y) *di* A;

e. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big[f(x,y)\big]^n = L_1^n$, *untuk setiap bilangan asli* n.

Contoh 2.9. *Hitung limit berikut*

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2xy - y^2}{4x+3y}.$$

Penyelesaian: Karena penyebut, $4x + 3y$ tidak nol di titik $(x,y) = (2,1)$, dengan demikian diperoleh

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{2xy - y^2}{4x+3y} = \frac{\lim_{(x,y)\to(2,1)} 2xy - y^2}{\lim_{(x,y)\to(2,1)} 4x+3y} = \frac{2(2)(1)-(1)^2}{4(1)+3(2)} = \frac{3}{10}.$$

Untuk pengertian limit fungsi tiga peubah diberikan definisi berikut.

Definisi 2.10. *Diberikan* $A \subseteq \mathbb{R}^3$, (x_0, y_0, z_0) *titik-limit* A, *dan diberikan fungsi* $f : A \to \mathbb{R}$. *Bilangan* L *dikatakan* **limit** *fungsi* f *di* (x_0, y_0, z_0) *jika untuk setiap* $\epsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian hingga jika* $(x,y,z) \in A$ *dan* $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta$ *maka berlaku*

$$|f(x,y,z) - L| < \epsilon.$$

Jika demikian, dikatakan f *mempunyai limit* L *di* (x_0, y_0, z_0) *dan dituliskan*

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = L.$$

Contoh 2.11. *Evaluasi*

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-2)} \frac{x^2y-2z}{3x-4y+z}$$

Penyelesaian: Karena

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-2)} x^2y-2z=4$$

dan

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-2)} 3x-4y+z=1\neq 0,$$

maka

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-2)} \frac{x^2y-2z}{3x-4y+z} &= \frac{\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-2)} x^2y-2z}{\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-2)} 3x-4y+z}\\ &= \frac{4}{1}=4.\end{aligned}$$

Secara umum, untuk pengertian limit fungsi peubah banyak diberikan definisi berikut.

Definisi 2.12. *Diberikan $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x_0}$ titik-limit A, dan diberikan fungsi $f:A\to\mathbb{R}$. Bilangan L dikatakan* **limit** *fungsi f di $\mathbf{x_0}$ jika untuk setiap $\epsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian hingga jika $\mathbf{x}\in A$ dan $0<||\mathbf{x}-\mathbf{x_0}||<\delta$ maka berlaku*

$$|f(\mathbf{x})-L|<\epsilon.$$

Jika demikian, dikatakan f mempunyai limit L di $\mathbf{x_0}$ dan dituliskan

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})=L.$$

2.2 Kekontinuan Fungsi

Untuk mengawali subbab ini, diberikan pengertian fungsi kontinu di suatu titik.

Definisi 2.13. *Diberikan $A\subseteq\mathbb{R}^2$, fungsi $f:A\to\mathbb{R}$, dan $(x_0,y_0)\in A$. Fungsi f dikatakan* **kontinu** *di titik (x_0,y_0) jika untuk setiap $\epsilon>0$ terdapat $\delta>0$ sedemikian hingga jika $(x,y)\in A$ dan $0\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ maka $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$.*
Jika f gagal kontinu di (x_0,y_0) maka f dikatakan **diskontinu** *di (x_0,y_0).*

Berbeda dengan definisi limit fungsi f di titik (x_0, y_0) dimana f tidak harus terdefinisi di titik (x_0, y_0), pada fungsi kontinu di titik (x_0, y_0) nilai $f(x_0, y_0)$ harus ada. Definisi fungsi f kontinu di titik (x_0, y_0) pada Definisi 2.13 ekivalen dengan mengatakan

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Contoh 2.14. *Tunjukkan bahwa fungsi* $f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ *kontinu di titik* $(0,0)$.

Penyelesaian: Diperhatikan, $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Untuk setiap $\epsilon > 0$ yang diberikan, pilih $\delta < \sqrt{\epsilon}$. Jadi, jika $0 \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ diperoleh

$$\begin{aligned} \Big|f(x,y) - f(0,0)\Big| &= \left|\frac{xy}{1+x^2+y^2} - 0\right| \\ &= \frac{|x||y|}{1+x^2+y^2} \\ &\leq |x||y| \leq \delta^2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.13, disimpulkan f kontinu di titik $(0,0)$.

Beberapa sifat fungsi kontinu, diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.15. *Diberikan f dan g keduanya fungsi bernilai real yang terdefinisi pada $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$, dan $b \in \mathbb{R}$. Jika f dan g keduanya kontinu di titik (x_0, y_0), maka*

(i). $f+g, f-g, fg$, dan bf merupakan fungsi-fungsi kontinu di titik (x_0, y_0).

(ii). Jika $h : A \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu di $(x_0, y_0) \in A$ dan $f(x,y) \neq 0$ untuk setiap (x,y) di A, maka fungsi f/h kontinu di titik (x_0, y_0).

Bukti: Akan dibuktikan bagian (i) untuk $f+g$, bukti bagian lain dapat digunakan sebagai latihan.
Diketahui fungsi f dan g keduanya kontinu di titik (x_0, y_0), sehingga diperoleh

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0),$$

dan

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = g(x_0, y_0).$$

Berdasarkan sifat limit, diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)+g(x,y)] &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \\ &\quad + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \\ &= f(x_0,y_0)+g(x_0,y_0) \\ &= (f+g)(x_0,y_0).\end{aligned}$$

Terbukti fungsi $f+g$ kontinu di (x_0, y_0). □

Komposisi dua fungsi kontinu juga merupakan fungsi kontinu, seperti diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.16. *Diberikan g fungsi dua peubah dengan domain $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dan range $R \subseteq \mathbb{R}$. Misalkan g kontinu di suatu titik (x_0, y_0) di D dan didefinisikan $z_0 = g(x_0, y_0)$. Jika f kontinu di z_0, maka fungsi komposisi $f \circ g$ kontinu di (x_0, y_0).*

Contoh 2.17. *Jelaskan kekontinuan fungsi*

$$f(x,y) = \sin(x^2 - 2xy + y^3)$$

Penyelesaian: Nyatakan $f(x,y) = (g \circ h)(x,y)$ dengan $h(x,y) = x^2 - 2xy + y^3$ dan $g(x) = \sin x$. Karena h kontinu di setiap titik $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dan fungsi g kontinu pada $\mathbb{R}$, maka fungsi f kontinu pada $\mathbb{R}^2$.

Definisi 2.18. *Fungsi dua peubah bebas $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dikatakan* **kontinu** *pada A jika f kontinu di setiap titik (x,y) di A.*

Contoh 2.19. *Periksa, apakah fungsi*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

kontinu pada $\mathbb{R}^2$?

Penyelesaian: Diperhatikan bahwa $f(0,0) = 0$. Selanjutnya, dari hasil Contoh 2.4, menunjukkan bahwa f tidak mempunyai limit di titik $(0,0)$. Jadi, f tidak kontinu di titik $(0,0)$, akibatnya f tidak kontinu pada $\mathbb{R}^2$.

Bisa jadi suatu fungsi itu tidak kontinu di suatu daerah tertentu dikarenakan tidak kontinu di beberapa titik, namun dengan mendefinisikan nilai fungsi di titik-titik yang tidak kontinu menjadikan fungsi kontinu pada suatu daerah tertentu. Sebagai contoh, fungsi $f(x, y) = 3x^2y/(x^2 + y^2)$ tidak kontinu pada $\mathbb{R}^2$ karena f tidak kontinu di titik $(0, 0)$ dikarenakan tidak terdefinisi di titik tersebut. Dengan mendefinisikan $f(0, 0) = 0$, menjadikan fungsi f kontinu pada $\mathbb{R}^2$.

Contoh 2.20. *Tentukan daerah pada bidang-xy dimana fungsi* $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ *kontinu.*

Penyelesaian: Bahwasannya fungsi f terdefinisi apabila $x^2+y^2-1 > 0$, yang mana merupakan daerah di luar lingkaran satuan berpusat di titik asal atau dapat dituliskan $D = \{(x, y)\big|x^2+y^2 > 1\}$. Jika diperiksa bahwa f kontinu di setiap (x, y) di D. Oleh karena itu, f kontinu pada daerah D.

Fungsi polinomial, atau cukup dikatakan **polinomial** dua peubah, adalah jumlahan suku-suku dalam bentuk cx^my^n dengan c konstanta dan m dan n bilangan-bilangan bulat nonnegatif, yakni

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x^iy^j.$$

Sedangkan **fungsi rasional** adalah rasio dari polinomial-polinomial. Sebagai contoh, fungsi

$$f(x, y) = 2x^5 - 3x^3y^2 + 6xy^3 - 4y + 7$$

merupakan polinomial, sedangkan fungsi

$$g(x, y) = \frac{x^2y + xy - y + 1}{x^2 + y^2 - xy + 4}$$

merupakan fungsi rasional.
Polinomial dan fungsi rasional ini kontinu pada domainnya, seperti diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.21. *Fungsi polinomial dan fungsi rasional kontinu pada domainnya.*

Contoh 2.22. *Evaluasi kekontinuan fungsi*

$$f(x, y) = x^3y^2 - 5x^2y^2 - x^2y + 6y + 4.$$

Penyelesaian: Karena $f(x, y) = x^3y^2-5x^2y^2-x^2y+6y+4$ *polinomial, maka* f *kontinu dimana-mana.*

Contoh 2.23. *Tentukan dimana fungsi*

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

kontinu.

Penyelesaian: Fungsi f merupakan fungsi rasional yang terdefinisi pada $\mathbb{R}^2$ kecuali di setiap titik (x,y) di $D = \{(x,y) \big| x^2 = y^2\}$. Dengan demikian fungsi f kontinu pada $\mathbb{R}^2 \backslash D$.

Contoh 2.24. *Tentukan dimana fungsi*

$$g(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

kontinu.

Penyelesaian: Fungsi g kontinu untuk setiap $(x,y) \neq (0,0)$ karena merupakan fungsi rasional. Selanjutnya, karena

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0 = g(0,0)$$

maka disimpulkan g kontinu di $(0,0)$, sehingga g kontinu pada $\mathbb{R}^2$.

Untuk pengertian fungsi tiga peubah kontinu, diberikan definisi berikut.

Definisi 2.25. *Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^3$, fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, dan $(x_0, y_0, z_0) \in A$. Fungsi f dikatakan* **kontinu** *di titik (x_0, y_0, z_0) jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $(x,y,z) \in A$ dan $0 \leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta$ maka*

$$|f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0)| < \epsilon$$

.

Contoh 2.26. *Buktikan fungsi tiga peubah berikut*

$$g(x,y,z) \quad = \quad \begin{cases} \frac{2x^3-y^3+3z^3}{x^2+y^2+z^2} & ,(x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ,(x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

kontinu di titik $(0,0,0)$.

Penyelesaian: Untuk membuktikan g kontinu di titik $(0,0,0)$, cukup ditunjukkan bahwa

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} g(x,y,z) = 0 = g(0,0,0).$$

Berdasarkan Definisi 2.25, untuk sebarang $\epsilon > 0$ harus dibuktikan terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $\sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta$ maka berlaku

$$\left|\frac{2x^3 - y^3 + 3z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| < \epsilon.$$

Berdasarkan sifat nilai mutlak dan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^3 - y^3 + 3z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| &= \frac{\left|2x^3 - y^3 + 3z^3\right|}{\left|x^2+y^2+z^2\right|} \\ &\le \frac{2|x|x^2 + |y|y^2 + 3|z|z^2}{x^2+y^2+z^2}.\end{aligned}$$

Karena berlaku $|x| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}, |y| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, dan $|z| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^3 - y^3 + 3z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| &\le \frac{(2x^2+y^2+3z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} \\ &\le \frac{3(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} \\ &= 3\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ &\le 3\delta\end{aligned}$$

Dengan mengambil $\delta < \epsilon/3$, sehingga diperoleh

$$\left|\frac{2x^3 - y^3 + 3z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| \le 3\delta < \epsilon.$$

Jadi terbukti bahwa g kontinu di titik $(0,0,0)$. □

2.3 Rangkuman

1. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) titik-limit A, dan diberikan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Bilangan L dikatakan **limit** fungsi f di (x_0, y_0)

jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $(x, y) \in A$ dan $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ maka berlaku

$$|f(x, y) - L| < \epsilon.$$

Jika demikian, dikatakan f mempunyai limit L di (x_0, y_0) dan dituliskan

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

2. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^2$, fungsi $f, g : A \to \mathbb{R}$, dan (x_0, y_0) titik-limit A. Jika $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L_1$ dan $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = L_2$, maka

   a. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x, y) = kL_1$, untuk setiap $k \in \mathbb{R}$;
   b. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big[f(x, y) + g(x, y)\big] = L_1 + L_2$;
   c. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = L_1L_2$;
   d. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$, asalkan $L_2 \neq 0$ dan $g(x, y) \neq 0$ untuk setiap (x, y) di A;
   e. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big[f(x, y)\big]^n = L_1^n$, untuk setiap bilangan asli n.

3. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^3$, (x_0, y_0, z_0) titik-limit A, dan diberikan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Bilangan L dikatakan **limit** fungsi f di (x_0, y_0, z_0) jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $(x, y, z) \in A$ dan $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$ maka berlaku

   $$|f(x, y, z) - L| < \epsilon.$$

   Jika demikian, dikatakan f mempunyai limit L di (x_0, y_0, z_0) dan dituliskan

   $$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L.$$

4. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x_0}$ titik-limit A, dan diberikan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Bilangan L dikatakan **limit** fungsi f di $\mathbf{x_0}$ jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $\mathbf{x} \in A$ dan $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|| < \delta$ maka berlaku

   $$|f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon.$$

Jika demikian, dikatakan f mempunyai limit L di $\mathbf{x_0}$ dan dituliskan

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = L.$$

5. Definisi fungsi kontinu

   (i). Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^2$, fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, dan $(x_0, y_0) \in A$. Fungsi f dikatakan **kontinu** di titik (x_0, y_0) jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $(x, y) \in A$ dan $0 \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ maka $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$.
   Jika f gagal kontinu di (x_0, y_0) maka f dikatakan **diskontinu** di (x_0, y_0).

   (ii). Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^3$, fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, dan $(x_0, y_0, z_0) \in A$. Fungsi f dikatakan **kontinu** di titik (x_0, y_0, z_0) jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $(x, y, z) \in A$ dan $0 \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$ maka $|f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)| < \epsilon$.

6. Diberikan f dan g keduanya fungsi bernilai real yang terdefinisi pada $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$, dan $b \in \mathbb{R}$. Jika f dan g keduanya kontinu di titik (x_0, y_0), maka

   a. $f + g, f - g, fg$, dan bf merupakan fungsi-fungsi kontinu di (x_0, y_0).
   b. Jika $h : A \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu di $(x_0, y_0) \in A$ dan $f(x, y) \neq 0$ untuk setiap (x, y) di A, maka fungsi f/h kontinu di (x_0, y_0).

7. Fungsi dua peubah bebas $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dikatakan **kontinu** pada A jika f kontinu di setiap titik (x, y) di A.

8. Fungsi polinomial dan fungsi rasional kontinu pada domainnya.

2.4 Latihan Soal

1. Gunakan Definisi 2.1 untuk membuktikan

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

2. Tunjukkan bahwa

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{x^2+y^2-2x+1}$$

tidak ada.

3. Tunjukkan bahwa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^5}{x^8+y^{10}}$$

tidak ada.

4. Diberikan fungsi dua peubah $f(x,y)=x^2-2y$. Tentukan

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

dan

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,y)-f(1,y)}{h}.$$

5. Hitung nilai limit berikut

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}.$$

6. Hitung nilai limit berikut

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}.$$

7. Jelaskan, mengapa limit berikut tidak ada:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$$

8. Evaluasi limit berikut atau tunjukkan bahwa limitnya tidak ada

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

9. Evaluasi limit berikut atau tunjukkan bahwa limitnya tidak ada

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2-2x^2y+x^2}{(x^2+y^2-2y+1)^2}$$

10. Evaluasi limit berikut atau tunjukkan limitnya tidak ada:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+z^2+2xz+xy+yz}{x+y+z}$$

11. Gunakan Teorema Apit untuk menghitung limit berikut

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

12. Gunakan Teorema Apit untuk menghitung limit berikut

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

13. Diberikan fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Periksa, apakah fungsi g kontinu di titik $(0,0)$.

14. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & ,x \neq 0 \\ y & ,x = 0 \end{cases}$$

Tentukan titik-titik diskontinu fungsi f.

2.5 Bahan Diskusi

Coba diskusikan dengan tema-temanmu di kelas!

1. Diberikan f fungsi bernilai real yang terdefinisi pada $A \subseteq \mathbb{R}^3$, (x_0, y_0, z_0) titik-limit A, dan $L \in \mathbb{R}$. Berikan definisi $\epsilon - \delta$ yang menyatakan bahwa L adalah nilai limit fungsi f di (x_0, y_0, z_0), yang selanjutnya ditulis

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = L.$$

2. Diberikan f fungsi bernilai real yang terdefinisi pada $A \subseteq \mathbb{R}^3$, dan $(x_0, y_0, z_0) \in A$. Berikan definisi fungsi f kontinu di titik (x_0, y_0, z_0).

3. Diskusikan kekontinuan fungsi

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy} & , xy \neq 0 \\ 1 & , xy = 0 \end{cases}$$

2.6 Daftar Rujukan

1. Feldman, J., Andrew Rechnitzer dan Elyse Yeager, 2021, *Multivariable Calculus*, Creative Commons Attribution, British Columbia.

2. Guichard, D. dan N. Koblitz, 2022, *Single and Multivariable Calculus*, Creative Commons, San Francisco.

3. Kim, S., 2022, *Multivariable Calculus*, Mississippi State University, Michigan

4. Savage, A., 2021, *Multivariable Calculus*, University of Ottawa, Ottawa

5. Shimamoto, D., 2019, *Multivariable Calculus*, Swarthmore College, Philadelphia

6. Stewart, J., 2018, *Multivariable Calculus*, Edisi 8, Cengage Learning: Belmont, USA

Bab 3

Turunan Parsial dan Keterdiferensialan

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian turunan parsial dan turunan total fungsi peubah banyak
2. Mahasiswa dapat mendeskripsikan tafsiran geometris dari turunan parsial fungsi dua peubah
3. Mahasiswa dapat menentukan turunan parsial pertama maupun tingkat tinggi dari fungsi peubah banyak
4. Mahasiswa dapat menentukan persamaan bidang singgung permukaan di suatu titik
5. Mahasiswa dapat menentukan nilai hampiran dari fungsi peubah banyak dengan pendekatan linier

Berbeda dengan fungsi satu peubah, pada fungsi peubah banyak dikenal istilah turunan parsial dan turunan total.

3.1 Turunan Parsial

Turunan parsial dari fungsi dua peubah digunakan untuk mengetahui gradien atau perubahan ketinggian dari suatu kurva yang merupakan perpotongan permukaan $z = f(x, y)$ dengan bidang yang sejajar dengan bidang-xy atau bidang-yz. Oleh karena itu, untuk fungsi dua peubah $z = f(x, y)$, dikenal dua macam turunan parsial, yakni turunan parsial terhadap x dan terhadap y.

Definisi 3.1. *Diberikan fungsi dua peubah $f(x, y)$ bernilai real.*

a. **Turunan parsial** *fungsi f terhadap x di titik (x_0, y_0), ditulis $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$ atau $f_x(x_0, y_0)$, adalah*

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

jika limit di ruas kanan ada. Dalam kasus limit di ruas kanan tidak ada, maka dikatakan f **tidak terdiferensialkan** *secara parsial terhadap x di titik (x_0, y_0).*

b. **Turunan parsial** *fungsi f terhadap y di titik (x_0, y_0), ditulis $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ atau $f_y(x_0, y_0)$, adalah*

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

jika limit di ruas kanan ada. Dalam kasus limit di ruas kanan tidak ada, maka dikatakan f **tidak terdiferensialkan** *secara parsial terhadap y di titik (x_0, y_0).*

Contoh 3.2. *Diberikan fungsi dua peubah*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x - y} & , y \neq x \\ 0 & , y = x \end{cases}$$

Tentukan $f_x(0, 0)$ jika ada.

Penyelesaian: Untuk mengevaluasi $f_x(0,0)$, diberikan $y = 0$ dan tentukan turunan fungsi satu peubah

$$f(x,0) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

terhadap x di $x = 0$. Dengan menggunakan definisi turunan parsial di suatu titik, diperoleh

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos h - 1}{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{2h} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Contoh 3.3. *Diberikan fungsi dua peubah yang didefinisikan*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y & , y \geq x \\ xy^2 & , y < x \end{cases}$$

Dengan menggunakan definisi turunan parsial, hitunglah
a. $f_x(0,0)$ *b.* $f_x(1,1)$
jika ada.

Penyelesaian: a. Berdasarkan definisi turunan parsial

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

Untuk $h > 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h0^2 - 0^2 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0 \end{aligned}$$

dan untuk $h < 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 0 - 0^2 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} 0 = 0\end{aligned}$$

Karena nilai limit kanan dan limit kiri di atas sama, disimpulkan $f_x(0,0) = 0$.
b. Untuk $h > 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1\end{aligned}$$

dan untuk $h < 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2+h = 2\end{aligned}$$

Karena nilai limit kanan dan limit kiri di atas tidak sama, disimpulkan f tidak terdiferensialkan secara parsial terhadap x di titik $(1,1)$.

Definisi 3.4. *Diberikan f fungsi dua peubah bebas x dan y. Turunan parsial fungsi f masing-masing terhadap x dan y adalah sebuah fungsi f_x dan f_y yang didefinisikan oleh*

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

dan

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

Jika $z = f(x,y)$, dituliskan

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = D_x f$$

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = D_y f.$$

Untuk mendapatkan f_x adalah dengan memandang y sebagai konstanta dan menurunkan f terhadap x. Dengan cara serupa, untuk mendapatkan f_y adalah dengan memandang x sebagai konstanta dan menurunkan f terhadap y.

Contoh 3.5. *Diberikan* $f(x,y) = x^3y - 2x^2y^2 + y^2$, *tentukan* $f_x(1,2)$ *dan* $f_y(1,2)$.

Penyelesaian: Dengan menganggap y sebagai konstanta dan menurunkan f terhadap x diperoleh

$$f_x(x,y) = 3x^2y - 4xy^2,$$

sehingga

$$f_x(1,2) = 3(1)^2(2) - 4(1)(2)^2 = -10.$$

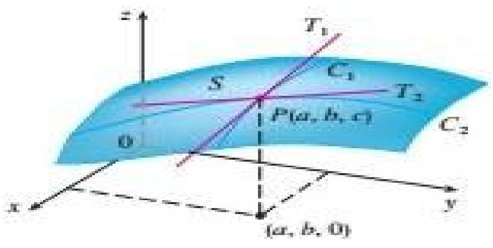
Dengan menganggap x sebagai konstanta dan menurunkan f terhadap y diperoleh

$$f_y(x,y) = x^3 - 4x^2y + 2y,$$

sehingga

$$f_y(1,2) = (1)^3 - 4(1)^2(2) + 2(2) = -3.$$

Sebagai interpretasi geometrik dari turunan parsial dijelaskan sebagai berikut. Jika $z = f(x,y)$ menyatakan permukaan S dan $f(a,b) = c$, maka titik $P(a,b,c)$ berada pada permukaan S. Dengan mengambil $y = b$, kurva C_1 pada bidang vertikal $y = b$ berpotongan dengan permukaan S. Begitu pula, bidang vertikal $x = a$ berpotongan dengan S membentuk kurva C_2. Kedua kurva C_1 dan C_2 ini melewati titik P seperti diberikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1: Turunan parsial f di titik (a,b) merupakan gradien-gradien garis singgung kurva C_1 dan C_2

Contoh 3.6. *Diberikan fungsi* $f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{y-1}\right)$. *Tentukan* f_x *dan* f_y.

Penyelesaian: Dengan memandang y sebagai konstanta dan dengan menggunakan Aturan Rantai fungsi satu peubah, diperoleh

$$f_x = \cos\left(\frac{x}{y-1}\right)\frac{1}{y-1} = \frac{\cos\left(\frac{x}{y-1}\right)}{y-1}.$$

Dengan memandang x sebagai konstanta dan dengan menggunakan Aturan Rantai fungsi satu peubah, diperoleh

$$f_y = \cos\left(\frac{x}{y-1}\right)\cdot\left(-\frac{x}{(y-1)^2}\right) = -\frac{x\cos\left(\frac{x}{y-1}\right)}{(y-1)^2}$$

Contoh 3.7. *Tentukan* $\partial z/\partial x$ *jika* z *didefinisikan secara implisit sebagai fungsi dari* x *dan* y *dengan persamaan*

$$x^2 + y^2 + z^2 + x^2yz = 2.$$

Penyelesaian: Dengan mendiferensialkan secara implisit terhadap x kedua ruas persamaan, diperoleh

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} + 2xyz + x^2y\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Dengan menyelesaikan untuk $\partial z/\partial x$, diperoleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2\frac{x + xyz}{2z + x^2y}.$$

Untuk turunan parsial fungsi tiga peubah, pengertiannya diberikan pada definisi berikut.

Definisi 3.8. *Diberikan fungsi tiga peubah* $f(x,y,z)$ *bernilai real.*

a. **Turunan parsial** *fungsi* f *terhadap* x *di titik* (x_0, y_0, z_0), *ditulis* $\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0,z_0)$ *atau* $f_x(x_0,y_0,z_0)$, *adalah*

$$f_x(x_0,y_0,z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0,z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

jika limit di ruas kanan ada. Dalam kasus limit di ruas kanan tidak ada, maka dikatakan f **tidak terdiferensialkan** *secara parsial terhadap* x *di titik* (x_0, y_0, z_0).

b. **Turunan parsial** *fungsi f terhadap y di titik (x_0, y_0, z_0), ditulis $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0, z_0)$ atau $f_y(x_0, y_0, z_0)$, adalah*

$$f_y(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

jika limit di ruas kanan ada. Dalam kasus limit di ruas kanan tidak ada, maka dikatakan f **tidak terdiferensialkan** *secara parsial terhadap y di titik (x_0, y_0, z_0).*

c. **Turunan parsial** *fungsi f terhadap z di titik (x_0, y_0, z_0), ditulis $\frac{\partial}{\partial z} f(x_0, y_0, z_0)$ atau $f_z(x_0, y_0, z_0)$, adalah*

$$f_z(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

jika limit di ruas kanan ada. Dalam kasus limit di ruas kanan tidak ada, maka dikatakan f **tidak terdiferensialkan** *secara parsial terhadap z di titik (x_0, y_0, z_0).*

Secara umum, jika w adalah fungsi n peubah, $w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, turunan parsial w terhadap x_i adalah

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1} \cdots, x_n) - f(x_i, x_2, \cdots, x_n)}{h}$$

dan dituliskan

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}.$$

Contoh 3.9. *Tentukan $f_z(x, y, z)$ jika $f(x, y, z) = e^{xz} \sin y$ dan tentukan $f_z(2, \pi/2, 0)$.*

Penyelesaian: Dengan menganggap x dan y sebagai konstanta, dan menurunkan f terhadap z diperoleh

$$f_z(x, y, z) = xe^{xz} \sin y,$$

dan

$$f_z(2, \pi/2, 0) = 2e^0 \sin(\pi/2) = 2.$$

3.2 Turunan Parsial Tingkat Tinggi

Jika f fungsi dua peubah bebas x dan y, maka turunan parsialnya, f_x dan f_y, disebut **turunan parsial pertama** dari f. Turunan parsial pertama dari f fungsi dua peubah x dan y juga merupakan fungsi dua peubah bebas x dan y yang bisa berbeda (bisa juga sama) dengan f. Dengan demikian, turunan parsial f_x terhadap x, turunan parsial f_x terhadap y, turunan parsial f_y terhadap x, dan turunan parsial f_y terhadap y, masing-masing ditulis sebagai f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, dan f_{yy}, disebut **turunan parsial kedua** dari fungsi f, adalah fungsi-fungsi yang dinyatakan sebagai berikut:

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

dan

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Contoh 3.10. *Diberikan fungsi* $f(x, y) = x^3y - 2x^2y^2 + y^2$. *Tentukan semua turunan parsial kedua dari* f.

Penyelesaian: Dari Contoh 3.5, diperoleh

$$f_x(x, y) = 3x^2y - 4xy^2,$$

dan

$$f_y(x, y) = x^3 - 4x^2y + 2y.$$

Dengan demikian, dengan menurunkan f_x terhadap x diperoleh

$$f_{xx} = 6xy - 4y^2,$$

dengan menurunkan f_x terhadap y diperoleh

$$f_{xy} = 3x^2 - 8xy,$$

dengan menurunkan f_y terhadap x diperoleh

$$f_{yx} = 3x^2 - 8xy,$$

dan dengan menurunkan f_y terhadap y diperoleh

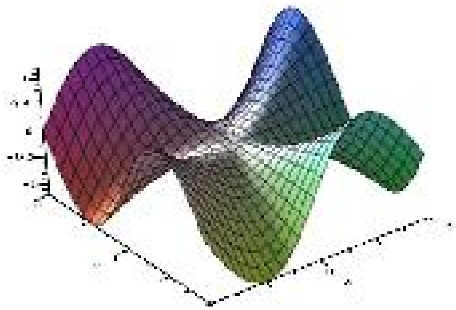
$$f_{yy} = -4x^2 + 2.$$

Dari Contoh 3.10 terlihat bahwa $f_{xy} = f_{yx}$. Secara umum, nilai f_{xy} tidak selalu sama dengan f_{yx}. Untuk menunjukkan hal itu, diberikan contoh berikut

Contoh 3.11. *Diberikan fungsi dua peubah f yang didefinisikan*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

yang grafiknya diberikan pada Gambar 3.2. Tunjukkan bahwa $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.



Gambar 3.2: Grafik fungsi f

Penyelesaian: Dengan menggunakan definisi turunan parsial di suatu titik, diperoleh

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

Sedangkan untuk $(x,y) \neq (0,0)$, diperoleh

$$f_x(x,y) = y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

dan

$$f_y(x,y) = x\frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

Selanjutnya, diperoleh

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{y\to 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1,$$

dan

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1.$$

Jadi $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Syarat $f_{xy} = f_{yx}$ diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.12. *Diberikan fungsi f yang terdefinisi pada cakram buka D yang memuat titik (x_0, y_0). Jika f_{xy} dan f_{yx} keduanya kontinu pada D, maka*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Bukti: Karena D buka, maka terdapat $r > 0$ sehingga $B_r(\mathbf{x}) \subseteq D$. Misal diberikan $|t|, |s| < r/2$ dan pandang

$$\Delta(s,t) = \frac{1}{st}\big(f(x+t, y+s) - f(x+t, y)\big)$$

Diperhatikan bahwa $(x+t, y+s) \subseteq D$ karena

$$\begin{aligned} |(x+t, y+s) - (x,y)| &= |(t,s)| \\ &= \sqrt{t^2 + s^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4}} \\ &\leq \frac{r}{\sqrt{2}} \\ &< r \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teorema nilai rata-rata dan aturan rantai fungsi satu peubah, diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta(s,t) &= \frac{1}{st}(h(t) - h(0)) \\ &= \frac{1}{st} h'(\alpha t) t \\ &= \frac{1}{s}(f_x(x + \alpha t, y+s) - f_x(x+\alpha t, y)) \end{aligned}$$

untuk suatu $\alpha \in (0,1)$. Dengan menggunakan teorema nilai rata-rata lagi, diperoleh

$$\Delta(s,t) = f_{xy}(x+\alpha t, y+\beta s)$$

dengan $\alpha, \beta \in (0,1)$.

Jika suku-suku $f(x+t,y)$ dan $f(x,y+s)$ dipertukarkan, $\delta(s,t)$ tidak diubah maka argumen di atas menunjukkan terdapat $\gamma, \delta \in (0,1)$ sedemikian hingga

$$\Delta(s,t) = f_{yx}(x+\gamma t, y+\delta s).$$

Dengan mengambil $(s,t) \to (0,0)$ dan dengan menggunakan kekontinuan f_{xy} dan f_{yx} di (x,y), diperoleh

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \Delta(s,t) = f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

Bukti selesai. □

Turunan parsial orde yang lebih tinggi dapat juga terdefinisi. Sebagai contoh turunan parsial orde tiga

$$f_{xxx} = (f_{xx})_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3},$$

$$f_{xxy} = (f_{xx})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2},$$

$$f_{xyx} = (f_{xy})_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x},$$

dan sebagainya.

Contoh 3.13. *Tentukan f_{xyz} jika $f(x,y,z) = cos(2x+yz)$ dan tentukan $f_{xyz}(0,1/2,\pi)$.*

Penyelesaian:

$$f_x = -2\sin(2x+yz)$$

$$f_{xy} = -2z\cos(2x+yz)$$

$$f_{xyz} = -2[\cos(2x+yz) - yz\sin(2x+yz)]$$

$$f_{xyz}(0,1/2,\pi) = -2[\cos(\pi/2) - (\pi/2)\sin(\pi/2)] = \pi.$$

Contoh 3.14. *Periksa bahwa fungsi* $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ *dengan* f *dan* g *fungsi sebarang dan* c *konstanta, memenuhi persamaan*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} u_t &= -cf'(x-ct) + cg'(x+ct), \\ u_{tt} &= c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct), \\ u_x &= f'(x-ct) + g'(x+ct), \end{aligned}$$

dan

$$u_{xx} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct) \\ &= c^2\big(f''(x-ct) + g''(x+ct)\big) \\ &= c^2 u_{xx}, \end{aligned}$$

yang memenuhi persamaan (3.1).

3.3 Bidang Singgung dan Hampiran Linier

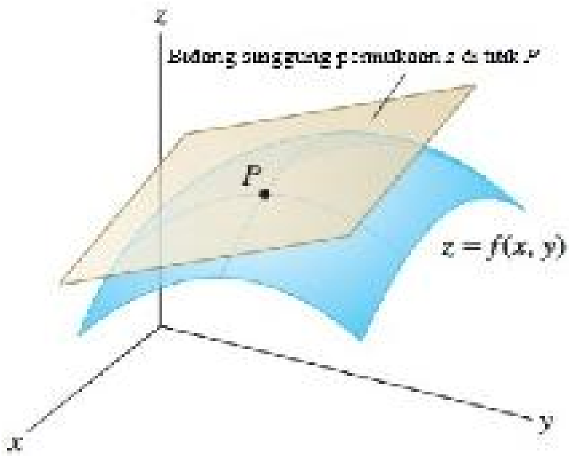
Untuk mengawali subbab ini diberikan pengertian bidang singgung permukaan di suatu titik. Notasi $\nabla f(x,y,z)$ menyatakan $\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\rangle$.

Definisi 3.15. *Diberikan* $f(x,y,z) = c$ *menentukan sebuah permukaan, dan misalkan* f *diferensiabel di titik* $P(x_0,y_0,z_0)$ *pada permukaan dengan* $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. *Bidang yang melalui titik* P *dan tegak lurus dengan* $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ *disebut* **bidang singgung** *permukaan di titik* $P(x_0,y_0,z_0)$.

Ilustrasi bidang singgung permukaan $z = f(x,y)$ di titik P diberikan pada Gambar 3.3.

Teorema 3.16. *Diberikan* f *fungsi dua peubah yang turunan-turunan parsialnya kontinu. Persamaan bidang singgung permukaan* $z = f(x,y)$ *di titik* $P(x_0,y_0,z_0)$ *adalah*

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$



Gambar 3.3: Bidang singgung permukaan $z = f(x, y)$ di titik P

Contoh 3.17. *Tentukan bidang singgung paraboloida* $z = x^2 + y^2$ *di titik* $(1, 2, 5)$.

Penyelesaian: Jika $f(x, y) = x^2 + y^2$, maka $f_x = 2x$ dan $f_y = 2y$, sehingga $f_x(1, 2) = 2$ dan $f_y(1, 2) = 4$. Jadi persamaan bidang singgung f di titik $(1, 2, 5)$ adalah

$$z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2) \qquad \text{atau} \qquad z = 2x + 4y - 5.$$

Contoh 3.18. *Tentukan persamaan bidang singgung dan garis normal persamaan* $x^2 + y^2 + 2z^2 = 7$ *di titik* $(1, 2, 1)$.

Penyelesaian: Diberikan $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 7$, sehingga diperoleh

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k},$$

dan

$$\nabla f(1, 2, 1) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Berdasarkan Teorema 3.16, persamaan bidang singgung di titik $(1, 2, 1)$ adalah

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + 4(z - 1) = 0$$

Sedangkan persamaan garis normalnya adalah

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 1}{4}.$$

Pada Contoh 3.17, telah diketahui bahwa persamaan bidang singgung fungsi $f(x, y) = x^2 + y^2$ di titik $(1, 2, 5)$ adalah $z = 2x + 4y - 5$. Oleh karena itu, fungsi linier dua peubah

$$L(x, y) = 2x + 4y - 5$$

merupakan hampiran yang baik untuk f di dekat titik $(1, 2)$. Fungsi L disebut **linierisasi** f di titik $(1, 2)$ dan

$$f(x, y) \approx 2x + 4y - 5$$

disebut **hampiran linier** f di $(1, 2)$. Sebagai contoh, hampiran linier f di titik $(11/10,\ 19/10)$ adalah

$$f(11/10,\ 19/10) \approx 2(11/10) + 4(19/10) - 5 = 2,2 + 7,6 - 5 = 4,8.$$

Definisi 3.19. *Fungsi* $z = f(x, y)$ *dikatakan* **diferensiabel** *atau* **dapat diturunkan** *di titik* (x_0, y_0) *jika* Δz *dapat dinyatakan dalam bentuk*

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

dengan $\epsilon_1 \to 0$ *dan* $\epsilon_2 \to 0$ *apabila* $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Selanjutnya, untuk mengetahui suatu fungsi diferensiabel di suatu titik, dapat menggunakan teorema berikut.

Teorema 3.20. *Jika turunan-turunan parsial* f*, yakni* f_x *dan* f_y *ada di persekitaran titik* (x_0, y_0) *dan kontinu di titik* (x_0, y_0)*, maka* f *diferensiabel di titik* (x_0, y_0)*.*

Contoh 3.21. *Tunjukkan bahwa fungsi* $f(x, y) = x \sin(xy)$ *diferensiabel di titik* $(1, \pi/2)$

Penyelesaian: Turunan-urunan parsial $f(x, y) = x \sin(xy)$ adalah

$$f_x(x, y) = \sin(xy) + xy\cos(xy) \qquad \text{dan} \qquad f_y(x, y) = x^2 \cos(xy).$$

Dengan demikian diperoleh $f_x(1, \pi/2) = 1$ dan $f_y(1, \pi/2) = 0$. Karena f_x dan f_y keduanya kontinu di titik $(1, \pi/2)$, berdasarkan Teorema 3.20, maka f diferensiabel di titik $(1, \pi/2)$.

Suatu fungsi yang kontinu di suatu titik tertentu, belum cukup menjamin fungsi tersebut diferensiabel di titik itu. Sebagai contoh, fungsi $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ kontinu di titik $(0, 0)$, tetapi f tidak diferensiabel di titik $(0, 0)$. Namun sebaliknya, yakni jika suatu fungsi diferensiabel di suatu titik tertentu maka fungsi tersebut kontinu di titik tersebut, seperti diberikan pada teorema berikut.

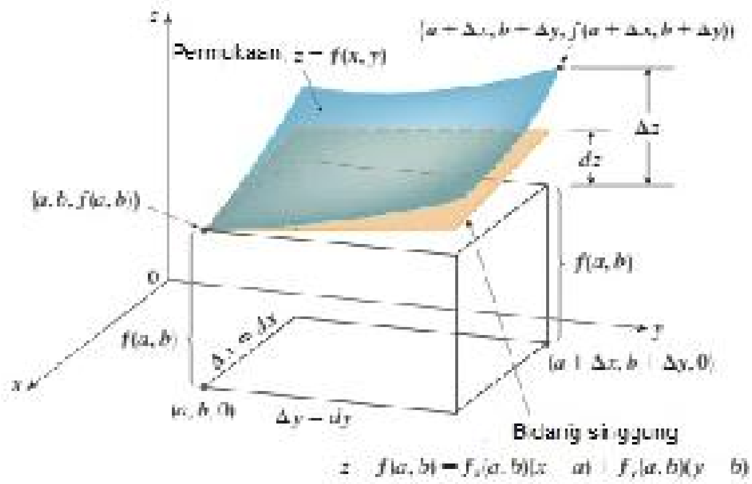
Teorema 3.22. *Jika fungsi* $f(x, y)$ *diferensiabel di titik* (x_0, y_0)*, maka fungsi* f *kontinu di titik* (x_0, y_0).

Selanjutnya diberikan pengertian diferensial total fungsi dua peubah.

Definisi 3.23. *Diberikan* $z = f(x, y)$*.* **Diferensial total** f*, ditulis* dz*, didefinisikan sebagai*

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Ilustrasi diferensial total diberikan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4: Diferensial total

Contoh 3.24. *Diberikan* $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$*. Tentukan*

a. dz

b. nilai dz*, jika* x *berubah dari* 2 *ke* $2,05$ *dan* y *berubah dari* 3 *ke* $2,96$

c. nilai Δz*, jika* x *berubah dari* 2 *ke* $2,05$ *dan* y *berubah dari* 3 *ke* $2,96$.

Penyelesaian: a. Berdasarkan Definisi 3.23, diperoleh

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (2x+3y)dx + (3x-2y)dy.$$

b. Dengan mengambil $x = 2, dx = \Delta x = 0,05, y = 3$, dan $dy = \Delta y = -0,04$, diperoleh

$$dz = [2(2)+3(3)]0,05 + [3(2)-2(3)](-0,04) = 0,65.$$

c. Untuk Δz diperoleh

$$\Delta z = f(2,05, 2,96) - f(2,3) = 0,6449.$$

Pada fungsi tiga peubah atau lebih, hampiran linier dan keterdiferensialan dapat didefinisikan serupa seperti pada fungsi dua peubah. Untuk keterdiferensialan fungsi tiga peubah, diberikan seperti definisi berikut.

Definisi 3.25. *Fungsi* $w = f(x,y,z)$ *dikatakan* **diferensiabel** *atau* **dapat diturunkan** *di titik* (x_0, y_0, z_0) *jika* Δw *dapat dinyatakan dalam bentuk*

$$\begin{aligned} \Delta w &= f_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y + f_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z \\ &\quad + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y + \epsilon_3\Delta z \end{aligned}$$

dengan $\epsilon_1 \to 0, \epsilon_2 \to 0,$ *dan* $\epsilon_3 \to 0$ *apabila* $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0,0,0)$.

Selanjutnya dibahas polinomial Taylor untuk fungsi dua peubah. Untuk mengingat kembali rumus polinomial Taylor fungsi satu peubah $f(x)$ di sekitar titik x_0 diberikan berikut.
Untuk polinomial Taylor orde satu:

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

sedangkan untuk polinomial Taylor orde dua:

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2.$$

Analog dengan fungsi satu peubah, untuk polinomial Taylor orde satu fungsi dua peubah di sekitar titik (x_0, y_0) adalah

$$P_1(x,y) = f(x_0,y_0) + [f_x(x_0,y_0)(x_0 - x) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)],$$

dan untuk polinomial Taylor orde dua fungsi dua peubah

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(x_0,y_0)+[f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)] \\ &\quad +\frac{1}{2}[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ &\quad +f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2]. \end{aligned}$$

Contoh 3.26. *Tentukan polinomial Taylor orde satu dan orde dua dari fungsi* $f(x,y)=2x^3y-xy^2+y^2-x+3$ *di sekitar titik* $(2,1)$

Penyelesaian: Diperoleh turunan-turunan parsial f orde satu dan orde dua

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6x^2y-y^2-1 \\ f_y(x,y) &= 2x^3-2xy+2y \\ f_{xx}(x,y) &= 12xy \\ f_{xy}(x,y) &= 6x^2-2y \\ f_{yy}(x,y) &= -2x+2 \end{aligned}$$

Untuk polinomial Taylor orde satu di sekitar titik $(2,1)$ adalah

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= f(2,1)+f_x(2,1)(x-2)+f_y(2,1)(y-1) \\ &= 16+22(x-2)+14(y-1) \\ &= 22x+14y-42. \end{aligned}$$

Sedangkan polinomial Taylor orde dua di sekitar titik $(2,1)$ adalah

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(2,1)+[f_x(2,1)(x-2)+f_y(2,1)(y-1)] \\ &\quad +\frac{1}{2}[f_{xx}(2,1)(x-2)^2+2f_{xy}(2,1)(x-2)(y-1) \\ &\quad +f_{yy}(2,1)(y-1)^2] \\ &= 16+22(x-2)+14(y-1)+\frac{1}{2}\big[24(x-2)^2 \\ &\quad +2\cdot 22(x-2)(y-1)-2(y-1)^2\big] \\ &= 12x^2+22xy-y^2-48x-28y+49 \end{aligned}$$

3.4 Rangkuman

1. Diberikan fungsi dua peubah $f(x,y)$ bernilai real.

a. **Turunan parsial** fungsi f terhadap x di titik (x_0, y_0), ditulis $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$ atau $f_x(x_0, y_0)$, adalah

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

jika limit di ruas kanan ada. Dalam kasus limit di ruas kanan tidak ada, maka dikatakan f tidak terdiferensialkan secara parsial terhadap x di titik (x_0, y_0).

b. **Turunan parsial** fungsi f terhadap y di titik (x_0, y_0), ditulis $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ atau $f_y(x_0, y_0)$, adalah

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

jika limit di ruas kanan ada. Dalam kasus limit di ruas kanan tidak ada, maka dikatakan f tidak terdiferensialkan secara parsial terhadap y di titik (x_0, y_0).

2. Diberikan f fungsi dua peubah bebas x dan y. Turunan parsial fungsi f masing-masing terhadap x dan y adalah sebuah fungsi f_x dan f_y yang didefinisikan oleh

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

dan

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

3. Diberikan fungsi dua peubah $f(x, y, z)$ bernilai real.

a. **Turunan parsial** fungsi f terhadap x di titik (x_0, y_0, z_0), ditulis $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0, z_0)$ atau $f_x(x_0, y_0, z_0)$, adalah

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

jika limit di ruas kanan ada. Dalam kasus limit di ruas kanan tidak ada, maka dikatakan f tidak terdiferensialkan secara parsial terhadap x di titik (x_0, y_0, z_0).

b. **Turunan parsial** fungsi f terhadap y di titik (x_0, y_0, z_0), ditulis $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0, z_0)$ atau $f_y(x_0, y_0, z_0)$, adalah

$$f_y(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

jika limit di ruas kanan ada. Dalam kasus limit di ruas kanan tidak ada, maka dikatakan f tidak terdiferensialkan secara parsial terhadap y di titik (x_0, y_0, z_0).

c. **Turunan parsial** fungsi f terhadap z di titik (x_0, y_0, z_0), ditulis $\frac{\partial}{\partial z} f(x_0, y_0, z_0)$ atau $f_z(x_0, y_0, z_0)$, adalah

$$f_z(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

jika limit di ruas kanan ada. Dalam kasus limit di ruas kanan tidak ada, maka dikatakan f tidak terdiferensialkan secara parsial terhadap z di titik (x_0, y_0, z_0).

4. Diberikan fungsi f yang terdefinisi pada cakram D yang memuat titik (x_0, y_0). Jika f_{xy} dan f_{yx} keduanya kontinu pada D, maka

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

5. Diberikan f fungsi dua peubah yang turunan-turunan parsialnya kontinu. Persamaan bidang singgung permukaan $z = f(x, y)$ di titik $P(x_0, y_0, z_0)$ adalah

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

6. Fungsi $z = f(x, y)$ dikatakan **diferensiabel** atau **dapat diturunkan** di titik (x_0, y_0) jika Δz dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

dengan $\epsilon_1 \to 0$ dan $\epsilon_2 \to 0$ apabila $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

7. Jika turunan-turunan parsial f, yakni f_x dan f_y ada di sekitar titik (x_0, y_0) dan kontinu di titik (x_0, y_0), maka f diferensiabel di titik (x_0, y_0).

8. Diberikan $z = f(x, y)$. **Diferensial total** f, ditulis dz, didefinisikan sebagai

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

9. Fungsi $w = f(x, y, z)$ dikatakan **diferensiabel** atau **dapat diturunkan** di titik (x_0, y_0, z_0) jika Δw dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\Delta w &= f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z \\ &\quad +\epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y + \epsilon_3\Delta z\end{aligned}$$

dengan $\epsilon_1 \to 0, \epsilon_2 \to 0$, dan $\epsilon_3 \to 0$ apabila $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0, 0, 0)$.

3.5 Latihan Soal

1. Diberikan $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - 9y^2}$.
   Tentukan $f_x(1, 0)$ dan $f_y(1, 0)$.

2. Diberikan fungsi dua peubah

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{y - x + 1} & , y \geq x \\ \sqrt{x - y} & , x > y \end{cases}$$

   Tentukan $f_x(1, 1)$ jika ada atau katakan tidak ada.

3. Tentukan turunan-turunan parsial pertama dari fungsi

$$F(x, y) = \int_x^y \cos{(e^t)}dt.$$

4. Tentukan $\partial z/\partial x$ dari persamaan

$$e^{xz} = xyz.$$

5. Jika $f(x, y, z) = \sqrt{2 + xz} + \sqrt{z + xy}$, tentukan f_{xyz}.

6. Persamaan diferensial yang berbentuk

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   dengan a konstanta, dinamakan **persamaan gelombang**. Tunjukkan bahwa fungsi $u(x, t) = \sin{(x - at)}$ memenuhi persamaan gelombang.

7. Tunjukkan bahwa fungsi

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4kt}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

adalah penyelesaian persamaan konduksi panas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dengan k suatu konstanta.

8. Tentukan turunan parsial pertama fungsi-fungsi berkut:

a.	$f(x,y) = \frac{2x}{y^2+3x}$	b.	$z = \frac{\sin(u+v)}{v^2}$
c.	$g(x,y,z) = \sqrt{x^2 + \ln(5y - z)}$	d.	$z = \cos(\ln(x^2 + y^2 + z^2))$

9. Diberikan $f(t)$ dan $g(t)$ fungsi-fungsi diferensiabel satu peubah. Tentukan $\partial z/\partial x$ dan $\partial z/\partial y$ untuk fungsi:
a. $z = f(x)g(y)$ b. $z = f(xy)$ c. $f(x/y)$.

10. Tentukan persamaan bidang singgung hiperboloida

$$4x^2 - 9y^2 - 9z^2 - 36 = 0$$

di titik $P(3\sqrt{3}, 2, 2)$.

11. Tentukan persamaan bidang singgung permukaan $f(x,y) = 2y\ln(xy)$ di titik $(2, \frac{1}{2}, 0)$.

12. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x,y) = ye^x + xy^2$ diferensiabel di mana-mana.

13. Tentukan diferensial total dari $z = e^{-2x}\cos(2y)$.

14. Gunakan hampiran diferensial total untuk menghitung $\sqrt{9,1 + 3,9}$.

15. Tentukan vektor berarah permukaan $f(x,y) = 4x^2 - xy + 3y^2$ di titik $(2,-1)$ pada arah vektor $\mathbf{u}$=4$\mathbf{i}$+3$\mathbf{j}$.

16. Diberikan $f(t)$ dan $g(t)$ fungsi satu peubah yang terdiferensialkan. Jika $z = f(x)g(y)$, tentukan z_x dan z_y.

17. Diberikan $z = f(x,y) = e^{xy}$. Tentukan

   a. dz

b. Nilai dz jika x berubah dari 0 ke $-0,1$ dan y berubah dari 0 ke $0,1$

c. Tentukan Δz jika x berubah dari 0 ke $-0,1$ dan y berubah dari 0 ke $0,1$

18. Tentukan polinomial Taylor orde satu dan orde dua dari fungsi dua peubah $f(x,y) = e^{2(x+y)}$ di sekitar titik $(0,0)$.

3.6 Bahan Diskusi

Diskusikan bersama teman-temanmu di kelas!

1. Berikan definisi fungsi peubah banyak $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dikatakan diferensiabel di titik $\mathbf{x_0} \in D$.

2. Berikan contoh fungsi yang mempunyai turunan parsial tetapi tidak kontinu di suatu titik, dan berikan contoh fungsi kontinu tetapi tidak mempunyai turunan parsial di suatu titik.

3. Rumuskan bentuk polinomial Taylor orde satu dan orde dua untuk fungsi tiga peubah $f(x,y,z)$ di sekitar titik (x_0, y_0, z_0).

3.7 Daftar Rujukan

1. Breen, J., 2020, *Advanced Multivariable Differential Calculus*, University of California, Los Angeles

2. Feldman, J., Andrew Rechnitzer dan Elyse Yeager, 2021, *Multivariable Calculus*, Creative Commons Attribution, British Columbia.

3. Kim, S., 2022, *Multivariable Calculus*, Mississippi State University, Michigan

4. Savage, A., 2021, *Multivariable Calculus*, University of Ottawa, Ottawa

5. Shimamoto, D., 2019, *Multivariable Calculus*, Swarthmore College, Philadelphia

6. Stewart, J., 2018, *Multivariable Calculus*, Edisi 8, Cengage Learning: Belmont, USA

Bab 4

Aturan Rantai dan Turunan Berarah

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa dapat menentukan turunan fungsi peubah banyak dengan Aturan Rantai

2. Mahasiswa dapat menentukan turunan fungsi implisit

3. Mahasiswa dapat menentukan turunan berarah fungsi peubah banyak dalam arah vektor tertentu

4.1 Aturan Rantai

Aturan Rantai untuk fungsi komposisi satu peubah telah dipelajari pada matakuliah Kalkulus. Pada subbab ini akan membahas Aturan Rantai fungsi peubah banyak yang dimulai dari fungsi dua peubah. Berikut diberikan teorema berkaitan dengan Aturan Rantai untuk fungsi dua peubah.

Teorema 4.1. Aturan Rantai *Diberikan $z = f(x, y)$ fungsi diferensiabel terhadap x dan y. Jika $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ keduanya diferensiabel terhadap t, maka z diferensiabel terhadap t dan*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Bukti. Dari Definisi 3.19, diperoleh

$$\Delta z = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{4.1}$$

dengan $\epsilon_1 \to 0$ dan $\epsilon_2 \to 0$ apabila $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.
Dengan membagi kedua ruas persamaan (4.1) dengan Δt, diperoleh

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Jika diambil $\Delta t \to 0$, maka $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) \to 0$ karena x diferensiabel dan oleh karenanya x kontinu. Dengan cara serupa, $\Delta y \to 0$. Ini berarti bahwa $\epsilon_1 \to 0$ dan $\epsilon_2 \to 0$, sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\
&= f_x \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + (\lim_{\Delta t \to 0} \epsilon_1) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\
&\quad + (\lim_{\Delta t \to 0} \epsilon_2) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}. \\
&= f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.
\end{aligned}$$

□

Contoh 4.2. *Jika $z = xy^2 + 2x^3 y$, dengan $x = \sin t$ dan $y = \cos t$, tentukan dz/dt ketika $t = 0$.*

Penyelesaian: Dengan menggunakan Aturan Rantai, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (y^2 + 6x^2y)\cos t - (2xy + 2x^3)\sin t \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $x = \sin t$ dan $y = \cos t$ ke hasil akhir di atas, dan memasukkan $t = 0$, diperoleh

$$\frac{dz}{dt} = ((\cos t)^2 + 6(\sin t)^2\cos t)\cos t - (2\sin t\cos t + 2(\sin t)^3)\sin t$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = 1$$

Teorema 4.3. *Diberikan $z = f(x, y)$ fungsi diferensiabel terhadap x dan y. Jika $x = x(s, t)$ dan $y = y(s, t)$ keduanya diferensiabel terhadap s dan t, maka*

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Contoh 4.4. *Jika $z = e^x \sin y$ dengan $x = st^2$ dan $y = s^2t$, tentukan $\partial z/\partial s$.*

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= t^2e^x\sin y + 2ste^x\cos y \\ &= t^2e^{st^2}\sin(s^2t) + 2ste^{(st^2)}\cos(s^2t). \end{aligned}$$

Teorema 4.5. *Diberikan u fungsi diferenesiabel atas n peubah $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Jika untuk setiap $x_j, j = 1, 2, \cdots, n$ merupakan fungsi yang diferensiabel atas m peubah $t_1, t_2, \cdots, t_m$, maka u merupakan fungsi dari $t_1, t_2, \cdots, t_m$ dan*

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, m$.

Untuk menentukan turunan parsial kedua dengan menggunakan Aturan Rantai dapat menggunakan teknik yang sama seperti turunan parsial pertama, yakni hasil turunan parsial pertama diturunkan lagi secara parsial. Untuk lebih jelasnya diberikan contoh berikut.

Contoh 4.6. *Diberikan $z = z(x,y)$ dengan $x = s^2t$ dan $y = 3s + 2t$. Tentukan:*
a. $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ *dan* *b.* $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$

Penyelesaian: a. Dengan menurunkan z secara parsial terhadap t, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ &= s^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menurunkan $\frac{\partial z}{\partial t}$ hasil di atas terhadap t lagi, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial z}{\partial t}\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(s^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y}\Big) \\ &= s^2\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big) + 2\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa z adalah fungsi dari x dan y, dan x dan y keduanya fungsi-fungsi dari s dan t. Oleh karena itu, turunan parsial $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ adalah juga fungsi-fungsi dari x dan y dan kedua x dan y fungsi-fungsi dari s dan t. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= s^2\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\Big) + 2\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\Big) \\ &= s^2\Big(s^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\Big) + 2\Big(s^2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big) \\ &= s^4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

b. Dari hasil $\frac{\partial z}{\partial t}$ pada bagian a, kemudian diturunkan secara parsial terhadap s diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial z}{\partial t}\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big(s^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y}\Big) \\
&= 2s\frac{\partial z}{\partial x} + s^2\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big) + 2\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big) \\
&= 2s\frac{\partial z}{\partial x} + s^2\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\Big) + 2\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\Big) \\
&= 2s\frac{\partial z}{\partial x} + s^2\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}2st + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}3\Big) + 2\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}2st + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}3\Big) \\
&= 2s^3t\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (3s^2 + 4st)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2s\frac{\partial z}{\partial x}.
\end{aligned}$$

4.2 Turunan Fungsi Implisit

Bentuk implisit fungsi satu peubah adalah $F(x, y) = 0$ yang mendefinisikan y secara implisit sebagai fungsi diferensiabel atas x, yakni $y = f(x)$, dimana $F(x, f(x)) = 0$ untuk setiap x di dalam domain f. Jika F diferensiabel, dapat menggunakan Aturan Rantai seperti yang telah dipelajari pada matakuliah Kalkulus untuk menurunkan kedua ruas persamaan $F(x, y) = 0$ terhadap x. Karena x dan y keduanya fungsi dari x, maka diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Karena $\frac{dx}{dx} = 1$, sehingga jika $\partial F/\partial y \neq 0$ dapat diselesaikan untuk dy/dx dan diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Contoh 4.7. *Tentukan* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *dan* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *jika* $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 1$.

Penyelesaian: Diambil $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz - 1$. Dari penjelasan sebelumnya diperoleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{2x - 3yz}{2z - 3xy}$$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{2y - 3xz}{2z - 3xy}$$

Contoh 4.8. *Tentukan dy/dx jika*

$$x^4 - x^3 y - 6y^4 = 0$$

dengan menggunakan
a. Aturan Rantai, *b. Penurunan implisit*

Penyelesaian: a. Diambil $F(x, y) = x^4 - x^3 y - 6y^4$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{4x^3 - 3x^2 y}{-x^3 - 24y^3} = \frac{4x^3 - 3x^2 y}{x^3 + 24y^3}.$$

b. Dengan menurunkan kedua sisi persamaan terhadap x, diperoleh

$$4x^3 - (3x^2 y + x^3 \frac{dy}{dx}) - 24y^3 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Selanjutnya, dengan mengumpulkan bagian dy/dx diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3 - 3x^2 y}{-x^3 - 24y^3} = \frac{4x^3 - 3x^2 y}{x^3 + 24y^3}.$$

Jika z merupakan fungsi implisit dari x dan y yang didefinisikan dengan persamaan $F(x, y, z) = 0$, maka penurunan kedua sisi ruas terhadap x, menghasilkan

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

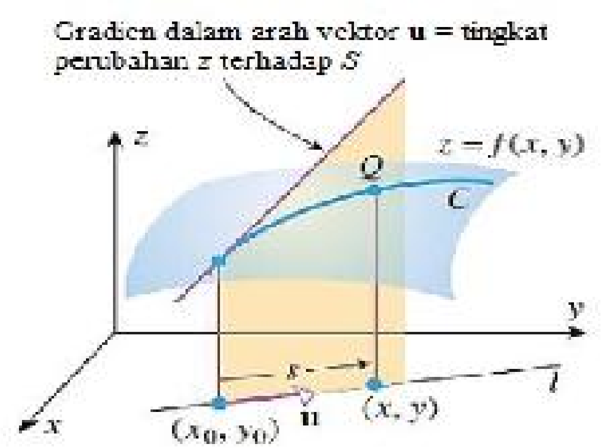
Contoh 4.9. *Diberikan $F(x, y, z) = x^2 e^{y-z} - y\cos(x - z) = 0$ yang mendefinisikan z secara implisit dari x dan y, tentukan $\partial z/\partial x$.*

Penyelesaian:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{2xe^{y-z} + y\sin(x - z)}{-x^2 e^{y-z} - y\sin(x - z)}$$

4.3 Turunan Berarah

Secara geometri, $D_u f(x_0, y_0)$ diinterpretasikan sebagai kemiringan permukaan $z = f(x, y)$ di titik $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ dalam arah vektor $\mathbf{u}$ seperti diberikan pada Gambar 4.1. Biasanya nilai $D_u f(x_0, y_0)$ tergantung dari titik (x_0, y_0) dan arah $\mathbf{u}$. Jadi, kemiringan permukaan di suatu titik bisa memiliki banyak arah. Secara analitik, turunan berarah menyatakan tingkat perubahan $f(x, y)$ terhadap jarak dalam arah $\mathbf{u}$ di titik (x_0, y_0).



Gambar 4.1: Turunan berarah permukaan f di (x_0, y_0)

Definisi 4.10. Turunan berarah *f di titik (x_0, y_0) dalam arah vektor satuan $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ adalah*

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

jika limit di ruas kanan ada.

Contoh 4.11. *Diberikan $f(x, y) = xy$. Tentukan dan interpretasikan $D_u f(1, 2)$ dengan $\mathbf{u}$ vektor satuan*

$$\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Penyelesaian: Dari Definisi 4.10, diperoleh

$$\begin{aligned} D_u f(1,2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h3/5, 2+h4/5) - f(1,2)}{h} \\ &= \frac{(1+3h/5)(2+4h/5) - 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h + 12h^2/25}{h} = 2 \end{aligned}$$

Teorema 4.12. *Jika f fungsi diferensiabel terhadap x dan y, maka f mempunyai turunan berarah dalam arah vektor satuan sebarang $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ dan*

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b.$$

Bukti. Misal diberikan g fungsi satu peubah dengan peubah h yang didefinisikan

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb),$$

maka, dipunyai

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad (4.2) \\ &= D_u f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Di sisi lain, dapat dituliskan $g(h) = f(x,y)$, dimana $x = x_0 + ha, y = y_0 + hb$, sehingga dengan Aturan Rantai diperoleh

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

Jika diambil $h = 0$, maka $x = x_0, y = y_0$, dan diperoleh

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b. \qquad (4.3)$$

Dari persamaan (4.2) dan (4.3), diperoleh

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b.$$

□

Contoh 4.13. *Tentukan turunan berarah $D_u f(x,y)$ jika $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ dengan $\mathbf{u}$ adalah vektor satuan yang diberikan oleh sudut $\theta = \pi/3$.*

Penyelesaian: $\mathbf{u} = \langle \sqrt{3}/2, 1/2 \rangle$. Turunan parsial f masing-masing terhadap x dan y adalah

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y \qquad \text{dan} \qquad f_y(x,y) = 8y - 3x.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$D_u f(x,y) = (3x^2 - 3y)\sqrt{3}/2 + (8y - 3x)1/2.$$

Definisi 4.14. *Diberikan f fungsi dua peubah x dan y.* **Gradien** *f adalah fungsi vektor ∇f yang didefinisikan oleh*

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Contoh 4.15. *Jika $f(x,y) = \sin x + e^{xy}$, tentukan $\nabla f(x,y)$.*

Penyelesaian: $\nabla f(x,y) = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$.

Contoh 4.16. *Tentukan gradien $f(x,y) = x^2 + y^2$ di titik $(1,2)$ dalam arah vektor $\langle 3, 4 \rangle$.*

Penyelesaian: $\nabla f(x,y) = \langle 2x, 2y \rangle$, sehingga $\nabla f(1,2) = \langle 2, 4 \rangle$. Vektor satuan $\langle 3, 4 \rangle$ adalah $\langle 3/5, 4/5 \rangle$. Oleh karena itu diperoleh gradien f di titik $(1,2)$ dalam arah $\langle 3, 4 \rangle$ adalah

$$\nabla f(1,2) \cdot \langle 3/5, 4/5 \rangle = \frac{6}{5} + \frac{16}{5} = \frac{22}{5}.$$

Contoh 4.17. *Tentukan turunan berarah fungsi $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ di titik $(2,-1)$ dalam arah vektor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.*

Penyelesaian: $\nabla f(x,y) = 2xy^3\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\mathbf{j}$ sehingga $\nabla f(2,-1) = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$.
Karena $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, maka vektor satuan searah $\mathbf{v}$ adalah

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$D_u f(2,-1) = \nabla f(2,-1) = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

Contoh 4.18. *Tentukan vektor singgung $f(x,y) = x^2 + y^2$ di titik $(1,2)$ dalam arah vektor $\langle 3,4\rangle$ dan tunjukkan bahwa vektor singgung tersebut sejajar dengan bidang singgung permukaan di titik tersebut.*

Penyelesaian: Dari Contoh 4.16 diperoleh vektor satuan dalam arah yang dimaksud adalah $\langle 3/5, 4/5\rangle$. Hal ini dapat dikembangkan ke dalam vektor singgung dengan menambahkan koordinat ketiga menjadi $\langle 3/5, 4/5, 22/5\rangle$. Untuk melihat vektor ini sejajar dengan bidang singgung, dapat dihitung dengan perkalian titik dengan vektor normal bidang singgung. Adapun vektor normal bidang singgung di titik $(1,2)$ adalah

$$\langle \nabla f_x(1,2), \nabla f_y(1,2), -1\rangle = \langle 2,4,-1\rangle.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\langle 2,4,-1\rangle \cdot \langle 3/5, 4/5, 22/5\rangle = \frac{6}{5} + \frac{16}{5} - \frac{22}{5} = 0,$$

yang artinya vektor singgung permukaan f di titik $(1,2)$ dalam arah vektor $\langle 3,4\rangle$ sejajar dengan bidang singgung permukaan di titik $(1,2)$.

Untuk fungsi tiga peubah, pengertian turunan berarah diberikan pada definisi berikut.

Definisi 4.19. Turunan berarah *f di titik (x_0, y_0, z_0) dalam arah vektor satuan $\mathbf{u} = \langle a,b,c\rangle$ adalah*

$$D_u f(x_0,y_0,z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + ch) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

jika limitnya ada.

Sedangkan pengertian gradien untuk fungsi tiga peubah, diberikan pada definisi berikut.

Definisi 4.20. *Diberikan f fungsi tiga peubah x, y dan z.* **Gradien** *f adalah fungsi vektor ∇f yang didefinisikan oleh*

$$\nabla f(x,y,z) = \langle f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Teorema 4.21. *Diberikan f fungsi dua atau tiga peubah yang diferensiabel. Nilai maksimum turunan berarah $D_u f(\mathbf{x})$ adalah $|\nabla f(\mathbf{x})|$ dan itu terjadi bilamana arah vektor $\mathbf{u}$ sama dengan arah vektor $\nabla f(\mathbf{x})$.*

Bukti. Dari Definisi 4.20 dan perkalian titik dua vektor, diperoleh

$$D_u f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \left|\nabla f\right| |\mathbf{u}| \cos\theta = \left|\nabla f\right| \cos\theta$$

dengan θ adalah sudut antara ∇f dan $\mathbf{u}$. Nilai maksimum dari $\cos\theta$ adalah 1 dan ini terjadi ketika $\theta = 0$. Oleh karena itu, nilai maksimum dari $D_u f$ adalah $|\nabla f|$ dan terjadi bilamana $\theta = 0$, yakni bilamana $\mathbf{u}$ mempunyai arah yang sama dengan ∇f. □

Contoh 4.22. *Diberikan $f(x, y) = xe^y$. Tentukan laju perubahan f di titik $P(1, 0)$ dalam arah titik $Q(0, 2)$. Dalam arah kemana f mempunyai laju perubahan maksimum dan berapa besarnya?*

Penyelesaian: $\nabla f(x, y) = \langle e^y, xe^y\rangle$. Di titik $P(1, 0)$, diperoleh

$$\nabla f(1, 0) = \langle 1, 1\rangle.$$

Vektor satuan $\mathbf{u}$ dalam arah vektor $\overline{PQ}$ adalah

$$\mathbf{u} = \frac{\overline{PQ}}{|PQ|} = \frac{\langle -1, 2\rangle}{\sqrt{5}}$$

Oleh karena itu, laju perubahan f dalam arah dari titik P ke titik Q adalah

$$\begin{aligned} D_u f(1, 0) &= \nabla f(1, 0) \cdot \mathbf{u} \\ &= \langle 1, 1\rangle \cdot \langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 4.21, f meningkat paling cepat dalam arah vektor gradien $\nabla f(1, 0) = \langle 1, 1\rangle$ dengan besar laju maksimum

$$|\nabla f(1, 0)| = |\langle 1, 1\rangle| = \sqrt{2}.$$

Contoh 4.23. *Tentukan titik pada permukaan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ yang bidang singgungnya sejajar dengan bidang $3x - y + 3z = 1$.*

Penyelesaian: Dua bidang sejajar apabila kedua vektor normal bidang tersebut searah atau berlawanan arah. Oleh karena itu di sini akan ditentukan titik pada permukaan yang mempunyai arah atau berlawanan arah dengan $\langle 3,-1,3\rangle$. Vektor normal f adalah permukaan ketinggian di setiap titik sehingga cukup dicari gradien yang searah atau berlawanan arah dengan $\langle 3,-1,3\rangle$. Gradien f adalah $\nabla f(x,y,z)=\langle 2x,4y,6z\rangle$. Jika ∇f searah atau berlawanan arah dengan $\langle 3,-1,3\rangle$, maka

$$\langle 2x,4y,6z\rangle = k\langle 3,-1,3\rangle, \qquad \text{untuk suatu } k\in\mathbb{R}.$$

Dari persamaan tersebut, diperoleh tiga persamaan

$$2x=3k, \qquad 4y=-k, \qquad \text{dan} \qquad 6z=3k.$$

Dari tiga persamaan di atas, terdapat empat bilangan anu yang belum diketahui. Untuk mendapatkan persamaan keempat, substitusi-kan peubah-peubah

$$x=(\frac{3k}{2}), \qquad y=(\frac{-k}{4}), \qquad \text{dan} \qquad z=(\frac{3k}{6})$$

ke persamaan permukaan $x^2+2y^2+3z^2=1$, sehingga didapatkan

$$1=\left(\frac{3k}{2}\right)^2+2\left(\frac{-k}{4}\right)^2+3\left(\frac{3k}{6}\right)^2=\frac{25}{8}k^2,$$

yang memberikan penyelesaian nilai $k=\pm\frac{2\sqrt{2}}{5}$.
Titik-titik yang dicari adalah

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{5},-\frac{\sqrt{2}}{10},\frac{\sqrt{2}}{5}\right) \quad \text{dan} \quad \left(-\frac{3\sqrt{2}}{5},\frac{\sqrt{2}}{10},-\frac{\sqrt{2}}{5}\right).$$

4.4 Rangkuman

1. **Aturan Rantai** Diberikan $z=f(x,y)$ fungsi diferensiabel terhadap x dan y. Jika $x=g(t)$ dan $y=h(t)$ keduanya diferensiabel terhadap t, maka z diferensiabel terhadap t dan

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

2. Diberikan $z=f(x,y)$ fungsi diferensiabel terhadap x dan y. Jika $x=g(s,t)$ dan $y=h(s,t)$ keduanya diferensiabel terhadap s dan t, maka

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

dan
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

3. Diberikan u fungsi diferenesiabel atas n peubah $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Jika untuk setiap $x_j, j = 1, 2, \cdots, n$ merupakan fungsi yang diferensiabel atas m peubah $t_1, t_2, \cdots, t_m$, maka u merupakan fungsi dari $t_1, t_2, \cdots, t_m$ dan
$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$
untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, m$.

4. **Turunan berarah** f di titik (x_0, y_0) dalam arah vektor satuan $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ adalah
$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$
jika limit di ruas kanan ada.

5. Jika f fungsi diferensiabel terhadap x dan y, maka f mempunyai turunan berarah dalam arah vektor satuan sebarang $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ dan
$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b.$$

6. Diberikan f fungsi tiga peubah x, y dan z. **Gradien** f adalah fungsi vektor ∇f yang didefinisikan oleh
$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \end{aligned}$$

7. Diberikan f fungsi dua peubah x dan y. **Gradien** f adalah fungsi vektor ∇f yang didefinisikan oleh
$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

8. Diberikan f fungsi dua atau tiga peubah yang diferensiabel. Nilai maksimum turunan berarah $D_u f(\mathbf{x})$ adalah $|\nabla f(\mathbf{x})|$ dan itu terjadi bilamana arah vektor $\mathbf{u}$ sama dengan arah vektor $\nabla f(\mathbf{x})$.

4.5 Latihan Soal

1. Gunakan Aturan Rantai untuk mendapatkan $\partial z/\partial x$ dari persamaan $z = x^2y - 2xy^3$.

2. Gunakan Aturan Rantai untuk mendapatkan $\partial z/\partial x$ dari persamaan $z = \sin(x + y)$ dengan $x = t^2$ dan $y = 2t$.

3. Gunakan Aturan Rantai untuk mendapatkan $\partial z/\partial x$ dari persamaan $z = 2x^2y^3$ dengan $x = \cos 2t$ dan $y = \sin t$.

4. Jika $z = f(x, y)$ dengan $x = s+t$ dan $y = s-t$, tunjukkan bahwa
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

5. Jika $z = x^2y$ dengan $x = r^2 + s$ dan $y = rs^2$, tentukan $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$, dan $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

6. Jika $z = f(x, y)$ dengan $x = r\cos t$ dan $y = r\sin t$, tunjukkan bahwa
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

7. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari persamaan $\sin z = xyz$.

8. Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari persamaan $e^{x+y+z} = \sin z$.

9. Diberikan $F(x, y, z) = x\sin(z - x^2) - z\cos(x - z) = 0$ yang mendefinisikan z secara implisit dari x dan y. Tentukan $\partial z/\partial x$.

10. Tentukan turunan berarah fungsi f yang diberikan oleh $f(x, y) = e^y\cos x$ di titik $(0, 0)$ dalam sudut $\theta = \pi/4$.

11. Tentukan turunan berarah fungsi $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ di titik $(1, 2)$ dalam arah vektor $\mathbf{v} = \langle 3, 5\rangle$.

12. Tentukan turunan berarah fungsi $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ di titik $P(1, -1, 3)$ dalam arah ke titik $Q(2, 4, 5)$.

13. Tentukan kecepatan maksimum perubahan $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$ di titik $(4, 1)$.

14. Jika $f(x, y) = xy$, tentukan vektor gradien $\nabla f(3, 2)$ dan gunakan ini untuk menentukan garis singgung kurva ketinggian $f(x, y) = 6$ di titik $(3, 2)$. Sketsakan kurva ketinggian, garis singgung, dan vektor gradien.

15. Di titik manakah pada paraboloida $y = x^2 + z^2$ dimana bidang singgungnya sejajar dengan bidang $x + 2y + 3z = 1$?

16. Diberikan fungsi-fungsi dua peubah $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ yang diferensiabel. Buktikan bahwa

    a. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
    b. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$
    c. $\nabla(f^n(x, y)) = nf^{n-1}(x, y)\nabla f$.

4.6 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu di kelas!

1. Apakah ada titik pada hiperboloida $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ yang bidang singgungnya sejajar dengan bidang $z = x + y$?

2. Berikan definisi Aturan Rantai fungsi peubah banyak.

4.7 Daftar Rujukan

1. Breen, J., 2020, *Advanced Multivariable Differential Calculus*, University of California, Los Angeles

2. Feldman, J., Andrew Rechnitzer dan Elyse Yeager, 2021, *Multivariable Calculus*, Creative Commons Attribution, British Columbia.

3. Guichard, D. dan N. Koblitz, 2022, *Single and Multivariable Calculus*, Creative Commons, San Francisco.

4. Kim, S., 2022, *Multivariable Calculus*, Mississippi State University, Michigan

5. Savage, A., 2021, *Multivariable Calculus*, University of Ottawa, Ottawa

6. Shimamoto, D., 2019, *Multivariable Calculus*, Swarthmore College, Philadelphia

7. Stewart, J., 2018, *Multivariable Calculus*, Edisi 8, Cengage Learning: Belmont, USA

Bab 5

Maksimum dan Minimum

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian titik ekstrim dan menentukan titik ektrim fungsi peubah banyak

2. Mahasiswa dapat menentukan nilai maksimum dan minimum lokal dengan menggunakan Uji Turunan Kedua

3. Mahasiswa dapat menentukan nilai maksimum dan minimum global/mutlak

4. Mahasiswa dapat menentukan nilai maksimum dan minimum dengan metode Pengali Lagrange

Pada matakuliah Kalkulus telah dibahas cara menentukan nilai ekstrim fungsi satu peubah. Dalam subbab ini, teknik tersebut akan diperumum ke fungsi peubah banyak.

5.1 Ekstrim Relatif/Lokal

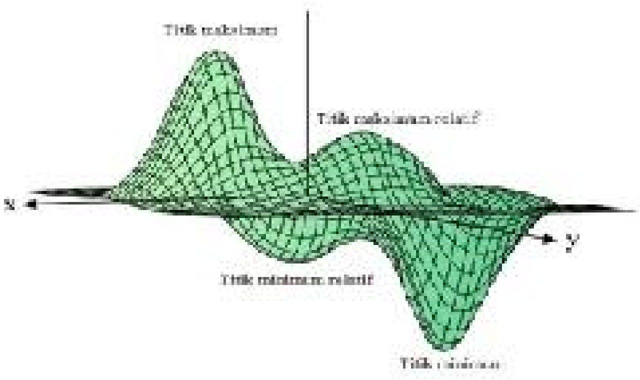
Untuk mengawali subbab ini, dikenalkan terlebih dahulu pengertian titik maksimum lokal, titik minimum lokal, nilai maksimum lokal, dan nilai minimum lokal.

Definisi 5.1. *Diberikan f fungsi dua peubah x dan y.*

a. *Titik (x_0, y_0) disebut* **titik maksimum relatif** *atau* **titik maksimum lokal** *f jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ untuk setiap $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$. Selanjutnya, bilangan $f(x_0, y_0)$ disebut* **nilai maksimum lokal** *f.*

b. *Titik (x_0, y_0) disebut* **titik minimum relatif** *atau* **titik minimum lokal** *jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ untuk setiap $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$. Selanjutnya, bilangan $f(x_0, y_0)$ disebut* **nilai minimum lokal** *f.*

Ilustrasi titik maksimum/minimum relatif/lokal dan titik maksimum/ minimum, diberikan pada Gambar 5.1.



Gambar 5.1: Titik maksimum/minimum relatif/lokal dan titik maksimum/ minimum

Selanjutnya dikenalkan titik kritis titik ekstrim dari suatu fungsi dua peubah.

Definisi 5.2. *Diberikan fungsi dua peubah f dan (x_0, y_0) elemen domain f.*

i. *Titik (x_0, y_0) disebut* **titik kritis** *f jika $f_x(x_0, y_0) = 0$ dan $f_y(x_0, y_0) = 0$ atau salah satu dari turunan parsialnya di titik (x_0, y_0) tidak ada.*

ii. *Titik (x_0, y_0) disebut* **titik ekstrim** *jika $f(x_0, y_0)$ merupakan nilai maksimum/minimum. Selanjutnya, jika (x_0, y_0) titik ekstrim f, maka $f(x_0, y_0)$ disebut* **nilai ekstrim**.

Teorema 5.3. *Jika f mempunyai maksimum lokal atau minimum lokal di (x_0, y_0) dan turunan-turunan parsial orde satunya ada, maka $f_x(x_0, y_0) = 0$ dan $f_y(x_0, y_0) = 0$.*

Bukti. Diberikan fungsi satu peubah g yang didefinisikan $g(x) = f(x, y_0)$. Jika f mempunyai maksimum lokal (atau minimum lokal) di titik (x_0, y_0), maka g mempunyai maksimum lokal (atau minimum lokal) di titik x_0, sehingga $g'(x_0) = 0$. Karena $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$ sehingga $f_x(x_0, y_0) = 0$.
Dengan cara serupa, diperoleh juga $f_y(x_0, y_0) = 0$. $\square$

Contoh 5.4. *Tentukan semua nilai ekstrim dari $f(x, y) = y^2 - x^2$.*

Penyelesaian: Karena $f_x = -2x$ dan $f_y = 2y$, diperoleh hanya satu titik kritis, yakni $(0, 0)$. Untuk setiap $B_\delta(x_0, y_0)$ senantiasa memuat titik dimana f bernilai positif, begitu juga memuat titik dimana f bernilai negatif. Oleh karena itu $f(0, 0) = 0$ bukan merupakan nilai ekstrim bagi f. Jadi, f tidak mempunyai nilai ekstrim.

Teorema 5.5. Uji Turunan Kedua. *Diberikan fungsi f dengan turunan-turunan parsial keduanya kontinu pada suatu $B_\delta(x_0, y_0)$ dengan $f_x(x_0, y_0)= 0$ dan $f_y(x_0, y_0) = 0$. Misalkan*

$$D = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0).$$

a. *Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, maka $f(x_0, y_0)$ merupakan nilai maksimum lokal.*

b. *Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, maka $f(x_0, y_0)$ merupakan nilai minimum lokal.*

c. *Jika $D < 0$, maka $f(x_0, y_0)$ bukan merupakan nilai maksimum lokal atau minimum lokal. Dalam kasus ini, titik (x_0, y_0) disebut* **titik pelana** *f.*

d. *Jika $D = 0$, uji gagal.*

Contoh 5.6. *Tentukan semua nilai maksimum lokal, nilai minimum lokal, dan titik pelana dari fungsi $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.*

Penyelesaian: $f_x = 4x^3 - 4y$ dan $f_y = 4y^3 - 4x$, sehingga diperoleh persamaan

$$x^3 - y = 0 \qquad \textit{dan} \qquad y^3 - x = 0.$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan ini, diperoleh $x = 0, 1, -1$. Terdapat tiga titik kritis, yakni $(0, 0), (1, 1)$, dan $(-1, -1)$.
Kemudian diperoleh $f_{xx} = 12x^2, f_{xy} = -4, f_{yy} = 12y^2$.
$D(0, 0) = -16 < 0$ yang berarti titik $(0, 0)$ merupakan titik pelana. Karena $D(1, 1) = 128 > 0$ dan $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, maka $f(1, 1) = -1$ merupakan nilai minimum lokal. Dengan cara serupa, $D(-1, -1) = 128 > 0$ dan $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$ sehingga $f(-1, -1) = -1$ merupakan nilai minimum lokal.

Contoh 5.7. *Tentukan ekstrim relatif dari $f(x, y) = x^4y^2$.*

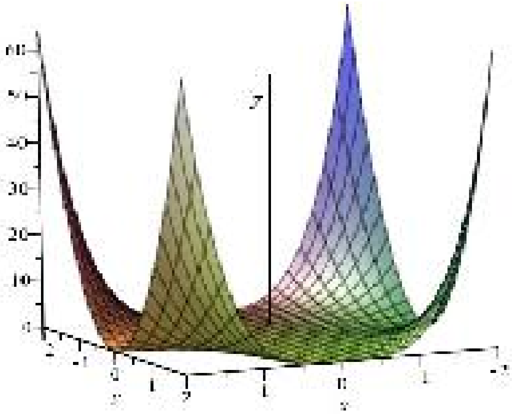
Penyelesaian: Karena $f_x(x, y) = 4x^3y^2$ dan $f_y(x, y) = 2x^4y$, dimana turunan-turunan parsial ini sama dengan 0 jika $x = 0$ atau $y = 0$. Hal ini menunjukkan bahwa semua titik sepanjang sumbu-x atau sumbu-y merupakan titik kritis. Selanjutnya, karena

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2y^2, \quad f_{xy}(x, y) = 8x^3y, \quad \text{dan} \quad f_{yy}(x, y) = 2x^4,$$

yang mana jika $x = 0$ atau $y = 0$, maka

$$D = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 0.$$

Hal ini menunjukkan Uji Turunan Kedua mengalami kegagalan. Namun, karena $f(x, y) = 0$ untuk setiap titik sepanjang sumbu-x atau sepanjang sumbu-y dan $f(x, y) = x^4y^2 > 0$ untuk titik-titik lainnya, maka dapat disimpulkan bahwa setiap titik kritisnya merupakan titik minimum lokal. Grafik fungsi f diberikan pada Gambar 5.2.



Gambar 5.2: Grafik fungsi $f(x, y) = x^4y^2$

Contoh 5.8. *Tentukan jarak titik asal ke permukaan* $z^2 = x^2y + 4$.

Penyelesaian: Misalkan $P(x, y, z)$ adalah titik sebarang pada permukaan tersebut. Kuadrat jarak dari titik P ke titik asal adalah

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Akan ditentukan koordinat titik P yang memberikan d^2 minimum. Karena P terletak pada permukaan itu, koordinatnya memenuhi persamaan permukaan tersebut. Selanjutnya d^2 dapat dinyatakan sebagai f fungsi dua peubah:

$$f(x, y) = d^2 = x^2 + y^2 + x^2y + 4$$

Untuk menentukan titik kritisnya, diambil $f_x = 0 = f_y$, sehingga diperoleh

$$2x + 2xy = 0 \qquad \text{dan} \qquad 2y + x^2 = 0,$$

yang menghasilkan $x = 0$ atau $y = -1$. Oleh karena itu, titik-titik kritisnya adalah $(0, 0), (\sqrt{2}, -1)$, dan $(-\sqrt{2}, -1)$.
Untuk menguji jenis keekstriman titik-titik tersebut, diperoleh

$$(x, y) = (0, 0) \Rightarrow D = f_x(0, 0)f_y(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 4 > 0,$$

$$\begin{aligned}(x, y) = (\sqrt{2}, -1) \Rightarrow D &= f_x(\sqrt{2}, -1)f_y(\sqrt{2}, -1) \\ &\quad - f_{xy}^2(\sqrt{2}, -1) \\ &= -8 < 0,\end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
(x, y) = (-\sqrt{2}, -1) \Rightarrow D &= f_x(-\sqrt{2}, -1) f_y(-\sqrt{2}, -1) \\
&\quad - f_{xy}^2(-\sqrt{2}, -1) \\
&= -8 < 0.
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu titik $(0, 0)$ memberikan nilai ekstrim minimum. Dengan mensubstitusikan $x = 0$ dan $y = 0$ ke nilai d diperoleh $d = 2$, yang merupakan jarak terdekat titik asal ke permukaan.

5.2 Maksimum dan Minimum Mutlak

Pada subbab ini dikenalkan pengertian titik maksimum mutlak (titik maksimum global), titik minimum mutlak (titik minimum global), nilai maksimum mutlak (nilai maksimum global), dan nilai minimum mutlak (nilai minimum global).

Definisi 5.9. *Diberikan f fungsi dua peubah pada himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^2$.*

a. *Fungsi f dikatakan mempunyai* **nilai maksimum mutlak** *atau cukup dikatakan* **nilai maksimum** *di titik $(x_0, y_0) \in D$ jika $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ untuk setiap (x, y) di D.*

b. *Fungsi f dikatakan mempunyai* **nilai minimum mutlak** *atau cukup dikatakan* **nilai minimum** *di titik $(x_0, y_0) \in D$ jika $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ untuk setiap (x, y) di D.*

Titik ekstrim suatu fungsi belum tentu ada. Namun, jika fungsinya kontinu pada domain tertutup dan terbatas maka fungsi tersebut mempunyai nilai maksimum dan minimum, seperti diberikan pada teorema berikut.

Teorema 5.10. *Jika f fungsi dua peubah yang kontinu pada himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tertutup dan terbatas, maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum pada D.*

Teorema 5.11. Teorema titik kritis *Diberikan fungsi $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Titik ekstrim dari f merupakan salah satu dari*

i. **Titik-stasioner**, *yakni titik $(x, y) \in D$ yang memenuhi $\nabla f(x, y) = 0$;*

ii. **Titik-singular**, *yakni titik $(x, y) \in D$ dimana turunan f di titik tersebut tidak ada;*

iii. Titik-batas dari D.

Contoh 5.12. *Tentukan semua titik-stasioner, titik-singular, dan titik-batas dari fungsi $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ pada domain $D = \{(x, y)|x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.*

Penyelesaian: Titik-singular f adalah $(0, 0)$ (mengapa?)
Titik-batas f adalah semua titik $(x, y) \in D$ yang memenuhi $x^2+4y^2 = 1$.
f tidak mempunyai titik-stasioner pada D.

Untuk menentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi f pada himpunan D tertutup dan terbatas, berikut diberikan caranya:

1. Tentukan nilai-nilai dari semua titik kritis f di D.
2. Tentukan nilai ektrim f pada titik-titik-batas dari D.
3. Nilai terbesar dari f pada butir 1 dan 2 merupakan nilai maksimum, dan nilai terkecil dari f pada butir 1 dan 2 merupakan nilai minimum.

Contoh 5.13. *Tentukan nilai maksimum dan minimum mutlak dari $f(x, y) = x^2-2xy+2y$ pada persegipanjang $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.*

Penyelesaian: Fungsi f merupakan polinomial, sehingga merupakan fungsi kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas D. Berdasarkan Teorema 5.10, f mempunyai nilai maksimum dan juga nilai minimum mutlak. Tahap berikutnya adalah mencari semua titik kritis. Untuk mendapatkan titik-titik kritis f, turunan parsial f masing-masing terhadap x dan y harus sama dengan nol:

$$f_x = 2x - 2y = 0, \qquad \text{dan} \qquad f_y = -2x + 2 = 0,$$

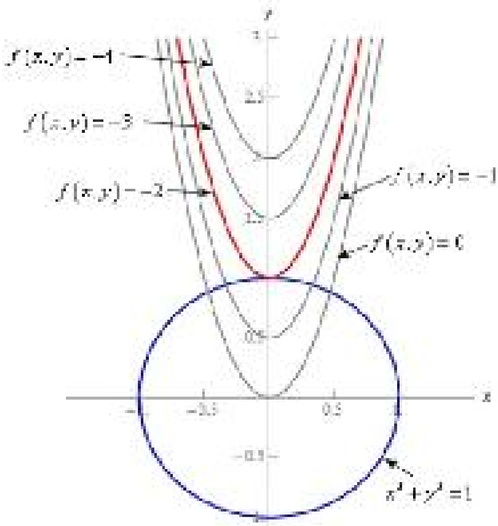
sehingga diperoleh titik kritis $(1, 1)$ dan nilainya $f(1, 1) = 1$.
Tahap kedua mencari nilai ekstrim f pada titik- batas persegipanjang, diperoleh titik-titik kritisnya $(0, 0), (3, 2), (3, 0), (2, 2)$, dan $(0, 2)$ yang memberikan hasil

$$f(0, 0) = 0, f(3, 0) = 9, f(3, 2) = 1, f(2, 2) = 0, f(0, 2) = 4.$$

Dengan melihat hasil-hasil di atas, disimpulkan nilai maksimum f adalah 9 dan nilai minimumnya adalah 0.

5.3 Metode Pengali Lagrange

Pandang fungsi dua peubah $f(x, y) = 8x^2 - 2y$ dengan kendala atau konstrain $x^2 + y^2 = 1$. Ilustrasi diberikan pada Gambar 5.3.



Gambar 5.3: Fungsi $f(x, y) = 8x^2 - 2y$ dengan kendala $x^2 + y^2 = 1$

Untuk menentukan nilai maksimum dan minimum $f(x, y, z)$ dengan kendala $g(x, y, z) = c$ (anggap nilai ekstrim g ada dan $\nabla g \neq 0$ pada permukaan $g(x, y, z) = c$) adalah sebagai berikut:

(a) Tentukan semua nilai x, y, z, dan λ sedemikian hingga

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \tag{5.1}$$

dan

$$g(x, y, z) = c$$

(b) Evaluasi nilai f di titik-titik (x, y, z) dari hasil tahap (a). Nilai terbesarnya merupakan nilai maksimum dari f dan nilai terkecilnya merupakan nilai minimum dari f.

Bilangan λ pada persamaan (5.1) dinamakan **pengali Lagrange**.

Teorema 5.14. *Diberikan fungsi f dan g keduanya memiliki turunan parsial pertama yang kontinu sedemikian hingga f mempunyai nilai ekstrim di titik (x_0, y_0) pada kurva konstrain mulus $g(x, y) = c$. Jika $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, maka terdapat bilangan λ sedemikian hingga*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Bukti: Misal diberikan kurva mulus $g(x, y) = c$ dengan fungsi bernilai vektor

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}'(t) \neq 0,$$

dengan x' dan y' keduanya kontinu pada selang buka I. Definisikan fungsi h dengan $h(t) = f(x(t), y(t))$. Karena $f(x_0, y_0)$ nilai ekstrim dari f, maka diperoleh

$$h(t_0) = f(x(t_0), y(t_0)) = f(x_0, y_0)$$

merupakan nilai ekstrim h. Hal ini mengakibatkan $h'(t_0) = 0$, dan dengan Aturan Rantai diperoleh

$$h'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

Dengan demikian, $\nabla f(x_0, y_0)$ tegak lurus dengan $\mathbf{r}'(t_0)$. Oleh karena itu, $\nabla g(x_0, y_0)$ juga tegak lurus dengan $\mathbf{r}'(t_0)$. Akibatnya, gradien $\nabla f(x_0, y_0)$ sejajar dengan gradien $\nabla g(x_0, y_0)$, dan terdapat skalar λ sedemikian hingga

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0). \qquad \square$$

Contoh 5.15. *Tentukan nilai ekstrim fungsi $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dengan menggunakan metode pengali Lagrange.*

Penyelesaian: Akan diselesaikan $\nabla f = \lambda \nabla g$ dengan $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Untuk itu diperoleh

$$f_x = \lambda g_x, \qquad f_y = \lambda g_y, \qquad g(x, y) = 1,$$

atau

$$2x = 2x\lambda, \qquad 4y = 2y\lambda, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Dari persamaan pertama diperoleh hasil $x = 0$ atau $\lambda = 1$. Jika $x = 0$ menghasilkan $y = \pm 1$. Jika $\lambda = 1$, maka $y = 0$, sehingga $x = \pm 1$. Oleh karena itu, kemungkinan f mempunyai nilai ekstrim di titik-titik

$(0,1), (0,-1), (1,0)$, dan $(-1,0)$. Dengan mengevaluasi nilai f di titik-titik tersebut, diperoleh

$$f(0,1) = 2, \qquad f(0,-1) = 2, \qquad f(1,0) = 1, \qquad f(-1,0) = 1.$$

Oleh karena itu, nilai maksimum f pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ adalah 2 dan nilai minimumnya 1.

Contoh 5.16. *Tentukan titik-titik pada bola* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *yang terdekat dan yang terjauh dari titik* $(3, 1, -1)$.

Penyelesaian: Jarak kuadrat titik (x, y, z) di bola ke titik $(3, 1, -1)$ adalah

$$d^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2.$$

Fungsi kendalanya adalah titik (x, y, z) di bola sedemikian hingga

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Dengan menggunakan metode pengali Lagrange, akan diselesaikan $\nabla f = \lambda \nabla g$, dan $g = 4$. Hal ini memberikan persamaan-persamaan

$$2(x-3) = 2x\lambda, \tag{5.2}$$

$$2(y-1) = 2y\lambda, \tag{5.3}$$

$$2(z+1) = 2z\lambda, \tag{5.4}$$

dan

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4. \tag{5.5}$$

Dari persamaan (5.2), memberikan

$$x - 3 = x\lambda \qquad \text{atau} \qquad x(1-\lambda) = 3 \qquad \text{atau} \qquad x = \frac{3}{1-\lambda}.$$

Dari persamaan (5.3), memberikan

$$y = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Dari persamaan (5.4), memberikan

$$z = -\frac{1}{1-\lambda}.$$

Oleh karena itu, dari persamaan (5.5), diperoleh

$$\frac{3^2}{(1-\lambda^2)} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4.$$

yang mana memberikan hasil $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$.
Untuk $\lambda = 1 + \frac{\sqrt{11}}{2}$, memberikan hasil

$$x = \frac{6}{\sqrt{11}}, \qquad y = \frac{2}{\sqrt{11}}, \qquad z = -\frac{2}{\sqrt{11}}.$$

Sedangkan untuk $\lambda = 1 - \frac{\sqrt{11}}{2}$, memberikan hasil

$$x = -\frac{6}{\sqrt{11}}, \qquad y = -\frac{2}{\sqrt{11}}, \qquad z = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

Jadi, titik di bola yang terdekat dengan titik $(3, 1, -1)$ adalah $(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}})$ dan yang terjauh adalah $(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}})$.

Jika fungsi kendalanya ada dua, maka pada persamaan (5.1) ditambahkan seperti berikut:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu h(x_0, y_0, z_0),$$

dengan λ dan μ adalah pengali-pengali Lagrange.

Contoh 5.17. *Tentukan nilai maksimum fungsi $f(x, y, z) = x+2y+3z$ pada kurva hasil perpotongan bidang $x-y+z = 1$ dan tabung $x^2+y^2 = 1$.*

Penyelesaian: Akan ditentukan nilai maksimum $f(x, y, z) = x+2y+3z$ dengan kendala $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ dan $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. Syarat Lagrange adalah $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, sehingga diperoleh

$$1 = \lambda + 2x\mu$$

$$2 = -\lambda + 2y\mu$$

$$3 = \lambda$$

$$x - y + z = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Dengan mengambil $\lambda = 3$, diperoleh $x = -1/\mu$. Dengan cara serupa, diperoleh $y = 5/(2\mu)$. Dengan mensubstitusikan hasil ini, diperoleh

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

sehingga $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Oleh karena itu diperoleh

$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{29}} \qquad y = \pm\frac{5}{\sqrt{29}}$$

Nilai maksimum diperoleh $3 + \sqrt{29}$.

5.4 Rangkuman

1. Diberikan f fungsi dua peubah x dan y.

   a. Titik (x_0, y_0) dikatakan **titik maksimum lokal** f jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ untuk setiap $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$. Bilangan $f(x_0, y_0)$ disebut **nilai maksimum lokal** f.

   b. Titik (x_0, y_0) dikatakan **titik minimum lokal** jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ untuk setiap $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$. Selanjutnya, bilangan $f(x_0, y_0)$ disebut **nilai minimum lokal** f.

2. Diberikan fungsi dua peubah f dan (x_0, y_0) elemen domain f.

   i. Titik (x_0, y_0) disebut **titik kritis** f jika $f_x(x_0, y_0) = 0$ dan $f_y(x_0, y_0) = 0$ atau salah satu dari turunan parsialnya di titik (x_0, y_0) tidak ada.

   ii. Titik (x_0, y_0) disebut **titik ekstrim** jika $f(x_0, y_0)$ merupakan nilai maksimum/minimum. Selanjutnya, jika (x_0, y_0) titik ekstrim f, maka $f(x_0, y_0)$ disebut **nilai ekstrim**.

3. Jika f mempunyai maksimum lokal atau minimum lokal di (x_0, y_0) dan turunan-turunan parsial orde satunya ada, maka $f_x(x_0, y_0) = 0$ dan $f_y(x_0, y_0) = 0$.

4. **Uji Turunan Kedua**. Diberikan fungsi f dengan turunan parsial keduanya kontinu pada suatu $B_\delta(x_0, y_0)$ dengan $f_x(x_0, y_0) = 0$ dan $f_y(x_0, y_0) = 0$. Misalkan

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0).$$

a. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, maka $f(x_0, y_0)$ merupakan nilai maksimum lokal.

b. Jika $D > 0$ dan $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, maka $f(x_0, y_0)$ merupakan nilai minimum lokal.

c. Jika $D < 0$, maka $f(x_0, y_0)$ bukan merupakan nilai maksimum lokal atau minimum lokal. Dalam kasus ini, titik (x_0, y_0) disebut titik pelana f.

d. Jika $D = 0$, uji gagal.

5. Diberikan f fungsi dua peubah pada himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

   a. Fungsi f dikatakan mempunyai **nilai maksimum** di titik (x_0, y_0) di D jika $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ untuk setiap (x, y) di D.

   b. Fungsi f dikatakan mempunyai **nilai minimum mutlak** di titik (x_0, y_0) di D jika $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ untuk setiap (x, y) di D.

6. Jika f fungsi dua peubah yang kontinu pada himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tertutup dan terbatas, maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum di D.

7. **Teorema titik kritis** Diberikan fungsi $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Titik ekstrim dari f merupakan salah satu dari

   i. **Titik-stasioner**, yakni titik $(x, y) \in D$ yang memenuhi $\nabla f(x, y) = 0$;

   ii. **Titik-singular**, yakni titik $(x, y) \in D$ dimana turunan f di titik tersebut tidak ada;

   iii. Titik-batas dari D.

8. Diberikan fungsi f dan g keduanya memiliki turunan parsial pertama yang kontinu sedemikian hingga f mempunyai nilai ekstrim di titik (x_0, y_0) pada kurva konstrain mulus $g(x, y) = c$. Jika $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, maka terdapat bilangan λ sedemikian hingga

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

5.5 Latihan Soal

1. Tentukan semua titik kritis dari fungsi dua peubah

$$f(x, y) = -x^4 + 2x^3 + 39x^2 + 10x^2y - 10xy - 40x - y^2 - 8y - 16,$$

   dan klasifikasikan sebagai titik minimum lokal, titik maksimum lokal, atau titik pelana.

2. Tentukan semua titik kritis dari fungsi tiga peubah

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{10}{3}x^2 - \frac{44}{3}x + \frac{64}{3} - \frac{10}{3}xy + \frac{16}{3}y + \frac{2}{3}xz - \frac{20}{3}z \\ &\quad + \frac{10}{3}y^2 + \frac{2}{3}yz + \frac{4}{3}z^2, \end{aligned}$$

   dan klasifikasikan sebagai titik minimum lokal, titik maksimum lokal, atau titik pelana.

3. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal fungsi

$$f(x, y) = (x - y)(xy - 2)$$

4. Jika $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 \leq 4\}$. Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ pada D.

5. Hitung jarak (terdekat) titik $P(1, -1, 0)$ ke permukaan

$$z = \sqrt{xy + 4}$$

   .

6. Tentukan titik pada kerucut $z^2 = x^2 - y^2$ yang paling dekat dengan titik $(4, 2, 0)$.

7. Tentukan titik (x, y, z) pada permukaan $4x^2 + y^2 - z^2 = 1$ yang paling dekat dengan titik $(0, 0, 0)$.

8. Tentukan ukuran kotak persegi panjang agar volumenya maksimal jika luas permukaan total yang diberikan adalah 64 cm^2.

9. Jika $D = \{(x, y) \big| |x| \leq 1, |y| \leq 4\}$, tentukan nilai maksimum dan minimum mutlak fungsi $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ pada D.

10. Tentukan ukuran kotak yang mempunyai volume 1000 cm^2 yang mempunyai luas permukaan minimum.

11. Gunakan metode pengali Lagrange untuk menentukan nilai minimum $f(x, y, z) = 4x - 2y + 3z$ dengan kendala $2x^2 + y^2 - 3z = 0$.

12. Tentukan nilai-nilai ekstrim $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$ dengan kendala $x + y - z = 0$ dan $x^2 + 2z^2 = 1$.

13. Tentukan nilai-nilai ekstrim $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4x - 4y$ pada daerah $\{(x, y) \big| x^2 + y^2 \leq 9\}$

5.6 Bahan Diskusi

1. Berikan pengertian titik kritis dan nilai kritis pada fungsi tiga peubah.

2. Berikan pengertian titik kritis dan nilai kritis pada fungsi peubah banyak (n peubah).

3. Titik (x, y) yang memenuhi hubungan $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ disebut titik kritis. Jika terdapat n ($n > 1$) buah titik kritis, bagaimana menentukan titik maksimum dan minimumnya?

5.7 Daftar Rujukan

1. Breen, J., 2020, *Advanced Multivariable Differential Calculus*, University of California, Los Angeles

2. Feldman, J., Andrew Rechnitzer dan Elyse Yeager, 2021, *Multivariable Calculus*, Creative Commons Attribution, British Columbia.

3. Guichard, D. dan N. Koblitz, 2022, *Single and Multivariable Calculus*, Creative Commons, San Francisco.

4. Kim, S., 2022, *Multivariable Calculus*, Mississippi State University, Michigan

5. Shimamoto, D., 2019, *Multivariable Calculus*, Swarthmore College, Philadelphia

6. Stewart, J., 2018, *Multivariable Calculus*, Edisi 8, Cengage Learning: Belmont, USA

Bab 6

Integral Lipat Dua

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian jumlah Riemann atas fungsi dua atau tiga peubah
2. Mahasiswa mampu menjelaskan integral lipat dua pada suatu daerah sebagai integral berulang
3. Mahasiswa mampu menghitung integral lipat dua fungsi dua peubah
4. Mahasiswa mampu menghitung integral lipat dua sebagai integral berulang dengan mengubah urutan integrasi
5. Mahasiswa mampu menerapkan integral lipat dua dalam permasalahan sehari-hari.

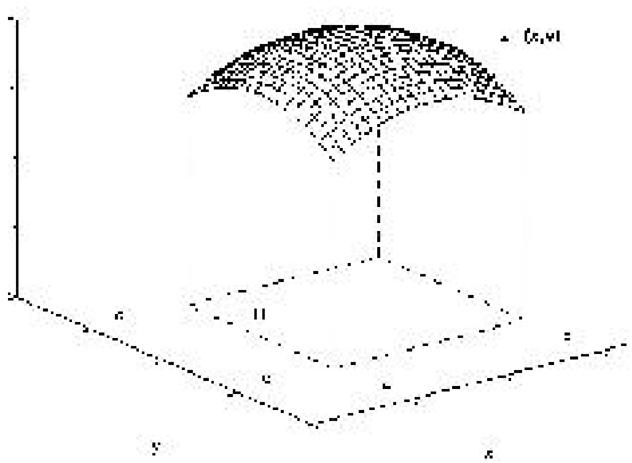
6.1 Integral Lipat Dua atas Persegipanjang

Pada kuliah Kalkulus, telah dikenalkan integral Riemann fungsi satu peubah yang terdefinisi pada selang tertutup dan terbatas. Pada Kalkulus Peubah Banyak di bab ini, akan dikenalkan dan dibahas integral fungsi dua peubah yang terdefinisi pada suatu daerah tertutup dan terbatas di $\mathbb{R}^2$. Untuk mengawali hal itu, dikenalkan integral fungsi dua peubah atas daerah persegipanjang dengan menganggap fungsinya bernilai nonnegatif.

Misal diberikan fungsi f nonnegatif yang terdefinisi pada daerah persegipanjang tertutup dan terbatas

$$R = \{(x, y)\big|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Grafik fungsi f dengan persamaan $z = f(x, y)$ yang terdefinisi pada daerah persegipanjang R berupa permukaan, seperti diberikan pada Gambar 6.1. Tujuan di sini adalah mencari volume benda yang berada di bawah permukaan kurva f dan di atas daerah persegipanjang R.



Gambar 6.1: Permukaan $z = f(x, y)$ pada daerah persegi panjang R

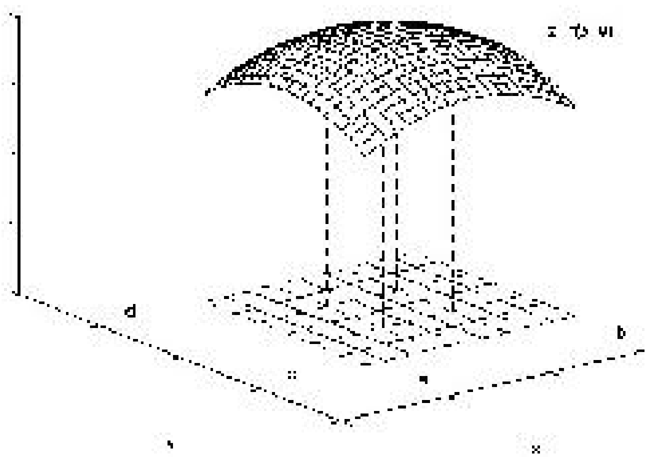
Tahap awal dalam menghitung volume daerah yang dimaksud adalah membagi daerah R ke dalam bagian-bagian persegipanjang yang lebih kecil. Misalkan pada selang $[a, b]$ dibagi ke dalam m subselang yang sama panjang dengan lebar $\Delta x = (b - a)/m$ dan membagi $[c, d]$

ke dalam n subselang sama panjang dengan lebar $\Delta y = (d - c)/n$. Selanjutnya, dibentuk sub-subpersegipanjang

$$R_{ij} = \{(x, y) \big| x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

dengan $i = 1, 2, \cdots, m$ dan $j = 1, 2, \cdots, n$. Jika dipilih titik tertentu (x_{ij}^*, y_{ij}^*) di setiap R_{ij} seperti Gambar 6.2, maka volume benda di bawah permukaan f dan di atas daerah R dapat dihampiri sebagai

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\ \Delta A$$



Gambar 6.2: Partisi daerah persegi panjang R ke dalam sub-subpersegi-panjang kecil

Dengan mengambil m dan n cukup besar, diperoleh

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\ \Delta A$$

Definisi 6.1. Integral lipat dua *fungsi f atas daerah persegi R adalah*

$$\iint_R f(x, y)\ dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*.y_{ij}^*)\Delta A$$

jika limitnya ada.

Fungsi f dikatakan **terintegral** pada R jika limit pada Definisi 6.1 ada. Khususnya, jika f terbatas, yakni terdapat $M > 0$ sehingga $|f(x,y)| < M$ untuk setiap (x,y) di R, dan kontinu, maka f terintegral pada R.

Teorema 6.2. *Aturan Titik Tengah Integral Lipat Dua*

$$\iint_R f(x,y)\ dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\overline{x}_i.\overline{y}_j)\Delta A$$

dengan $\overline{x}_i$ *adalah titik tengah* $[x_{i-1}, x_i]$ *dan* $\overline{y}_j$ *adalah titik tengah* $[y_{j-1}, y_j]$.

Jika $f(x,y) \geq 0$, maka volume benda V di atas daerah R dan di bawah permukaan $z = f(x,y)$ adalah

$$V = \iint_R f(x,y)\ dA.$$

Contoh 6.3. *Estimasikan volume benda di bawah permukaan* $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ *dan di atas daerah persegi* $R = \{(x,y)\big|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ *dengan membagi subselang searah sumbu-*x *dan searah sumbu-*y *masing-masing 2 dan titik terpilihnya merupakan titik tengah.*

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_i)\ \Delta A \\ &= f(1/4, 1/2)\frac{1}{2} + f(3/4, 1/2)\frac{1}{2} + f(1/4, 3/2)\frac{1}{2} + f(3/4, 3/2)\frac{1}{2} \\ &= \frac{139}{32} + \frac{131}{32} + \frac{107}{32} + \frac{99}{32} = \frac{119}{8}. \end{aligned}$$

Beberapa sifat integral lipat dua diberikan pada teorema berikut.

Teorema 6.4. *Jika* f *dan* g *keduaanya terintegral pada daerah persegipanjang* R*, maka*

1. $f + g$ *terintegral pada* R *dan*

$$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\ dA = \iint_R f(x,y)\ dA + \iint_R g(x,y)\ dA.$$

2. *jika k konstanta, maka kf terintegral pada R dan*

$$\iint_R kf(x,y)\ dA = k\iint_R f(x,y)\ dA$$

.

3. *Jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ untuk setiap (x,y) di R, maka*

$$\iint_R f(x,y)\ dA \leq \iint_R g(x,y)\ dA.$$

6.2 Integral Berulang

Jika

$$R(x) = \int_c^d f(x,y)\ dy$$

diintegralkan terhadap x dari $x = a$ sampai $x = b$, diperoleh

$$\int_a^b R(x)\ dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx. \tag{6.1}$$

Integral pada ruas kanan persamaan (6.1) disebut **integral berulang**, dan biasanya dituliskan

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy\right]\ dx.$$

Contoh 6.5. *Evaluasi integral berulang berikut*

$$\int_0^2 \int_1^3 xy^2\ dy\ dx$$

Penyelesaian: Dengan mengintegralkan terhadap y dan memandang x sebagai konstanta, diperoleh

$$\int_1^3 xy^2\ dy = \frac{1}{3}xy^3\Big|_{y=1}^{y=3} = \frac{1}{3}x(3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}x$$

Kemudian mengintegralkan terhadap x, diperoleh

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_1^3 xy^2\ dy\ dx &= \int_0^2 \left[\int_1^3 xy^2\ dy\right]\ dx \\ &= \int_0^2 \frac{26}{3}x\ dx \\ &= \frac{26}{6}x^2\Big|_0^2 = \frac{26}{6}(2^2 - 0^2) = \frac{52}{3}.\end{aligned}$$

Selanjutnya, perhatikan dua integral berulang berikut

$$\int_0^3 \int_0^2 1 + (x-1)^2 + 4y^2 \; dy \; dx$$

dan

$$\int_0^2 \int_0^3 1 + (x-1)^2 + 4y^2 \; dx \; dy$$

yang merupakan dua integral dengan integran yang sama namun urutan integrasinya dibalik. Integral pertama menghasilkan

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^2 1 + (x-1)^2 + 4y^2 \; dy \; dx &= \int_0^3 y + (x-1)^2 y + \frac{4}{3}y^3 \Big|_0^2 dx \\
&= \int_0^3 2 + 2(x-1)^2 + \frac{32}{3} \; dx \\
&= 2x + \frac{2}{3}(x-1)^3 + \frac{32}{3}x \Big|_0^3 \\
&= 6 + \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{32}{3} \cdot 3 - (0 - 1 \cdot \frac{2}{3} + 0) \\
&= 44.
\end{aligned}$$

Sedangkan integral kedua menghasilkan

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^3 1 + (x-1)^2 + 4y^2 \; dx \; dy &= \int_0^2 x + \frac{(x-1)^3}{3} y + 4y^2 x \Big|_0^3 dy \\
&= \int_0^2 3 + \frac{8}{3} + 12y^2 + \frac{1}{3} \; dy \\
&= 3y + \frac{8}{3}y + 4y^3 + \frac{1}{3}y \Big|_0^2 \\
&= 6 + \frac{16}{3} + 32 + \frac{2}{3} = 44.
\end{aligned}$$

Ternyata kedua integral tersebut menghasilkan nilai yang sama. Apakah secara umum urutan integrasi bisa dibolak-balik? Untuk mengetahui hal tersebut, diberikan teorema berikut.

Teorema 6.6. Teorema Fubini. *Jika f kontinu pada persegipanjang $D = \{(x,y) \big| a \le x \le b, c \le y \le d\}$, maka*

$$\iint_D f(x,y) \; dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \; dy \; dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \; dx \; dy$$

Contoh 6.7. *Evaluasi integral lipat dua*

$$\iint_D (x - y^2)\ dA,$$

dengan $D = \{(x, y)\big| 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

Penyelesaian: Karena fungsi $f(x, y) = x - y^2$ kontinu pada D, dengan menggunakan Teorema Fubini, diperoleh

$$\begin{aligned}
\iint_D (x - y^2) dA &= \int_0^1 \int_0^2 (x - y^2)\ dy\ dx \\
&= \int_0^1 \Big[xy - \frac{1}{3}y^3\Big]_0^2 dx \\
&= \int_0^1 (2x - \frac{8}{3})\ dx \\
&= \big(x^2 - \frac{8}{3}x\big)\Big|_0^1 = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Cara lain menyelesaikan integral di atas dengan menggunakan Teorema Fubini adalah dengan mengganti urutan integral, diperoleh

$$\begin{aligned}
\iint_D (x - y^2) dA &= \int_0^2 \int_0^1 (x - y^2)\ dx\ dy \\
&= \int_0^2 \Big[\frac{1}{2}x^2 - xy^2\Big]_0^1\ dy \\
&= \int_0^2 (\frac{1}{2} - y^2)\ dy \\
&= (\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}y^3)\Big|_0^2 \\
&= 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Pada Teorema Fubini integral lipat dua, bahwasannya urutan integralnya bisa dibalik, sehingga bisa dipilih mana yang lebih mudah dalam menghitung integral. Untuk lebih jelasnya, diberikan contoh berikut.

Contoh 6.8. *Evaluasi*

$$\iint_D y \sin(xy)\ dA,$$

dengan $D = \{(x, y)\big| 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi\}$.

Penyelesaian: Menurut Teorema Fubini

$$\iint_D y\sin(xy)\ dA = \int_1^2 \int_0^\pi y\sin(xy)\ dy\ dx$$

Untuk menyelesaikan $\int_0^\pi y\sin(xy)dy$ tidak mudah. Untuk itu akan dicoba membalik urutan integralnya

$$\begin{aligned}
\iint_D y\sin(xy)\ dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y\sin(xy)\ dx\ dy \\
&= \int_0^\pi \Big[-\cos(xy)\Big]_{x=1}^{x=2}\ dy \\
&= \int_0^\pi (\cos y - \cos 2y)\ dy \\
&= (\sin y - \frac{1}{2}\sin 2y)\Big|_0^\pi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Teorema 6.9. *Jika g terintegral pada $[a,b]$ dan h terintegral pada $[c,d]$, maka gh terintegral pada persegipanjang $D = [a,b]\times[c,d]$ dan*

$$\iint_D g(x)h(y)\ dA = \int_a^b g(x)\ dx \int_c^d h(y)\ dy$$

Contoh 6.10. *Evaluasi*

$$\iint_D x\cos y\ dA$$

dengan $D = \{(x,y)\big|1 \le x \le 2, 0 \le y \le \pi/2\}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\iint_D x\cos y\ dA &= \int_1^2 x dx \int_0^{\pi/2} \cos y\ dy \\
&= \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2 \Big[\sin y\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}(4-1)(1-0) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ingat kembali pengertian fungsi ganjil yang telah diberikan pada Bab 1. Berikut teorema yang berkenaan dengan sifat integral fungsi ganjil pada cakram tertutup yang berpusat di titik asal.

Teorema 6.11. *Jika f fungsi ganjil dan terintegral pada D cakram tertutup berpusat di titik asal, maka*

$$\iint_D f(x,y)\ dA = 0.$$

Pada Teorema 6.11, besarnya jari-jari cakram tertutup D tidak berpengaruh pada hasil pengintegralan.

Contoh 6.12. *Evaluasi integral*

$$\iint_D x^2 \sin{(x+y)}\ dA,$$

dengan $D = \{(x,y)\big| x^2+y^2 \leq 4\}$.

Penyelesaian: Karena $f(x,y) = x^2 \sin{(x+y)}$ adalah fungsi ganjil dan D adalah cakram tertutup yang berpusat di titik asal, berdasarkan Teorema 6.11, diperoleh $\iint_D x^2 \sin{(x+y)}\ dA = 0$.

Akibat 6.13. *Jika f fungsi simetri terhadap titik $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$ dan terintegral pada D cakram tertutup berpusat di titik $\mathbf{x_0}$, maka*

$$\iint_D f(x,y)\ dA = 0.$$

6.3 Integral Lipat Dua atas Daerah Umum

Pada integral tunggal, domain integralnya berupa selang. Untuk integral lipat dua, akan didefinisikan integral atas daerah yang lebih umum tidak sekedar daerah persegipanjang. Sebagai tahap awal, dikenalkan jenis-jenis daerah D pada bidang-xy.

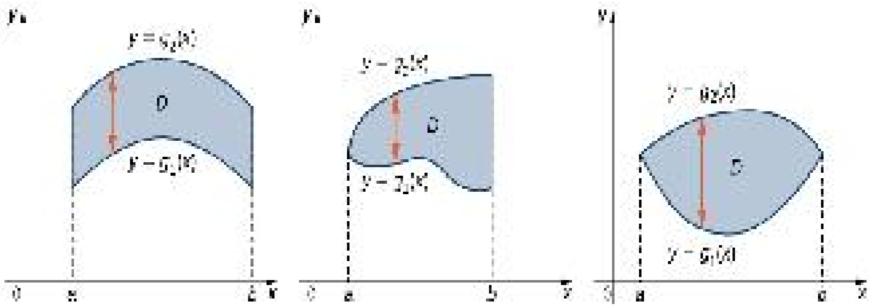
Daerah bidang D dikatakan **jenis pertama** jika daerah tersebut dibatasi oleh dua grafik fungsi kontinu yang merupakan fungsi-fungsi dari x, yakni

$$D = \{(x,y)\big| a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

dengan g_1 dan g_2 fungsi-fungsi kontinu pada selang $[a,b]$. Sebagai contoh beberapa daerah jenis pertama dapat dilihat pada Gambar 6.3.

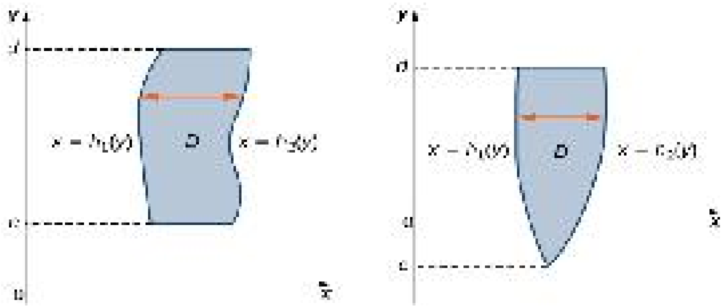
Daerah bidang D dikatakan **jenis kedua** jika daerah tersebut dibatasi oleh dua grafik fungsi kontinu yang merupakan fungsi-fungsi dari y, yakni

$$D = \{(x,y)\big| c \leq y \leq d, h_1(x) \leq x \leq h_2(x)\}$$



Gambar 6.3: Daerah jenis pertama

dengan h_1 dan h_2 fungsi-fungsi kontinu pada selang $[c, d]$. Sebagai contoh beberapa daerah jenis kedua dapat dilihat pada Gambar 6.4.



Gambar 6.4: Daerah jenis kedua

Teorema 6.14. *Jika f kontinu pada daerah jenis pertama $D = \{(x,y)\big|a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, maka*

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy\ dx.$$

Teorema 6.15. *Jika f kontinu pada daerah jenis kedua $D = \{(x,y)\big|h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$, maka*

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ dx\ dy.$$

Contoh 6.16. *Evaluasi*

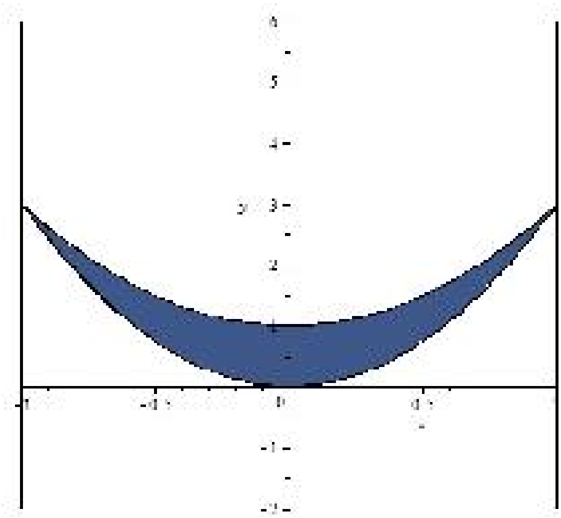
$$\iint_D (2x + 3y)\, dA$$

dengan D adalah daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 3x^2$ dan $y = 1 + 2x^2$.

Penyelesaian: Titik potong parabola $y = 3x^2$ dan $y = 1 + 2x^2$ adalah di $x = \pm 1$. Daerah D dinyatakan sebagai

$$D = \{(x, y)\big| -1 \leq x \leq 1, 3x^2 \leq y \leq 1 + 2x^2\}$$

seperti diberikan pada Gambar 6.5, yang merupakan daerah jenis pertama.



Gambar 6.5: Daerah $D = \{(x, y)\big| -1 \leq x \leq 1, 3x^2 \leq y \leq 1 + 2x^2\}$

Oleh karena itu, dengan menggunakan sifat fungsi ganjil diperoleh

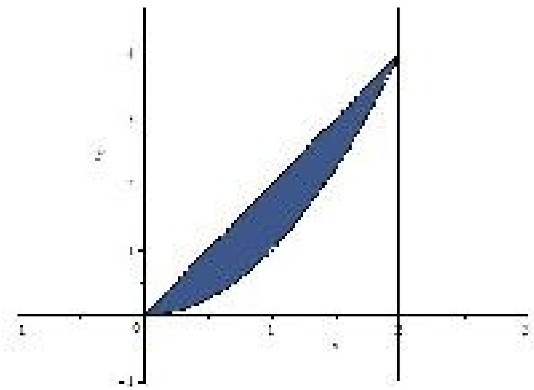
$$\begin{aligned}
\iint_D (2x+3y)\ dA &= \int_{-1}^{1}\int_{y=3x^2}^{y=1+2x^2} (2x+3y)\ dy\ dx \\
&= \int_{-1}^{1} (2xy + \frac{3}{2}y^2)\Big|_{y=3x^2}^{y=1+2x^2}\ dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[2x - 2x^3 + \frac{3}{2}(1+2x^2)^2 - \frac{27}{2}x^4)\Big]\ dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[\frac{3}{2}(1+2x^2)^2 - \frac{27}{2}x^4)\Big]\ dx \\
&= (-\frac{3}{2}x^5 + 2x^3 + \frac{3}{2}x)\Big|_{-1}^{1} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Contoh 6.17. *Hitunglah volume benda pejal yang berada di bawah paraboloida* $z = x^2 + y^2$ *dan daerah* D *di bidang-xy yang dibatasi oleh garis* $y = 2x$ *dan parabola* $y = x^2$.

Penyelesaian: Titik potong garis $y = 2x$ dan parabola $y = x^2$ adalah $(0,0)$ dan $(2,4)$. Daerah D dinyatakan sebagai

$$D = \{(x,y)\big|0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 2x\},$$

seperti diberikan pada Gambar 6.6, yang merupakan daerah jenis pertama.



Gambar 6.6: Daerah $D = \{(x,y)\big|0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 2x\}$

Oleh karena itu, deproleh

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\ dA &= \int_0^2 \int_{y=x^2}^{y=2x} (x^2+y^2)\ dy\ dx \\ &= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{14}{3}x^3 - \frac{x^6}{3} - x^4\right] dx \\ &= \left[\frac{14}{12}x^4 - \frac{1}{21}x^7 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 \\ &= \frac{216}{35}.\end{aligned}$$

Jika diperhatikan, daerah D dapat pula dinyatakan sebagai

$$D = \{(x,y) \big| 0 \le y \le 4, y/2 \le x \le \sqrt{y}\},$$

yang merupakan daerah jenis kedua.
Oleh karena itu, perhitungan integralnya diperoleh

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\ dA &= \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} (x^2+y^2)\ dx\ dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^2}{2}\right] dy \\ &= \frac{2}{15}y^{5/2} + \frac{2}{7}y^{7/2} - \frac{13}{96}y^4 \Big|_0^4 \\ &= \frac{216}{35}.\end{aligned}$$

Sebelum masuk teorema berikutnya, diberikan dulu pengertian dua himpunan tidak saling tumpang-tindih.
Diberikan himpunan D_1 dan D_2 merupakan himpunan-himpunan bagian dari $\mathbb{R}^2$. Himpunan D_1 dan D_2 dikatakan **tidak saling tumpang-tindih** jika $D_1^0 \cap D_2^0 = \emptyset$.

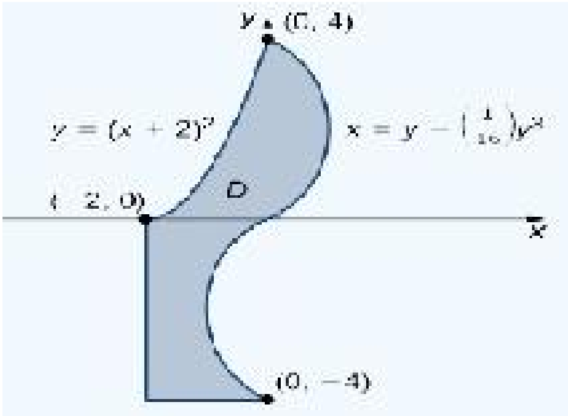
Teorema 6.18. *Diberikan $D = D_1 \cup D_2$ dengan D_1 dan D_2 tidak saling tumpang-tindih. Jika f terintegral pada D_1 dan pada D_2, maka f terintegral pada D, dan*

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \iint_{D_1} f(x,y)\ dA + \iint_{D_2} f(x,y)\ dA$$

Contoh 6.19. *Evaluasi*

$$\iint_D (x + 2y)\ dA$$

dengan D adalah daerah seperti diberikan pada Gambar 6.7.



Gambar 6.7: Daerah D pada Contoh 6.19

Penyelesaian Daerah D dapat didekomposisi menjadi dua, yakni D_1 daerah yang berada di atas sumbu-x dan D_2 daerah yang berada di bawah sumbu-x. Daerah-daerah tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$D_1 = \{(x, y)\big|0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} - 2 \leq x \leq y - \frac{y^3}{16}\}$$

dan

$$D_2 = \{(x, y)\big| - 4 \leq y \leq 0, -2 \leq x \leq y - \frac{y^3}{16}\}$$

yang mana keduanya merupakan daerah jenis kedua. Berdasarkan Teorema 6.18, diperoleh

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+2y)\ dA &= \iint_{D_1} (x+2y)\ dA + \iint_{D_2} (x+2y)\ dA \\
&= \int_0^4 \Big[\int_{\sqrt{y}-2}^{y-\frac{y^3}{16}} (x+2y)\ dx \Big]\ dy \\
&\quad + \int_{-4}^0 \Big[\int_{-2}^{y-\frac{y^3}{16}} (x+2y)\ dx \Big]\ dy \\
&= \int_0^4 (\frac{x^2}{2} + 2xy)\Big|_{\sqrt{y}-2}^{y-\frac{y^3}{16}}\ dy + \int_{-4}^0 (\frac{x^2}{2} + 2xy)\Big|_{-2}^{y-\frac{y^3}{16}}\ dy \\
&= \int_0^4 \big(\frac{x^6}{512} - \frac{3y^4}{16} + \frac{5}{2}y^2 + \frac{7}{2}y + 2\sqrt{y} - 2 - 2y^{\frac{3}{2}} \big)\ dy \\
&\quad + \int_{-4}^0 \big(\frac{x^6}{512} - \frac{3y^4}{16} + \frac{5y^2}{2} + 4y - 2 \big)\ dy \\
&= \frac{172}{7} - \frac{2152}{105} \\
&= \frac{428}{105}
\end{aligned}$$

Teorema 6.20. *Jika D adalah suatu daerah bagian dari $\mathbb{R}^2$ dengan luas L_D, maka*

$$\iint_D 1\ dA = L_D.$$

Teorema 6.21. *Jika $m \leq f(x,y) \leq M$ untuk setiap (x,y) di D dan f terintegral pada D, maka*

$$mL_D \leq \iint_D f(x,y)\ dA \leq ML_D.$$

Contoh 6.22. *Estimasikan*

$$\iint_D e^{sinx \cos y}\ dA$$

dengan D adalah cakram satuan dengan pusat titik asal.

Penyelesaian: Karena $-1 \leq \sin x \leq 1$ dan $-1 \leq \cos y \leq 1$, sehingga diperoleh $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$. Oleh karena itu

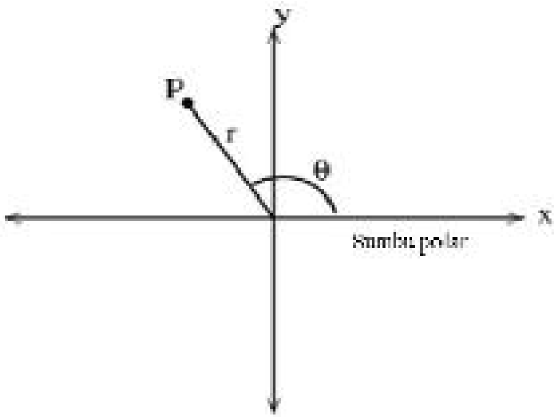
$$\frac{1}{e} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e.$$

Karena luas daerah D adalah $L_D = \pi(1)^2 = \pi$, dan dengan menggunakan Teorema 6.21, diperoleh

$$\frac{\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y}\, dA \leq \pi e.$$

6.4 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

Sistem koordinat polar/kutub terdiri atas sumbu polar yang berupa setengah garis yang berimpit dengan sumbu-x positif. Setiap titik $P(x,y)$ pada bidang dapat dinyatakan sebagai $P(r,\theta)$ dengan r menyatakan jarak antara titik asal dengan titik P, dan θ menyatakan besar sudut yang dibentuk oleh ruas garis OP dan sumbu polar, seperti diberikan pada Gambar 6.8.



Gambar 6.8: Koordinat polar

Adapun hubungan antara koordinat polar dengan koordinat Cartesius sebagai berikut. Jika $P(r,\theta)$ sebagai koordinat polar, maka bila disajikan dalam koordinat Cartesius adalah $P(x,y)$ dengan

$$x = r\cos\theta \qquad \text{dan} \qquad y = r\sin\theta.$$

Untuk sebaliknya, jika $P(x,y)$ sebagai koordinat Cartesius, maka dalam koordinat polar adalah $P(r,\theta)$ dengan

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{dan} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

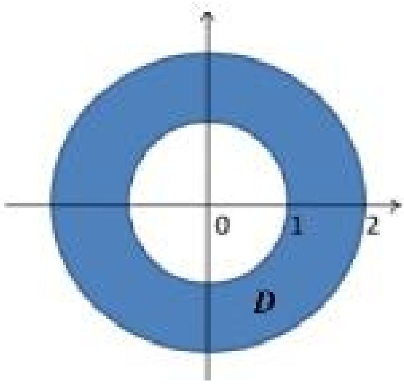
Dengan mensubstitusikan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, integral lipat dua yang telah dinyatakan dalam koordinat Cartesius, sekarang bisa disajikan dalam koordinat polar sebagai berikut

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\ dr\ d\theta.$$

Contoh 6.23. *Evaluasi integral lipat dua*

$$\iint_D x^2\ dA$$

dengan D adalah daerah cincin yang dibatasi oleh lingkaran $x^2+y^2 = 1$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 4$, seperti diberikan pada Gambar 6.9.



Gambar 6.9: Cincin yang dibatasi oleh dua lingkaran

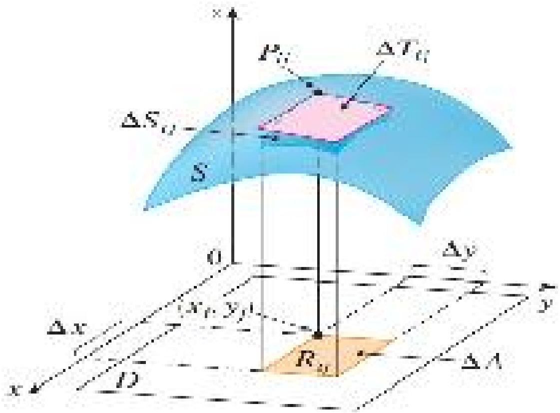
Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2\ dA &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \cos^2\theta\ r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \cos^2\theta\ d\theta \\
&= \frac{15}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta \\
&= \frac{15}{4} \int_0^{2\pi} \big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\big)\ d\theta \\
&= \frac{15\pi}{4}.
\end{aligned}$$

6.5 Aplikasi Integral Lipat Dua

1. Luas Permukaan

Misalkan diberikan permukaan S dengan persamaan $z = f(x, y)$ dengan turunan-turunan parsial f terhadap x dan y kontinu pada suatu daerah persegipanjang D. Di sini akan dibahas bagaimana menghitung luas permukaan S yang berada di atas D. Untuk mengawali hal itu, pertama bagi daerah D menjadi persegi-persegipanjang kecil R_{ij} dengan luas $\Delta A = \Delta x \Delta y$ seperti diberikan pada Gambar 6.10.



Gambar 6.10: Luas permukaan di atas daerah $D \subset \mathbb{R}^2$

Teorema 6.24. *Diberikan permukaan S dari fungsi $f(x, y)$ yang terdefinisi pada daerah D. Jika f_x dan f_y keduanya fungsi kontinu pada D dan A menyatakan luas permukaan S, maka*

$$A = \iint_D \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\; dA$$

Contoh 6.25. *Tentukan luas permukaan $f(x, y) = x^2 + 2y$ yang berada di atas daerah segitiga dengan titik-titik sudut $(0, 0), (1, 0)$, dan $(1, 1)$.*

Penyelesaian: Turunan-turunan parsial f terhadap x dan y, masing-masing adalah

$$f_x(x, y) = 2x \qquad \text{dan} \qquad f_y(x, y) = 2.$$

Daerah segitiga D dengan titik-titik sudut $(0,0),(1,0)$, dan $(1,1)$ dapat dinyatakan sebagai

$$D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}.$$

Dengan menggunakan rumus luas permukaan, diperoleh

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}\ dA \\ &= \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 + 4x^2 + 4}\ dy\ dx \\ &= \int_0^1 x\sqrt{5 + 4x^2}\ dx \\ &= \frac{1}{12}(5 + 4x^2)^{3/2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{12}(27 - 5\sqrt{5}). \end{aligned}$$

2. Pusat massa

Jika $\rho(x,y)$ menyatakan kepadatan benda pelat tipis D di sebarang titik (x,y) dalam D, maka massa total benda D diberikan oleh

$$M = \iint_D \rho(x,y)\ dA.$$

Pusat massa atau titik berat benda D adalah di titik $(\overline{x}, \overline{y})$ dengan

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \iint_D x\rho(x,y)\ dA,$$

dan

$$\overline{y} = \frac{1}{M} \iint_D y\rho(x,y)\ dA.$$

Contoh 6.26. *Tentukan pusat massa benda dimensi dua berupa cakram satuan berpusat di titik asal berjari-jari 1 yang berada pada kuadran I (seperempat cakram) dengan kepadatan benda* $\rho(x^2 + y^2)$

Penyelesaian: Seperempat cakram yang dimaksud adalah

$$D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$

Karena benda D simetri terhadap garis $y = x$, maka cukup jelas bahwa $\overline{x} = \overline{y}$. Massa benda D adalah (dengan mengubah ke dalam koordinat kutub)

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \rho(x^2 + y^2)\ dy\ dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \rho(r^2)r\ dr\ d\theta \\ &= \rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 d\theta \\ &= \rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\ d\theta = \delta \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Sedangkan momen terhadap sumbu-x adalah

$$M_x = \rho \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^4 \sin\theta\ dr\ d\theta = \rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5} \sin\theta\ d\theta = \frac{\rho}{5}.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{8}{5\pi}.$$

Jadi pusat massa benda adalah titik $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{8}{5\pi}, \frac{8}{5\pi})$.

6.6 Rangkuman

1. **Integral lipat dua** fungsi f atas daerah persegi R adalah

   $$\iint_R f(x, y)\ dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^* . y_{ij}^*)\Delta A$$

   jika limitnya ada.

2. Aturan Titik Tengah Integral Lipat Dua

   $$\iint_R f(x, y)\ dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\overline{x}_i . \overline{y}_j)\Delta A$$

   dengan $\overline{x}_i$ adalah titik tengah $[x_{i-1}, x_i]$ dengan $i = 1, 2, \cdots, m$ dan $\overline{y}_j$ adalah titik tengah $[y_{j-1}, y_j]$ dengan $j = 1, 2, \cdots, n$.

3. Jika f dan g keduaanya terintegral pada daerah persegipanjang R, maka

   (a) $f+g$ terintegral pada R dan
   $$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\ dA = \iint_R f(x,y)\ dA + \iint_R g(x,y)\ dA.$$

   (b) jika k konstanta, maka kf terintegral pada R dan
   $$\iint_R kf(x,y)\ dA = k\iint_R f(x,y)\ dA$$
   .

   (c) Jika $f(x,y)\le g(x,y)$ untuk setiap (x,y) di R, maka
   $$\iint_R f(x,y)\ dA \le \iint_R g(x,y)\ dA.$$

4. **Teorema Fubini**. Jika f kontinu pada persegi panjang $D = \{(x,y)\big| a\le x\le b, c\le y\le d\}$, maka
$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\ dy\ dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\ dx\ dy$$

5. Jika g terintegral pada $[a,b]$ dan h terintegral pada $[c.d]$, maka gh terintegral pada persegipanjang $D=[a,b]\times[c,d]$ dan
$$\iint_D g(x)h(y)\ dA = \int_a^b g(x)\ dx\int_c^d h(y)\ dy$$

6. Jika f kontinu pada daerah jenis pertama $D=\{(x,y)\big| a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$, maka
$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy\ dx.$$

7. Jika f kontinu pada daerah jenis kedua $D=\{(x,y)\big| h_1(y)\le x\le h_2(y), c\le y\le d\}$, maka
$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ dx\ dy.$$

8. Diberikan $D = D_1 \cup D_2$ dengan D_1 dan D_2 tidak saling tumpang-tindih. Jika f terintegral pada D_1 dan pada D_2, maka f terintegral pada D, dan

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \iint_{D_1} f(x,y)\ dA + \iint_{D_2} f(x,y)\ dA$$

9. Jika D adalah suatu daerah bagian dari $\mathbb{R}^2$ dengan luas L_D, maka

$$\iint_D 1\ dA = L_D.$$

10. Jika $m \leq f(x,y) \leq M$ untuk setiap (x,y) di D dan f terintegral pada D, maka

$$mL_D \leq \iint_D f(x,y)\ dA \leq ML_D.$$

11. Diberikan fungsi $f(x,y)$ yang terdefinisi pada daerah D. Jika f_x dan f_y keduanya fungsi kontinu, maka luas permukaan grafik f di atas daerah D adalah

$$\iint_D \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}\ dA$$

12. Jika $\rho(x,y)$ menyatakan kepadatan benda pelat tipis D di sebarang titik (x,y) dalam D, maka massa total benda D diberikan oleh

$$M = \iint_D \rho(x,y)\ dA.$$

Pusat massa atau titik berat benda D adalah di titik $(\overline{x}, \overline{y})$ dengan

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \iint_D x\rho(x,y)\ dA,$$

dan

$$\overline{y} = \frac{1}{M} \iint_D y\rho(x,y)\ dA.$$

6.7 Latihan Soal

1. Hitunglah integral berulang berikut:
   a. $\int_1^3 \int_0^1 (3xy^2 - 2x)\ dy\ dx$ b. $\int_0^1 \int_0^2 y^2 e^{3x}\ dy\ dx$

2. Hitunglah integral lipat
$$\iint_D \cos(x-y)\ dA$$
dengan $D = \{(x,y)\big|0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le \pi/2\}$.

3. Hitunglah integral lipat
$$\iint_D \frac{1+y^2}{1+x^2}\ dA$$
dengan $D = \{(x,y)\big|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

4. Ubalah urutan integrasi dari integral berikut
$$\int_0^9 \int_0^{\sqrt{9-y}} f(x,y)\ dx\ dy$$

5. Ubalah urutan integrasi dari integral berikut
$$\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x,y)\ dy\ dx$$

6. Hitung volume benda pejal yang berada di bawah bidang $2x + 3y - z + 7 = 0$ dan di atas persegipanjang $D = \{(x,y)\big| -1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.

7. Hitung volume benda pejal yang berada di oktan pertama yang dibatasi oleh tabung $z = 16 - x^2$ dan bidang $y = 4$.

8. Gunakan sifat simetri untuk menghitung integral lipat
$$\iint_D \frac{2xy}{1+x^4}\ dA$$
dengan $D = \{(x,y)\big| -2 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.

9. Evaluasi integral
$$\int_0^2 \int_\pi^1 e^{x/y}\ dx\ dy$$

10. Estimasi nilai integral
$$\iint_D e^{sin(xy)}\ dA$$
dengan D adalah cakram satuan dengan pusat titik asal.

11. Hitung integral
$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dA$$
dengan D adalah anular yang berpusat di titik asal dengan jari-jari luar 1 dan jari-jari dalam δ dengan $0 < \delta < 1$.

12. Tentukan luas bidang $4x + 10y + 2z = 21$ yang berada dalam tabung $x^2 + y^2 = 9$.

13. Tentukan luas paraboloida $z = 4 - x^2 - y^2$ yang berada di atas bidang-xy.

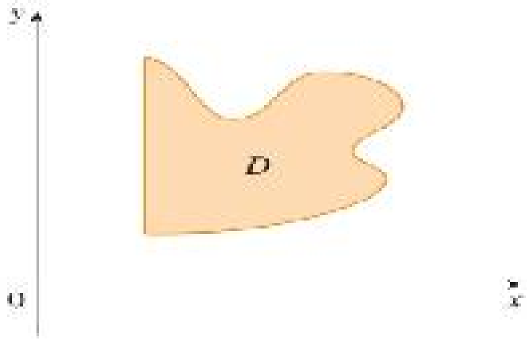
14. Tentukan pusat massa benda dimensi dua yang dibatasi oleh kurva-kurva $x^2 - 8y + 4 = 0$, $x^2 = 4y$, dan garis $x = 0$ pada kuadran I dengan kepadatan benda konstan 1.

15. Tentukan pusat massa benda homogen dimensi dua yang berupa daerah dibatasi $0 \le y \le \sin x$ dan $0 \le x \le \pi$

6.8 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu di kelas!

1. Jika $f(x, y)$ kontinu pada persegipanjang $[a, b] \times [c, d]$ dan
$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(r, s)\ ds\ dr$$
untuk $x \in [a, b], y \in [c, d]$, tunjukkan $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.



2. Perhatikan daerah D seperti diberikan pada gambar berikut.

   Apakah daerah D merupakan daerah jenis pertama, jenis kedua, atau bukan jenis kedua-duanya? Jika f adalah fungsi yang terintegral pada D, bagaimana mengevaluasi

$$\iint_D f(x, y)\ dA\ ?$$

6.9 Daftar Rujukan

1. Breen, J., 2020, *Advanced Multivariable Differential Calculus*, University of California, Los Angeles

2. Feldman, J., Andrew Rechnitzer dan Elyse Yeager, 2021, *Multivariable Calculus*, Creative Commons Attribution, British Columbia.

3. Guichard, D. dan N. Koblitz, 2022, *Single and Multivariable Calculus*, Creative Commons, San Francisco.

4. Kim, S., 2022, *Multivariable Calculus*, Mississippi State University, Michigan

5. Savage, A., 2021, *Multivariable Calculus*, University of Ottawa, Ottawa

6. Shimamoto, D., 2019, *Multivariable Calculus*, Swarthmore College, Philadelphia

7. Stewart, J., 2018, *Multivariable Calculus*, Edisi 8, Cengage Learning: Belmont, USA

8. Ubaidillah, F., 2022, Generalisasi Fungsi Genap pada Sistem Koordinat Kutub dan Beberapa Sifatnya, *Prosidiing Seminar Nasional Matematika, Geometri, Statistika, dan Komputasi*, hal. 293-301

Bab 7

Integral Lipat Tiga

Tujuan yang akan dicapai setelah mahasiswa (atau pembaca) mempelajari materi dalam bab ini diantaranya:

1. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian jumlah Riemann atas fungsi tiga peubah
2. Mahasiswa mampu menjelaskan integral lipat tiga pada suatu benda pejal sebagai integral berulang
3. Mahasiswa mampu menghitung integral lipat tiga fungsi tiga peubah
4. Mahasiswa mampu menghitung integral lipat tiga sebagai integral berulang dengan mengubah urutan integrasi
5. Mahasiswa mampu menerapkan integral lipat tiga dalam permasalahan sehari-hari.

7.1 Integral Lipat Tiga atas Balok

Prosedur yang digunakan dalam mendefinisikan integral lipat tiga mengikuti seperti yang digunakan pada integral lipat dua.

Definisi 7.1. Integral lipat tiga *fungsi f atas R adalah*

$$\iiint_R f(x,y,z)\ dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\ \Delta V$$

jika limitnya ada.

Teorema 7.2. *Jika f kontinu pada $R = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$, maka*

$$\iiint_R f(x,y,z)\ dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz. \tag{7.1}$$

Integral ruas kanan persamaan (7.1) disebut **integral berulang** yang dapat dituliskan

$$\int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_r^s \left(\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y,z)\ dx \right] dy \right) dz.$$

Contoh 7.3. *Evaluasi integral lipat tiga*

$$\iiint_R x^3yz\ dV$$

dengan $R = \{(x,y,z) \big| 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 2\}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\iiint_R xyz\ dV &= \int_0^2 \int_{-1}^2 \int_0^1 x^3yz\ dx\ dy\ dz \\
&= \int_0^2 \int_{-1}^2 \left[\frac{1}{4}x^4yz\right]_{x=0}^{x=1}\ dy\ dz \\
&= \int_0^2 \int_{-1}^2 \frac{1}{4}yz\ dy\ dz \\
&= \int_0^2 \int_{-1}^2 \frac{1}{8}y^2z\Big|_{y=-1}^{y=2}\ dz \\
&= \int_0^2 \frac{1}{8}z(2^2 - (-1)^2)\ dz \\
&= \int_0^2 \frac{3}{8}z\ dz \\
&= \frac{3}{16}z^2\Big|_{z=0}^{z=2} = \frac{3}{16}(2^2 - 0^2) = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Teorema 7.4. *Jika f kontinu pada balok $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$, maka*

$$\begin{aligned}
\iiint_B f(x,y,z)\ dV &= \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz \\
&= \int_c^d \int_r^s \int_a^b f(x,y,z)\ dx\ dz\ dy \\
&= \int_r^s \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\ dy\ dx\ dz \\
&= \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x,y,z)\ dy\ dz\ dx \\
&= \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)\ dz\ dy\ dx \\
&= \int_c^d \int_a^b \int_r^s f(x,y,z)\ dz\ dx\ dy,
\end{aligned}$$

atau dengan kata lain urutan integral di ruas kanan bisa dibolak-balik.

Contoh 7.5. *Evaluasi integral berulang*

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \int_1^3 \sin\left(y^2\right)\ dz\ dy\ dx.$$

Penyelesaian: Dalam menyelesaikan integral ini tanpa mengubah urutan akan mengalami kesulitan. Daerah integrasi bisa dinyatakan dalam bentuk

$$\{(x,y,z)\big|0 \le y \le \sqrt{\pi/2}, 0 \le x \le y, 1 \le z \le 3\}.$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 7.4, diperoleh

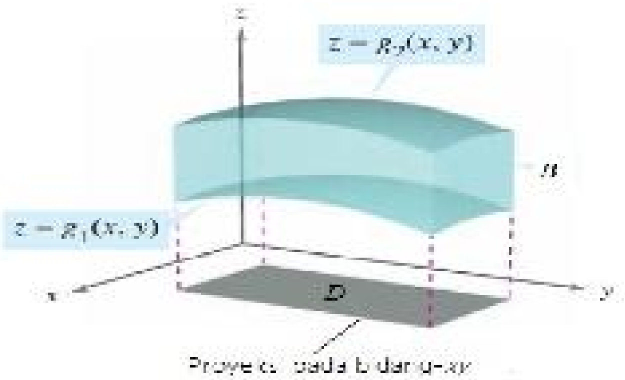
$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \sin\left(y^2\right)\ dz\ dy\ dx &= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^y \int_1^3 \sin\left(y^2\right)\ dz\ dx\ dy \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y z \sin\left(y^2\right)\Big|_1^3\ dx\ dy \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y 2 \sin\left(y^2\right)\ dx\ dy \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2y \sin\left(y^2\right)\ dy \\
&= -\cos\left(y^2\right)\Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = 1.
\end{aligned}$$

7.2 Integral Lipat Tiga atas Benda Pejal Umum

Misalkan diberikan daerah pejal $B \subset \mathbb{R}^3$, yang didefinisikan

$$B = \{(x, y, z)\big|(x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

dengan D adalah proyeksi B pada bidang-xy, seperti diberikan pada Gambar 7.1.



Gambar 7.1: Daerah B di dalam $\mathbb{R}^3$

Integral lipat tiga atas benda B diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 7.6. *Diberikan*

$$B = \{(x, y, z)\big|(x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

maka

$$\iiint_B f(x, y, z)\ dV = \iint_D \Big[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\ dz \Big]\ dA,$$

dengan $\iint_D f(x, y)\ dA$ *telah dijelaskan pada Bab 6.*

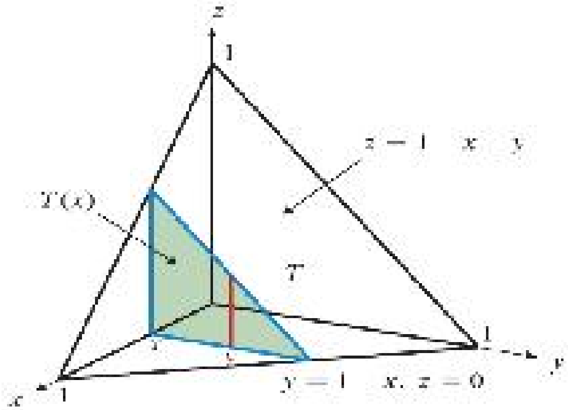
Teorema 7.7. *Diberikan fungsi tiga peubah yang kontinu pada benda B yang didefinisikan oleh*

$$B = \{(x, y, z)\big|a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

dengan $h_1, h_2, g_1,$ *dan* g_2 *fungsi-fungsi kontinu, maka*

$$\iiint_B f(x, y, z)\ dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\ dz\ dy\ dx.$$

Contoh 7.8. *Evaluasi* $\iiint_B z\ dV$ *dengan* B *adalah tetrahedron yang dibatasi oleh empat bidang* $x = 0, y = 0, z = 0,$ *dan* $z = 1 - x - y,$ *seperti diberikan pada Gambar 7.2.*



Gambar 7.2: Tetrahedron

Penyelesaian:

$$B = \{(x, y, z) \big| 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Berdasarkan Teorema 7.7, diperoleh

$$\begin{aligned}
\iiint_B z\ dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{z=0}^{1-x-y} z\ dx\ dy\ dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\ dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2}(1-x-y)^2\ dy\ dx \\
&= -\frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\ dx \\
&= \frac{1}{24}(1-x)^4\Big|_0^1 = -\frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Contoh 7.9. *Evaluasi* $\iiint_B y\ dV$ *dengan* B *adalah benda pejal yang berada di atas paraboloida* $z = x^2 + y^2$ *dan di bawah bidang* $z = 2$ *pada oktan I.*

Penyelesaian: Benda pejal B dapat dinyatakan sebagai

$$B = \{(x, y, z)\big|0 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$$

Berdasarkan Teorema 7.7, diperoleh

$$\begin{aligned}
\iiint_B y\ dV &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} y\ dz\ dy\ dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} yz\Big|_{z=x^2+y^2}^{2}\ dy\ dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} y(2 - x^2 - y^2)\ dy\ dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(y^2 - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}}\ dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 1\right)\ dx \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

Contoh 7.10. *Nyatakan integral berulang* $\int_0^2 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\ dz\ dy\ dx$ *sebagai integral lipat tiga dan tuliskan sebagai integral berulang dengan urutan pertama terhadap* x*, lalu terhadap* z *dan terhadap* y*.*

Penyelesaian: Integral berualang dapat dinyatakan sebagai

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\ dz\ dy\ dx = \iiint_B f(x, y, z)\ dV$$

dengan

$$B = \{(x, y, z)\big|0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq y\}.$$

Dengan mengubah urutan, B dapat pula dinyatakan sebagai

$$B = \{(x, y, z)\big|0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq y, \sqrt{y} \leq x \leq 2\},$$

sehingga diperoleh

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\ dz\ dy\ dx = \int_0^4 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y, z)\ dx\ dz\ dy.$$

Beberapa sifat integral lipat tiga, diberikan pada teorema berikut.

Teorema 7.11. *Diberikan dua fungsi tiga peubah $f(x, y, z)$ dan $g(x, y, z)$ yang keduanya terdefinisi pada benda pejal R. Jika f dan g keduanya terintegral pada R, maka*

(i). Untuk setiap $c \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\iiint_R cf(x, y, z)\ dV = c \iiint_R f(x, y, z)\ dV.$$

(ii).

$$\begin{aligned}\iiint_R \left[f(x, y, z)\ dV \pm g(x, y, z)\ dV\right] &= \iiint_R f(x, y, z)\ dV \\ &\quad \pm \iiint_R g(x, y, z)\ dV\end{aligned}$$

(iii).

$$\iiint_R f(x, y, z)\ dV = \iiint_{R_1} f(x, y, z)\ dV + \iiint_{R_2} f(x, y, z)\ dV$$

dengan $R_1 \cup R_2 = R$ dan $R_1^0 \cap R_2^0 = \emptyset$.

(iv). Jika $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ untuk setiap $(x, y, z) \in R$, maka

$$\iiint_R f(x, y, z)\ dV \leq \iiint_R g(x, y, z)\ dV.$$

Teorema 7.12. *Jika f fungsi ganjil dan terintegral pada B bola tertutup berpusat di titik asal, maka*

$$\iiint_B f(x, y, z)\ dV = 0.$$

Contoh 7.13. *Evaluasi integral*

$$\iiint_B (x^2 + y^2) \sin(x + y + z)\ dA,$$

dengan $B = \{(x, y, z) \big| x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Penyelesaian: Karena $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(x + y + z)$ fungsi ganjil dan B adalah bola tertutup berjari-jari 1 yang berpusat di titik asal, berdasarkan Teorema 7.12, diperoleh

$$\iint_B (x^2 + y^2) \sin(x + y + z)\ dV = 0.$$

Akibat 7.14. *Jika f fungsi simetri terhadap titik $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$ dan terintegral pada benda B bola tertutup berpusat di titik $\mathbf{x_0}$, maka*

$$\iiint_B f(x, y, z)\ dV = 0.$$

7.3 Aplikasi Integral Lipat Tiga

Integral lipat tiga $\iiint_B dV$ diartikan sebagai volume daerah B berdimensi tiga.

Contoh 7.15. *Tentukan volume benda pejal B di dalam oktan pertama yang dibatasi permukaan $x^2 + 4y^2 - 4z = 0$ dan $x^2 + 4y^2 + 8z = 48$.*

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\iiint_B dV &= \int_0^2 \int_0^{2\sqrt{4-x^2}} \int_{(x^2+4y^2)/4}^{(48-x^2-4y^2)/8} dz\ dx\ dy \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\sqrt{4-y^2}} \frac{3}{8}(16 - x^2 - 4y^2)\ dx\ dy \\
&= 2\int_0^2 \sqrt{4-y^2}\ dy = 6\pi.
\end{aligned}$$

Jika $\rho(x, y, z)$ menyatakan kepadatan benda B di sebarang titik (x, y, z) dalam B, maka massa total benda B diberikan oleh

$$M = \iiint_B \rho(x, y, z)\ dV.$$

Pusat massa atau titik berat B adalah di titik $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ dengan

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \iiint_B x\rho(x, y, z)\ dV,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M} \iiint_B y\rho(x, y, z)\ dV,$$

dan

$$\overline{z} = \frac{1}{M} \iiint_B z\rho(x, y, z)\ dV,$$

Contoh 7.16. *Tentukan pusat massa separuh bolah pejal homogen dengan jari-jari r.*

Penyelesaian: Misal diberikan B separuh bola pejal dengan jari-jari r berpusat di titik asal yang memenuhi $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ dengan $z \geq 0$. Dengan menggunakan sifat simetri pada separuh bola, diperoleh $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Karena separuh bola pejal homogen, maka ρ adalah konstanta, sehingga untuk $\overline{z}$ adalah

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{\iiint_B z\rho dV}{\iiint_B \rho \; dV} \\
&= \frac{\rho \iiint_B z \; dV}{\rho \iiint_B \; dV} \\
&= \frac{\int_{-r}^{r} \int_0^0 \int_0^0 z \; dz \; dy \; dx}{\frac{2}{3}\pi r^3} \\
&= \frac{\frac{1}{4}\pi r^4}{\frac{2}{3}\pi r^3} \\
&= \frac{3}{8} r.
\end{aligned}$$

Momen inersia benda pejal R terhadap sumbu-x, sumbu-y, dan sumbu-z masing-masing diberikan sebagai:

$$I_x = \iiint_R (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \; dV,$$

$$I_y = \iiint_R (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) \; dV,$$

dan

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) \; dV.$$

7.4 Rangkuman

1. **Integral lipat tiga** fungsi f atas R adalah

   $$\iiint_R f(x, y, z) \; dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \; \Delta V$$

   jika limitnya ada.

2. Diberikan dua fungsi tiga peubah $f(x, y, z)$ dan $g(x, y, z)$ yang keduanya terdefinisi pada benda pejal R. Jika f dan g keduanya terintegral pada R, maka

(i). Untuk setiap $c \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\iiint_R cf(x,y,z)\ dV = c\iiint_R f(x,y,z)\ dV.$$

(ii).

$$\begin{aligned}\iiint_R \left[f(x,y,z)\ dV \pm g(x,y,z)\ dV\right] &= \iiint_R f(x,y,z)\ dV \\ &\pm \iiint_R g(x,y,z)\ dV\end{aligned}$$

(iii).

$$\iiint_R f(x,y,z)\ dV = \iiint_{R_1} f(x,y,z)\ dV + \iiint_{R_2} f(x,y,z)\ dV$$

dengan $R_1 \cup R_2 = R$ dan $R_1^0 \cap R_2^0 = \emptyset$.

(iv). Jika $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ untuk setiap $(x,y,z) \in R$, maka

$$\iiint_R f(x,y,z)\ dV \leq \iiint_R g(x,y,z)\ dV.$$

3. Diberikan fungsi tiga peubah yang kontinu pada benda B yang didefinisikan oleh

$$B = \{(x,y,z) \big| a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$$

dengan h_1, h_2, g_1, dan g_2 fungsi-fungsi kontinu, maka

$$\iiint_B f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz\ dy\ dx.$$

4. Jika f fungsi ganjil dan terintegral pada B bola tertutup berpusat di titik asal, maka

$$\iiint_B f(x,y,z)\ dV = 0.$$

5. Jika f fungsi simetri terhadap titik $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$ dan terintegral pada benda B bola tertutup berpusat di titik $\mathbf{x_0}$, maka

$$\iiint_B f(x,y,z)\ dV = 0.$$

6. Jika $\rho(x, y, z)$ menyatakan kepadatan benda B di sebarang titik (x, y, z) dalam B, maka massa total benda B diberikan oleh

$$M = \iiint_B \rho(x, y, z)\ dV.$$

Pusat massa atau titik berat B adalah di titik $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ dengan

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \iiint_B x\rho(x, y, z)\ dV,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M} \iiint_B y\rho(x, y, z)\ dV,$$

dan

$$\overline{z} = \frac{1}{M} \iiint_B z\rho(x, y, z)\ dV,$$

7. Momen inersia benda pejal R terhadap sumbu-x, sumbu-y, dan sumbu-z masing-masing diberikan sebagai:

$$I_x = \iiint_R (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\ dV,$$

$$I_y = \iiint_R (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\ dV,$$

dan

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\ dV.$$

7.5 Latihan Soal

1. Evaluasi

$$\iiint_B (x + yz)\ dV$$

dengan

$$B = \{(x, y, z) \big| 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

2. Evaluasi

$$\iiint_B (x - 2y)\ dV$$

dengan

$$B = \{(x, y, z) \big| 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq x + 1\}.$$

3. Evaluasi integral
$$\iiint_B (xy - yz + xz)\, dV,$$
dengan B adalah daerah kecil yang dibatasi tabung $x^2+y^2-2y = 0$ dan bidang-bidang $x = y, z = 0$, dan $z = 3$.

4. Evaluasi integral berulang
$$\int_0^1 \int_x^{x^2} \int_0^y xyz\, dz\, dy\, dx$$

5. Evaluasi integral lipat tiga $\iiint_B dV$ dengan B adalah bola pejal $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. Evaluasi integral lipat tiga $\iiint_B xyz\, dV$ dengan
$$B = \{(x, y, z)|0 \leq x \leq 1, y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq 6\}.$$

7. Ubahlah urutan integrasi integral berikut dengan urutan atas dy, dz, lalu dx:
$$\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

8. Nyatakan integral berulang berikut dengan urutan $dx\ dy\ dz$
$$\int_0^2 \int_{2x}^4 \int_0^{\sqrt{y^2-4x^2}} dz\, dy\, dx$$

9. Gunakan integral lipat tiga untuk menghitung volume benda pejal daerah yang dibatas oleh paraboloida $y = x^2 + z^2$ dan paraboloida $y = 8 - x^2 - z^2$.

10. Hitung volume benda pejal yang dibatasi oleh tabung $x^2+z^2 = 4$, bidang $y + 1 = 0$ dan bidang $y + z - 4 = 0$.

11. Tentukan daerah B sehingga integral
$$\iiint_B \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}\, dV$$
bernilai maksimum.

12. Tentukan pusat massa benda pejal yang dibatasi oleh bidang-bidang $2x + 3y + 6z = 12$, $x = 0, y = 0$, dan $z = 0$.

13. Gunakan integral lipat tiga untuk menentukan momen inersia terhadap sumbu-z benda

$$B = \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x\}$$

dengan kepadatan benda $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

7.6 Bahan Diskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu di kelas!

1. Evaluasi integral berikut dengan dengan menggunakan sifat simetri

$$\iiint_R \sin(x + y + z - 4)\ dV$$

dengan R bola pejal tertutup yang berpusat di titik $(1, 2, 1)$ dengan jari-jari 1.

2. Diberikan f fungsi ganjil yang terintegral pada B bola tertutup berpusat di titik asal. Nyatakan $\iiint_B f(x, y, z)\ dV$ dalam koordinat kutub dan tunjukkan bahwa

$$\iiint_B f(x, y, z)\ dV = 0.$$

.

7.7 Daftar Rujukan

1. Breen, J., 2020, *Advanced Multivariable Differential Calculus*, University of California, Los Angeles

2. Guichard, D. dan N. Koblitz, 2022, *Single and Multivariable Calculus*, Creative Commons, San Francisco.

3. Savage, A., 2021, *Multivariable Calculus*, University of Ottawa, Ottawa

4. Shimamoto, D., 2019, *Multivariable Calculus*, Swarthmore College, Philadelphia

5. Stewart, J., 2018, *Multivariable Calculus*, Edisi 8, Cengage Learning: Belmont, USA

6. Ubaidillah, F., 2022, Symmetry Functions with Respect to Any Point in $\mathbb{R}^n$ and Their Properties, *Advances in Computer Science Research*, Vol 96, hal. 109-112

Bibliografi

[1] Breen, J., 2020, *Advanced Multivariable Differential Calculus*, University of California, Los Angeles

[2] Feldman, J., Andrew Rechnitzer dan Elyse Yeager, 2021, *Multivariable Calculus*, Creative Commons Attribution, British Columbia.

[3] Guichard, D. dan N. Koblitz, 2022, *Single and Multivariable Calculus*, Creative Commons, San Francisco.

[4] Kim, S., 2022, *Multivariable Calculus*, Mississippi State University, Michigan

[5] Savage, A., 2021, *Multivariable Calculus*, University of Ottawa, Ottawa

[6] Shimamoto, D., 2019, *Multivariable Calculus*, Swarthmore College, Philadelphia

[7] Stewart, J., 2018, *Multivariable Calculus*, Edisi 8, Cengage Learning: Belmont, USA

[8] Ubaidillah, F., 2022, Generalisasi Fungsi Genap pada Sistem Koordinat Kutub dan Beberapa Sifatnya, *Prosidiing Seminar Nasional Matematika, Geometri, Statistika, dan Komputasi*, hal. 293-301

[9] Ubaidillah, F., 2022, Symmetry Functions with Respect to Any Point in $\mathbb{R}^n$ and Their Properties, *Advances in Computer Science Research*, Vol 96, hal. 109-112

Glosarium

B

Bidang singgung Bidang yang menyinggung permukaan dan hanya bersekutu di satu titik dengan permukaan di suatu persekitaran titik tersebut.

F

Fungsi dua peubah Suatu aturan yang mengkaitkan setiap pasangan terurut bilangan-bilangan real (x, y) di himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ke tepat satu bilangan real $f(x, y)$.

Fungsi tiga peubah Suatu aturan yang mengkaitkan setiap pasangan terurut bilangan-bilangan real (x, y, z) di himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ke tepat satu bilangan real $f(x, y, z)$.

I

Integral lipat dua Integral atas fungsi dua peubah yang terdefinisi pada daerah di dalam $\mathbb{R}^2$ yang tertutup dan terbatas.

Integral lipat tiga Integral atas fungsi tiga peubah yang terdefinisi pada daerah di dalam $\mathbb{R}^3$ yang tertutup dan terbatas.

K

Kurva ketinggian Proyeksi kurva permukaan pada bidang-xy yang dibentuk dari perpotongan bidang mendatar dengan permukaan.

Indeks

Aturan Rantai, 72, 82

Basis, 4
Bidang
    singgung, 60
Bidang-
    xy, 5
    xz, 5
    yz, 5
Bola, 20
    buka, 5

Cakram buka, 5

Daerah
    definisi, 8
    hasil, 9
Daerah hasil, 26
Diferensiabel, 62, 64, 67, 68
Diferensial total, 63, 68
Diskontinu, 38
Domain, 8, 14

Elipsoida, 22

Fungsi
    dua peubah, 7
    ganjil, 23
    genap, 24
    rasional, 41
    tiga peubah, 14

Gradien, 79, 80, 83
Grafik, 10

Hampiran linier, 62
Himpunan
    buka, 7
    tutup, 7
Hiperboloida
    dua lembar, 20

Integral
    berulang, 107, 130
    lipat dua, 103, 105, 122
    lipat tiga, 130, 137

Kerucut, 22
Komponen, 3
Kontinu, 38, 40, 42, 45
Koordinat, 3
Kurva ketinggian, 15
Kwadran, 4

Limit, 32, 37, 38, 44
Linierisasi, 62

Maksimum
    lokal, 98
Metode
    pengali Lagrange, 94
Minimum
    lokal, 98

Nilai
    ekstrim, 89, 98

maksimum, 92, 99
maksimum lokal, 88, 98
maksimum mutlak, 92
minimum, 92
minimum lokal, 88, 98
minimum mutlak, 92, 99
Norm, 4

Oktan, 4

Paraboloida, 11
hiperbolik, 22
Pengali Lagrange, 94
Penjumlahan, 3
Perkalian skalar, 3
Permukaan ketinggian, 17
Persamaan
gelombang, 68
Peta kontur, 15
Peubah
bebas, 8
terikat, 8
Polinomial, 41

Range, 9, 14, 26

Selang buka, 5
Silinder parabolik, 22
Skalar, 3
Sumbu-x, 5

Teorema
Fubini, 108, 123
Terintegral, 106
Tidak terdiferensialkan, 50, 55
Titik, 3
-stasioner, 92, 99
ekstrim, 89, 98
interior, 6
kritis, 89, 98
limit, 32
maksimum lokal, 88
maksimum relatif, 88
minimum lokal, 88
minimum relatif, 88
pelana, 90
titik
-singular, 93, 99
Titik-batas, 6
Titik-dalam, 6
Titik-limit, 6
Torus, 22
Turunan
berarah, 77, 80, 83
parsial, 50, 54, 66
parsial kedua, 56
parsial pertama, 56

Uji turunan kedua, 89, 98

Vektor, 3

Biografi Penulis

Firdaus Ubaidillah lahir di Lamongan tanggal 6 Juni 1970, menempuh pendidikan dasar di SD Alun-alun II Lamongan dan SD Dinoyo III Malang, pendidikan menengah di MTsN Malang II dan MAN Malang II Batu. Tahun 1989 melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya (UB) Malang lulus tahun 1994. Studi S2 ditempuh di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Institut Teknologi Bandung (ITB) lulus tahun 2004. Pendidikan S3 ditempuh di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta dan memperoleh gelar Doktor bidang matematika tahun 2016.

Dalam kesehariannya, penulis aktif mengajar di prodi S1 dan S2 Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember dengan matakuliah yang diampu adalah Kalkulus, Analisis Real, Fungsi Peubah Kompleks, Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Aljabar Linier, Metode Numerik, dan lain-lain. Selain buku Kalkulus Peubah Banyak, karya buku lain yang telah ditulis adalah Kalkulus Fungsi Satu Peubah (2018), Analisis Kompleks (2019), Kalkulus Integral (2019), Persamaan Diferensial Biasa (2020), Analisis Real (2021), dan Persamaan Diferensial Parsial (2023).