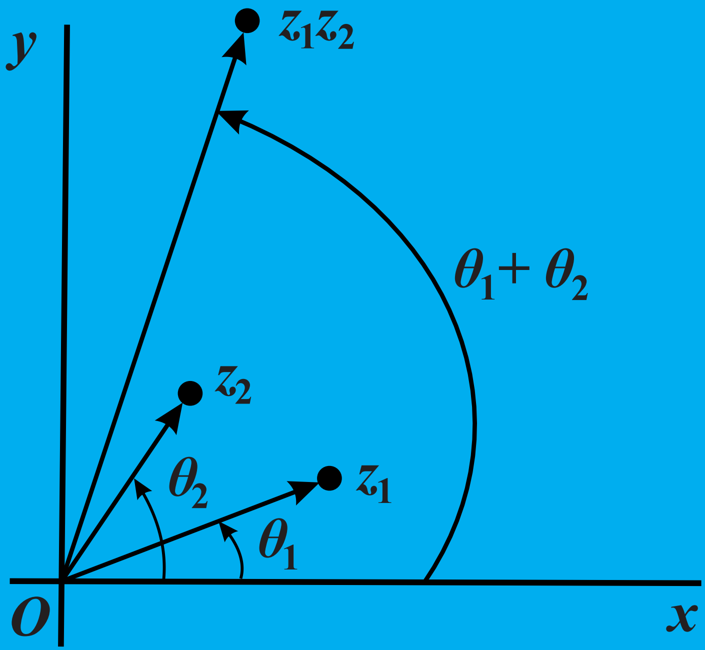
ANALISIS KOMPLEKS



Ikhsanul Halikin
Firdaus Ubaidillah

UNIVERSITAS JEMBER
Membangun Generasi
Menuju Insan Berprestasi

Kata Pengantar

Puji dan syukur saya panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan nikmat, rahmat, dan hidayahNya sehingga kita dapat beraktivitas sesuai dengan apa yang telah direncanakan. Shalawat beserta salam semoga tetap tercurahkan kepada nabi mulia Muhammad SAW.

Penyusunan buku ajar ini dimulai dengan mengenalkan definisi bilangan kompleks beserta sifat-sifatnya yang dibahas dalam satu bab dan dilanjutkan dengan pengenalan fungsi kompleks. Dalam penjabaran fungsi peubah kompleks, Anda akan diajak untuk membedakan fungsi tersebut dengan fungsi dua variabel bilangan real pada Kalkulus peubah banyak. Secara khusus, pada Bab 3, Anda juga akan diperkenalkan dengan fungsi-fungsi yang bernilai tunggal maupun banyak. Setelah pembahasan fungsi, Anda akan diajak untuk belajar tentang limit, kemudian kekontinuan fungsi, dan terakhir turunan. Pada Bab 4, Anda akan belajar tentang integral, kemudian dilanjutkan oleh deret, residu, dan diakhiri oleh bab tentang pemetaan konformal.

Secara umum, Anda akan menemukan bahwa penyajian materi dalam buku ajar ini mengikuti alur penyajian pada kalkulus maupun analisis real. Beberapa sifat yang berlaku pada topik tertentu juga diturunkan dari pembahasan dari analisis real. Sebagai contoh, konsep kekontinuan pada fungsi kompleks didefinisikan sama dengan konsep kekontinuan pada fungsi real. Begitu pula untuk pendefinisian limit dan turunannya, Anda akan menemukan bahwa konsep tersebut hampir tidak jauh berbeda dengan konsep limit dan turunan pada fungsi dua variabel di kalkulus. Sehingga, dengan adanya familiaritas ini, Anda akan lebih mudah untuk mempelajarinya.

Selain pembahasan materinya yang disajikan secara terstruktur, buku ajar ini juga dilengkapi dengan contoh-contoh yang divisualisasikan dalam bentuk gambar. Penyajian tersebut akan memudahkan pembaca untuk merelasikan apa yang dijelaskan dalam contoh dengan bentuk tampilan geometrisnya. Buku ajar ini juga menyediakan soal latihan yang dapat Anda gunakan untuk mengetahui sejauh mana Anda memahami materi yang telah dipelajari.

Jember, November 2019
Dr. Mohammad Fatekurrohman, S.Si., M.Si.

Prakata

Puji dan syukur kami panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayahNya atas selesainya penulisan buku ajar **Analisis Kompleks** ini yang dapat diselesaikan dengan baik. Ucapan terima kasih disampaikan kepada para dosen tim pengajar matakuliah Analisis Kompleks di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah memberikan kontribusi dalam penulisan buku ini.

Analisis Kompleks adalah mata kuliah wajib semester kelima di program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember semenjak diberlakukan Kurikulum 2017, terdiri dari 3 sks (3 sks kuliah tanpa praktikum). Mahasiswa yang mengambil matakuliah ini disyaratkan telah mengikuti matakuliah Analisis Real I dan II.

Buku Ajar Analisis Kompleks ini ditulis untuk digunakan pada perkuliahan Analisis Kompleks di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, walaupun tidak menutup kemungkinan untuk dipakai di perkuliahan yang lain bahkan di luar fakultas. Penyusunan Buku Ajar ini dengan tujuan untuk mengefektifkan proses pembelajaran. Pada proses pembelajaran kelas selama ini, biasanya dosen memberikan penjelasan sambil mencatat di papan tulis. Mahasiswa pada umumnya menyalin catatan tersebut dan menyimak penjelasan dosen. Proses pembelajaran lebih banyak mendengarkan ceramah dari dosen/pengajar.

Kegunaan dari Buku Ajar ini, untuk dosen dipakai menjelaskan materi kuliah, sedang untuk mahasiswa sebagai pengganti catatan kuliah. Untuk itu waktu pembelajaran di kelas bisa digunakan secara lebih efektif untuk caramah dan diskusi. Dalam Buku Ajar ini, diberikan contoh-contoh soal yang telah diberikan penyelesaiannya. Diharapkan soal-soal yang diberikan di tiap akhir bab dapat diselesaikan oleh mahasiswa, begitu pula bahan diskusi yang ada di tiap bab.

Penyusunan Buku Ajar ini didasarkan pada buku-buku teks yang digunakan seperti tertulis dalam Daftar Pustaka. Semoga Buku Ajar ini dapat bermanfaat untuk meningkatkan kualitas pembelajaran Analisis Kompleks, terlebih khusus lagi di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Jember, Agustus 2019
Penulis

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Lambang dan Simbol

$\mathbb{N}$	:	himpunan bilangan asli
$\mathbb{Z}$	:	himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Q}$	:	himpunan bilangan rasional
$\mathbb{R}$	:	himpunan bilangan real
$\mathbb{C}$	:	himpunan bilangan kompleks
$N_\varepsilon(z_0)$	:	himpunan persekitaran dari bilangan kompleks z_0 dengan jari-jari ε
i	:	bilangan imajiner $(0,1)$, bilangan yang jika dikuadratkan hasilnya adalah negatif satu
z	:	elemen bilangan kompleks yang biasanya ditulis dalam bentuk $z = x + iy$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$
$Re(z)$	:	bagian real dari z
$Im(z)$	:	bagian imajiner dari z
z^{-1}	:	invers perkalian dari bilangan kompleks tak nol z
$\overline{z}$	:	kompleks sekawan dari z
$\|z\|$	:	modulus z
r	:	jarak titik z pada bidang kompleks ke titik asal
Θ	:	nilai khusus yang berada pada selang $(-\pi, \pi]$, yang dibetuk oleh vektor posisi bilangan kompleks z dan sumbu real positif, disimbolkan juga dengan $Arg\ z$

θ	:	sudut yang dihitung dalam radian yang dibetuk oleh vektor posisi bilangan kompleks z, yang dihitung dari sumbu real positif berlawanan arah dengan jarum jam, disimbolkan juga dengan $arg\ z$
$f(z)$	:	fungsi variabel kompleks
R_f	:	range atau daerah hasil fungsi f
D_f	:	domain atau daerah asal fungsi f
$f^{-1}(z)$	:	invers fungsi $f(z)$
$u(x, y)$	:	bagian real dari fungsi variabel kompleks $f(z)$
$v(x, y)$	:	bagian imajiner dari fungsi variabel kompleks $f(z)$
$u_x(x, y)$	:	turunan parsial pertama terhadap x dari fungsi komponen $u(x, y)$
$u_y(x, y)$	:	turunan parsial pertama terhadap y dari fungsi komponen $u(x, y)$
$H_{xx}(x, y)$	:	turunan parsial kedua terhadap x dari fungsi $H(x, y)$
$H_{yy}(x, y)$	:	turunan parsial kedua terhadap y dari fungsi $H(x, y)$
$f'(z)$	:	turunan fungsi f terhadap z
$\frac{d}{dz}f(z)$	:	turunan fungsi f terhadap z
$f^{(n)}(z)$	:	turunan ke-n fungsi f terhadap z
$\ln f(z)$	:	$\log_e f(z)$ (logaritma dengan basis e)
$\text{Log}\ z$	:	nilai utama (*principal value*) dari $\log z$, yaitu nilai yang diperoleh dari fungsi bernilai banyak logaritma $\log z$ saat $n = 0$
$\int f(z)\ dz$	:	anti turunan atau integral tak tentu f
$\int_a^b f(z)\ dz$	:	integral tentu f dari $z = a$ ke $z = b$ yang tidak bergantung pada lintasan

Tinjauan Mata kuliah

Buku ajar "Analisis Kompleks" ini merupakan bahan penunjang dalam perkuliahan "Fungsi Peubah Kompleks". Mata kuliah Fungsi Peubah Kompleks merupakan mata kuliah wajib yang ditawarkan pada semester lima. Mata kuliah Fungsi Peubah Kompleks membahas tentang operasi hitung pada bilangan kompleks, nilai mutlak, penyajian geometris bilangan kompleks, bentuk kutub dan akar bilangan kompleks, fungsi variabel kompleks, limit dan kekontinuan, turunan, persamaan Cauchy-Reinmann dan aturan pendifferensialan, integral fungsi peubah kompleks, integral garis, teorema Cauchy- Goursat, rumus integral Cauchy, deret, residu, dan pemetaan konformal. Capaian pembelajaran yang diharapkan dari mata kuliah Fungsi Peubah Kompleks ini adalah

1. mampu memahami dan menjelaskan kembali konsep-konsep dalam bidang kajian Fungsi Peubah Kompleks
2. mampu menganalisis dan membuktikan beberapa sifat yang berlaku pada kajian Fungsi Peubah Kompleks
3. mampu menerapkan dan menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan konsep bidang kajian Fungsi Peubah Kompleks
4. mampu mengelola dan bertanggungjawab
5. mampu bersikap etis, kreatif dan bekerjasama

Untuk dapat mengikuti perkuliahan Fungsi Peubah Kompleks, mahasiswa wajib untuk mengikuti perkuliahan Analisis Real terlebih dahulu. Hal ini dikarenakan bahwa sebagian besar sifat-sifat yang berlaku pada bilangan dan fungsi kompleks diturunkan dari sifat-sifat yang berlaku pada bilangan dan fungsi real. Pemahaman yang mahasiswa dapatkan dari perkuliahan Analisis Real akan mempercepat pemahamannya ketika mempelajari buku ajar ini. Buku ajar ini dapat dijadikan sebagai penuntun mandiri bagi mahasiswa. Oleh sebab itu, untuk mempelajari topik-topik pada buku ajar ini, ada beberapa hal yang perlu diperhatikan, yaitu:

1. Bacalah terlebih dahulu tentang kemampuan akhir yang diharapkan yang dijelaskan di awal bab.
2. Bacalah dengan teliti dan pahami setiap pernyataan dan alasan untuk setiap pembuktian yang dilakukan
3. Kerjakan kegiatan yang disediakan dalam tiap bab secara baik dan bertanggung jawab;
4. Pahami seluruh isi bab dengan cermat;
5. Kerjakan latihan di akhir bab dengan baik.
6. Carilah informasi pembanding dari internet atau buku lainnya berkenaan dengan topik yang dipelajari.
7. Catatlah hal-hal penting yang perlu dicatat ketika mempelajari materi pada tiap bab .
8. Lakukan proses pengkajian tiap bab ke dalam dua bagian, yaitu belajar kelompok dan belajar mandiri.
9. Pembelajaran harus dilakukan secara bertahap dari Bab 1 sampai Bab 7. Sebagai contoh, kita tidak dapat langsung memulai pembelajaran langsung ke Bab 2 karena ada beberapa terminologi dan konsep yang harus dipelajari di Bab 1. Begitupula untuk bab-bab yang lain, kecuali kita sudah mengetahui materi tersebut sebelumnya.

Bab 1

Bilangan Kompleks

Setelah mahasiswa membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah :

1. mampu berpikir secara kritis dan logis;
2. punya kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah-masalah yang relevan;
3. dapat bertanggungjawab dalam melaksanakan tugas;
4. bersifat jujur, etis, kreatif, dan mampu bekerjasama;
5. punya kemampuan dalam berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir mahasiswa yang diharapkan secara khusus adalah :

1. menjelaskan konsep-konsep dasar bilangan kompleks, operasinya, serta sifat-sifatnya;
2. menjelaskan konsep yang berhubungan dengan sekawan kompleks, bentuk polar, dan eksponensial dari bilangan kompleks;
3. menganalisis dan membuktikan sifat-sifat bilangan kompleks dan sifat-sifat yang berhubungan dengan vektor dan modulus;
4. menjelaskan konsep yang berhubungan dengan *argument*, akar, dan *region* pada bilangan kompleks.

5. menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan konsep dasar bilangan kompleks, operasi, sekawan kompleks, bentuk polar, dan eksponensial dari bilangan kompleks.

1.1 Pengantar Bilangan Kompleks

Dalam semesta pembicaraan bilangan real, jika diberikan sebuah persamaan $x^2 - 1 = 0$ maka solusi realnya adalah $x = 1$ atau $x = -1$. Namun jika diberikan persamaan $x^2 + 1 = 0$ maka persamaan ini tidak memiliki solusi real. Hal ini dikarenakan oleh sifat dari bilangan real yang tidak memuat akar dari bilangan negatif. Pada semesta pembicaraan apa persamaan $x^2 + 1 = 0$ akan memiliki solusi? Jawabannya adalah pada semesta pembicaraan bilangan kompleks. Pada bilangan kompleks, persamaan $x^2 + 1 = 0$ memiliki solusi $x = i$ atau $x = -i$.

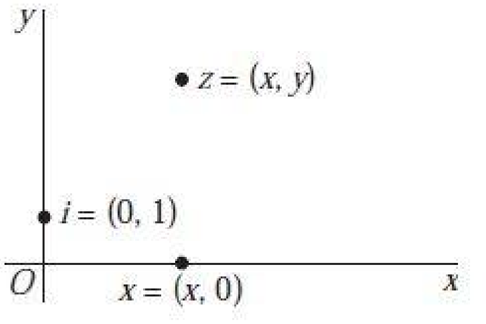
Himpunan bilangan kompleks yang dinotasikan dengan $\mathbb{C}$, dapat didefinisikan sebagai himpunan pasangan terurut bilangan real (x, y) yang secara geometris dapat diinterpretasikan sebagai titik pada bidang kompleks, dengan koordinat kartesisus (*rectangular coordinate*) x dan y. Pada garis bilangan, bilangan real x juga direpresentasikan sebagai titik, namun pada bidang kompleks, bilangan real x berada pada koordinat titik $(x, 0)$ di sumbu x (selanjutnya disebut dengan sumbu real). Dalam hal ini, jelas bahwa himpunan bilangan kompleks memuat bilangan real sebagai himpunan bagiannya, yaitu titik-titik pada sumbu x. Bilangan kompleks $(0, y)$ berkorespondensi dengan titik-titik pada sumbu y yang selanjutnya disebut dengan *bilangan imajiner* dengan syarat $y \neq 0$. Sumbu y ini selanjutnya disebut sebagai *sumbu imajiner*. Bilangan kompleks (x, y) biasanya disimbolkan dengan z (lihat Gambar 1.1) dan dapat dituliskan

$$z = (x, y) \tag{1.1}$$

Bilangan real x dan y berturut-turut disebut sebagai bagian real (*real part*) dan bagian imajiner (*imaginary part*) dari z, masing-masing dapat ditulis

$$Re(z) = x, \qquad Im(z) = y \tag{1.2}$$

Bilangan kompleks z_1 dan z_2 dikatakan sama jika masing-masing memiliki bagian real dan imajiner yang sama, yaitu $Re(z_1) = Re(z_2)$ dan $Im(z_1) = Im(z_2)$. Dengan demikian $z_1 = z_2$ apabila z_1 dan z_2



Gambar 1.1: Kedudukan bilangan kompleks

memiliki titik yang sama pada bidang kompleks z. Pertanyaannya adalah, bisakah dua bilangan kompleks z_1 dan z_2 dibandingkan? Pada bilangan real, kita dapat mengatakan bahwa $x_1 < x_2$ jika posisi x_1 berada di sebelah kiri x_2. Bisakah argumentasi yang sama diterapkan pada dua bilangan kompleks? Kapan bilangan kompleks $z_1 < z_2$? silakan diskusikan dalam kelompok anda!

Operasi pada bilangan kompleks dapat dijelaskan sebagai berikut. Untuk operasi penjumlahan dan perkalian pada dua bilangan kompleks, misalkan bahwa

$$z_1 = (x_1, y_1) \qquad \text{dan} \qquad z_2 = (x_2, y_2)$$

masing-masing operasi secara berturut-turut didefinisikan sebagai:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{1.3}$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2). \tag{1.4}$$

Perhatikan bahwa operasi yang didefinisikan oleh Persamaan 1.3 dan 1.4 akan menjadi operasi penjumlahan dan perkalian biasa jika semesta pembicaraan dibatasi pada bilangan real, yaitu:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$
$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

Hal ini karena sistem bilangan kompleks adalah perluasan dari sistem bilangan real.

Berdasarkan definisi penjumlahan pada Persamaan 1.3, suatu bilangan kompleks $z = (x, y)$ dapat dituliskan $z = (x, 0) + (0, y)$ dan dengan mudah didapatkan $(0, 1)(y, 0) = (0, y)$. Oleh karenanya, z dapat ditulis

$$z = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$

Jika i menotasikan bilangan imajiner $(0, 1)$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.1, maka bilangan kompleks $z = (x, y)$ dapat ditulis juga dalam bentuk

$$z = x + iy. \tag{1.5}$$

Selain itu, untuk $i = (0, 1)$, diperoleh

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$$

atau

$$i^2 = -1 \tag{1.6}$$

Karena $z = (x, y) = x+iy$, definisi operasi penjumlahan dan perkalian pada Persamaan 1.3 dan 1.4 menjadi

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{1.7}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2). \tag{1.8}$$

Perhatikan bahwa sisi bagian kanan dari persamaan di atas dapat diperoleh dengan memanipulasi suku-suku pada bagian kiri layaknya pada operasi pada bilangan real dan menggantikan i^2 menjadi -1. Selain itu, obsevasi bagaimana Persamaan 1.8 menjelaskan bahwa sebarang bilangan kompleks jika dikalikan nol akan menghasilkan nol. Lebih jelasnya seperti berikut:

$$z.0 = (x + iy)(0 + i0) = 0 + i0 = 0$$

untuk setiap $z = x + iy$

1.2 Sifat-sifat Aljabar Bilangan Kompleks

Pada umumnya beberapa sifat penjumlahan dan perkalian pada bilangan kompleks sama dengan bilangan real. Selanjutnya, kita akan membahas mengenai sifat-sifat dasar tersebut yang disertai dengan pembuktiannya dan sebagian dibiarkan sebagai latihan.
Sifat komutatif:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad z_1.z_2 = z_2.z_1 \tag{1.9}$$

Bukti:
Misalkan bahwa $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$, maka

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = z_2 + z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2) \\ &= (x_2x_1 - y_2y_1, y_2x_1 + x_2y_1) = (x_2, y_2)(x_1, y_1) = z_2z_1 \end{aligned}$$

Sifat asosiatif

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \qquad (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \tag{1.10}$$

Bukti:
Misalkan bahwa $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, dan $z_3 = (x_3, y_3)$, maka

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= z_1 + (z_2 + z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(z_1z_2)z_3 = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2)(x_3, y_3) \\ &= [(x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (y_1x_2 + x_1y_2)y_3, (y_1x_2 + x_1y_2)x_3 + (x_1x_2 - y_1y_2)y_3] \\ &= [x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(y_2x_3 + x_2y_3), y_1(x_2x_3 - y_2y_3) + x_1(y_2x_3 + x_2y_3)] \\ &= (x_1, y_1)(x_2x_3 - y_2y_3, y_2x_3 + x_2y_3) \\ &= z_1(z_2z_3) \end{aligned}$$

Sifat distributif

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2 \tag{1.11}$$

Pembuktian diserahkan kepada pembaca.

Berdasarkan sifat komutatif untuk perkalian, berlaku $iy = yi$. Akibatnya kita juga dapat menuliskan $z = x+iy$ dengan $z = x+yi$. Selain itu, karena adanya sifat assosiatif maka penjumlahan $z_1 + z_2 + z_3$ dan perkalian $z_1z_2z_3$ tetap terdefinisi dengan baik walaupun tanpa ada tanda kurung diantara dua bilangan kompleks, layaknya pada kasus penjumlahan dan perkalian pada bilangan real.

Identitas penjumlahan $0 = (0, 0)$ dan identitas perkalian $1 = (1, 0)$ untuk bilangan kompleks berlaku,

$$z + 0 = z, \qquad z.1 = z \tag{1.12}$$

untuk setiap bilangan kompleks z.

Setiap bilangan kompleks $z = (x, y)$ berasosiasi dengan invers penjumlahan

$$-z = (-x, -y) \tag{1.13}$$

yang memenuhi persamaan $z + (-z) = 0$. Dalam hal ini, invers penjumlahan dari setiap bilangan z adalah tunggal, karena persamaan $(x, y) + (u, v) = (0, 0)$ mengakibatkan $u = -x$ dan $v = -y$. Persamaan 1.13 dapat juga ditulis menjadi $-z = -x - iy$ karena $-(iy) = (-i)y = i(-y)$ (silakan buktikan persamaan tersebut sebagai latihan). Invers penjumlahan digunakan untuk mendefinisikan pengurangan bilangan kompleks berikut.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \tag{1.14}$$

Sehingga, jika $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$, maka

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{1.15}$$

Untuk setiap bilangan kompleks tak nol $z = (x, y)$, terdapat bilangan kompleks z^{-1} sehingga $z.z^{-1} = 1$. Untuk mendapatkan bilangan kompleks z^{-1} perhatikan ekspresi berikut dengan memisalkan bilangan real u dan v, sedemikian sehingga

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, yu + xv) = (1, 0)$$

Pada Subbab 1.1, telah dijelaskan bahwa dua buah bilangan kompleks z_1 dan z_2 dikatakan sama jika memiliki bagian real dan imajiner yang sama, sehingga bilangan kompleks u dan v harus memenuhi

$$xu - yv = 1, \qquad yu + xv = 0$$

Dengan menyelesaikan persamaan linier tersebut secara simultan, maka akan diperoleh

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Jadi invers perkalian dari $z = (x, y)$ adalah

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \qquad z \neq 0 \tag{1.16}$$

Invers perkalian z^{-1} tidak terdefinisi untuk $z = 0$. Kenyataannya bahwa, $z = 0$ mengakibatkan $x^2 + y^2 = 0$, dan ini tidak terdefinisi pada Persamaan 1.16.

Keberadaan dari invers perkalian digunakan untuk menunjukkan bahwa jika perkalian $z_1 z_2 = 0$, maka paling sedikit salah satu faktor z_1 atau z_2 sama dengan nol. Untuk bukti pernyataan ini, kita misalkan saja $z_1.z_2 = 0$ dan $z_1 \neq 0$. Akibatnya z_1^{-1} ada. Dari definisi perkalian bilangan kompleks, diperoleh

$$z_2 = 1.z_2 = (z_1^{-1} z_1) z_2 = z_1^{-1}(z_1 z_2) = z_1^{-1}.0 = 0$$

Hal ini menunjukkan bahwa, jika $z_1 z_2 = 0$, maka salah satu $z_1 = 0$ atau $z_2 = 0$, atau mungkin keduanya z_1 dan z_2 sama dengan nol. Pernyataan ini ekivalen dengan mengatakan bahwa, jika bilangan kompleks z_1 dan z_2 tak nol maka hasil perkalian $z_1 z_2$ tidak sama dengan nol.

Pembagian dengan bilangan kompleks tak nol adalah didefinisikan sebagai berikut

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \qquad (z_2 \neq 0) \tag{1.17}$$

Jika $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$, Persamaan 1.17 menjadi

$$\frac{z_1}{z_2} = (x_1, y_1) \left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \tag{1.18}$$

Persamaan 1.18 juga dapat dilakukan dengan cara

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)} \tag{1.19}$$

Selanjutnya, dari sifat perkalian dan pembagian di atas kita peroleh

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = (z_1 + z_2)z_3^{-1} = z_1 z_3^{-1} + z_2 z_3^{-1} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}, \qquad (z_3 \neq 0) \tag{1.20}$$

Persamaan 1.19 dan 1.20 dapat digunakan dalam penyelesaian permasalahan seperti pada contoh berikut

Contoh 1.1. *Sederhanakan bilangan kompleks* $\frac{4+i}{2-3i}$ *dalam bentuk* $x + iy$*!*

Jawab:

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{5+14i}{13} = \frac{15}{13} + \frac{14}{13}i$$

■

Beberapa sifat yang melibatkan pecahan atau pembagian mengikuti relasi berikut.

$$\frac{1}{z_2} = z_2^{-1} \qquad (z_2 \neq 0) \tag{1.21}$$

Persamaan ini dapat diperoleh dengan mengganti nilai $z_1 = 1$ pada Persamaan 1.17. Persamaan 1.21 memungkinkan kita, sebagai contoh, untuk menulis Persamaan 1.17 dalam bentuk

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1(\frac{1}{z_2}) \qquad (z_2 \neq 0). \tag{1.22}$$

Selain itu, dengan mengamati persamaan berikut

$$(z_1 z_2)(z_1^{-1} z_2^{-1}) = (z_1 z_1^{-1})(z_2 z_2^{-1}) = 1 \qquad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0)$$

maka dapat disimpulkan bahwa $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}$. Persamaan 1.21 dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa

$$\frac{1}{z_1 z_2} = (z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1} = (\frac{1}{z_1})(\frac{1}{z_2}) \qquad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0). \tag{1.23}$$

Sifat lain yang berguna dapat diturunkan sebagai berikut

$$\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = (\frac{z_1}{z_3})(\frac{z_2}{z_4}) \qquad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0). \tag{1.24}$$

Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.2. *Sederhanakan* $(\frac{1}{2-3i})(\frac{1}{1+i})$ *dalam bentuk* $x+iy$*!*

Jawab:
Untuk menyelesaikan permasalahan ini, kita dapat menggunakan Persamaan 1.23 dan 1.19.

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2-3i})(\frac{1}{1+i}) &= \frac{1}{(2-3i)(1+i)} \\
&= \frac{1}{5-i}.\frac{5+i}{5+i} \\
&= \frac{5+i}{(5-i)(5+i)} = \frac{5+i}{26} \\
&= \frac{5}{26} + \frac{i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}i
\end{aligned}$$

■

Sebagai akhir dari bagian ini, perlu dicatat bahwa rumus binomial melibatkan bilangan real tetap berlaku juga untuk bilangan kompleks. Artinya, jika z_1 dan z_2 dua bilangan kompleks, berlaku

$$(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{1.25}$$

dimana

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

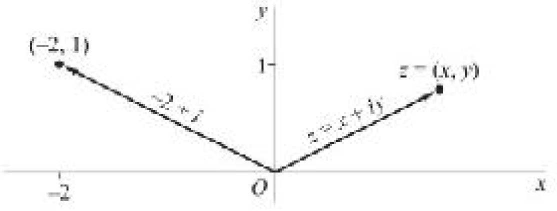
dan dimana disepakati bahwa $0! = 1$. Buktinya, dengan induksi matematika, kita tinggalkan sebagai latihan.

1.3 Vektor dan Modulus

Suatu hal yang biasa bila kita mengasosiasikan setiap bilang kompleks tak nol $z = x + iy$ dengan segmen garis atau suatu vektor dari titik asal (0,0) ke titik (x,y) yang merepresentasikan z di bidang kompleks. Bahkan, kita sering menyebut z sebagai titik z atau vektor z. Dalam Gambar 1.2, bilangan kompleks $z = x + iy$ dan -2+i ditunjukkan dengan grafik sebagai titik maupun vektornya.

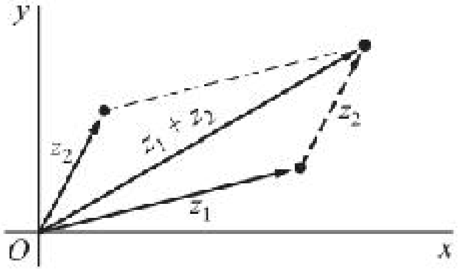
Ketika $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, hasil penjumlahan vektor z_1 dan z_2

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$



Gambar 1.2: Penggambaran arah vektor z

berkorespondensi dengan titik $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Penjumlahan vektor tersebut juga berkorespondensi dengan vektor koordinat sebagai komponennya. Dengan demikian $z_1 + z_2$ dapat diperoleh secara vektor sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 1.3.



Gambar 1.3: Penjumlahan dua vektor dan arah vektornya

Meskipun hasil perkalian dari dua bilangan kompleks z_1 dan z_2 merupakan bilangan kompleks (lihat definisi perkalian dua buah bilangan kompleks) yang juga dapat direpresentasikan oleh vektor, vektor tersebut terletak pada bidang yang sama dengan vektor z_1 dan z_2. Terbukti, hasil ini bukanlah skalar maupun vektor yang biasa digunakan dalam analisis vektor.

Interpretasi vektor dari bilangan kompleks sangat membantu dalam memperluas konsep nilai mutlak pada bilangan real untuk bidang kompleks. *Modulus*, atau *nilai mutlak*, dari bilangan kompleks $z = x + iy$ didefinisikan sebagai bilagan real non-negatif $\sqrt{x^2 + y^2}$ dan dinotasikan dengan $|z|$; yaitu,

$$| z |= \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.26}$$

Secara geometris, bilangan kompleks |z| adalah jarak antara titik (x, y) ke titik asal, atau panjang jari-jari yang mewakili vektor z. Ketika $y = 0$, maka $|z|$ sama dengan nilai mutlak dalam sistem bilangan real. Dalam hal ini, pertidaksamaan $|z_1| < |z_2|$ memiliki arti bahwa titik z_1 lebih dekat ke titik asal daripada titik z_2.

Contoh 1.3. *Bilangan kompleks manakah yang lebih dekat ke titik asal antara* $-3 + 2i$ *dan* $1 + 4i$*?*

Jawab:
Karena $|-3 + 2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ dan $|1 + 4i| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$, maka dapat kita simpulkan bahwa bilangan kompleks $-3 + 2i$ lebih dekat ke titik asal daripada bilangan kompleks $1 + 4i$. ■

Jarak antara dua titik $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$ adalah $|z_1 - z_2|$. Hal ini terlihat jelas pada Gambar 1.4, karena $|z_1 - z_2|$ adalah panjang dari vektor yang direpresentasikan oleh bilangan kompleks

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

dan selain mengartikannya sebagai jari-jari vektor $z_1 - z_2$, $|z_1 - z_2|$ juga dapat diinterpretasikan sebagai segmen garis berarah dari titik (x_2, y_2) ke titik (x_1, y_1). Atau dapat dituliskan dalam bentuk

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

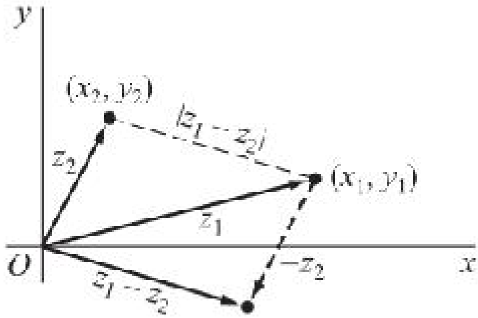
dan dari Definisi 1.26 dapat dituliskan

$$| z_1 - z_2 | = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Bilangan kompleks z berkorespondensi dengan titik-titik yang terletak pada lingkaran dengan titik pusat z_0 dan radius R sehingga memenuhi persamaan $|z\text{-}z_0| = R$, dan sebaliknya. Ketika kita mengacu pada himpunan titik-titik tersebut, kita menyebutnya sebagai lingkaran $|z\text{-}z_0| = R$.

Contoh 1.4. *Persamaan* $|z - 1 + 3i| = |z - (1 - 3i)| = 2$ *merepresentasikan sebuah lingkaran dengan pusat* $z_0 = (1, -3)$ *dan radius* $R = 2$

Dari Definisi 1.26, bagian real dari |z|, yakni $Re(z) = x$, dan $Im(z) = y$ menghasilkan persamaan



Gambar 1.4: Jarak antara dua bilangan kompleks

$$| z |^2 = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2 \tag{1.27}$$

Oleh karena itu,

$$Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z| \text{ dan } Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z| \tag{1.28}$$

Sekarang kita dapat beralih ke pertidaksamaan segitiga, dimana kita dapat menentukan batas atas dari modulus penjumlahan dua bilangan kompleks z_1 dan z_2

$$| z_1 + z_2 | \leq | z_1 | + | z_1 | \tag{1.29}$$

Pertidaksamaan yang penting ini secara geometris dapat dilihat pada Gambar 1.3, karena pertidaksamaan tersebut menyatakan bahwa panjang salah satu sisi dari segitiga lebih kecil atau sama dengan jumlah dari panjang dua sisi segitiga yang lain. Kita juga dapat melihat pada Gambar 1.3 bahwa Pertidaksamaan 1.29 sebenarnya adalah sebuah persamaan ketika 0, z_1, dan z_2 terletak pada satu garis. Akibat dari ketidaksamaan segitiga adalah

$$| z_1 + z_2 | \geq \big| \, | z_1 | - | z_2 | \, \big|. \tag{1.30}$$

Untuk menurunkan Pertidaksamaan 1.30, kita dapat menuliskan

$$| z_1 | = | (z_1 + z_2) + (-z_2) | \leq | z_1 + z_2 | + | -z_2 |,$$

yang berarti

$$| z_1 + z_2 | \geq | z_1 | - | z_2 | \, . \tag{1.31}$$

Pertidaksamaan 1.30 berlaku ketika $\mid z_1 \mid \geq \mid z_2 \mid$. Jika $\mid z_1 \mid \leq \mid z_2 \mid$, kita hanya perlu merubah z_1 dan z_2 pada Pertidaksamaan 1.31 sehingga didapat persamaan

$$\mid z_1 + z_2 \mid \geq -(\mid z_1 \mid - \mid z_2 \mid),$$

Pertidaksamaan 1.30 menyatakan dengan jelas bahwa panjang salah satu sisi segitiga lebih besar atau sama dengan selisih dari dua sisi lainnya. Karena $|-z_2| = |z_2|$ salah satu dapat menggantikan z_2 dengan $-z_2$ di dalam Pertidaksamaan 1.29 dan 1.30. Untuk meringkas penyelesaian ini, diperoleh

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1|+|z_2|, \tag{1.32}$$

$$|z_1 \pm z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|. \tag{1.33}$$

Dengan mengombinasikan Pertidaksamaan 1.32 dan 1.32 didapat :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1|+|z_2| \tag{1.34}$$

Contoh 1.5. *Jika titik z berada pada lingkaran $|z| = 1$ dengan pusat titik asal, maka berdasarkan Pertidaksamaan 1.32 dan 1.32 berlaku*

$$|z_1 - 2| \leq |z_1| + 2 = 3$$

dan

$$|z_1 - 2| \geq \mid |z_1| - 2 \mid = 1$$

■

Pertidaksamaan segitiga 1.29 dapat digeneralisasi dengan menggunakan induksi matematika untuk sejumlah hingga bilangan kompleks:

$$\mid z_1 + z_2 + ... + z_n \mid \leq \mid z_1 \mid + \mid z_1 \mid + ... + \mid z_n \mid \text{ untuk } n = 2, 3, ... \tag{1.35}$$

Sifat Lanjutan Jika $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ merupakan sejumlah hingga bilangan kompleks maka berlaku sifat dibawah ini :

(1) $|z_1 z_2 \mid = |z_1 \mid |z_2 \mid$ atau $|z_1 z_2 ... z_n \mid = |z_1 \mid |z_2 \mid ... |z_n \mid$

(2) $\mid \dfrac{z_1}{z_2} \mid = \dfrac{\mid z_1 \mid}{\mid z_2 \mid}$ jika $z_2 \neq 0$

(3) $|z_1 + z_2 \mid \leq |z_1 \mid + |z_2 \mid$ atau $|z_1 + z_2 + ... + z_n \mid \leq |z_1 \mid + |z_2 \mid + ... + |z_n \mid$

(4) $|z_1 \pm z_2 \mid \geq |z_1 \mid$ - $|z_2 \mid$

1.4 Kompleks Sekawan

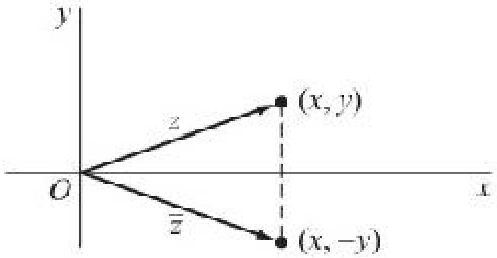
Kompleks sekawan, atau cukup *sekawan*, dari bilangan kompleks $z = x + iy$ didefinisikan sebagai bilangan kompleks $x - iy$ dan dinotasikan dengan $\overline{z}$, yaitu

$$\overline{z} = x - iy \tag{1.36}$$

Bilangan $\overline{z}$ direpresentasikan oleh titik $(x, -y)$, yang merupakan hasil pencerminan terhadap sumbu real dari z dari titik (x, y) yang merepresentasikan bilangan kompleks z (lihat Gambar 1.5). Sebagai catatan,

$$\overline{\overline{z}} = z \text{ dan } |\overline{z}| = |z|$$

untuk semua z.



Gambar 1.5: Kompleks sekawan

Jika $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2).$$

Sehingga sekawan dari penjumlahan sama dengan penjumlahan dari masing-masing sekawan:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \tag{1.37}$$

dengan cara seperti di atas, dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \tag{1.38}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \tag{1.39}$$

dan

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad (z_2 \neq 0) \tag{1.40}$$

Penjumlahan $z+\overline{z}$ dari bilangan kompleks $z = x+iy$ dan sekawannya $\overline{z} = x - iy$ adalah bilangan real $2x$, dan selisih $z - \overline{z}$ adalah bilangan imajiner $2iy$. Oleh karena itu,

$$Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{dan} \quad Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \tag{1.41}$$

hal yang penting yang berhubungan dengan bilangan komplek sekawan dari $z = x+iy$ ke modulusnya adalah

$$z\overline{z} = |z|^2, \tag{1.42}$$

dimana setiap ruas sama dengan x^2+y^2. Seperti yang ditunjukkan dari persamaan z_1/z_2 dari pernyataan (1.42), berdasarkan kedua perkalian dari pembilang dan penyebut dari z_1/z_2 oleh $\overline{z_2}$, sehingga penyebut menjadi bilangan real $|z_2|^2$.

Contoh 1.6. *Sebagai ilustrasi*

$$\frac{-1+3i}{2-i} = \frac{(-1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-5+5i}{|2-i|^2} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i$$

■

Persamaan (1.42) digunakan sebagai persamaan sifat dari modulus untuk sifat sekawan, ditulis sebagai berikut

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{1.43}$$

and

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0) \tag{1.44}$$

Sifat (1.43) dapat disederhanakan sebagai berikut

$$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) = (z_1z_2)(\overline{z_1}\,\overline{z_2}) = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2|z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$$

sehingga dari persamaan di atas tidak pernah negatif. Sifat (1.44) dapat diselesaikan dengan cara yang sama.

Contoh 1.7. *Dari persamaan (1.43) diketahui bahwa* $|z^2| = |z|^2$ *dan* $|z^3| = |z|^3$*. Sehingga, jika* z *terletak di dalam lingkaran dengan pusat titik asal dan jari-jari 2, maka* $|z| < 2$*, dari Pertidaksamaan 1.35 diperoleh*

$$|z^3 + 3z^2 - 2z + 1| \leq |z|^3 + 3|z|^2 + 2|z| + 1 < 25.$$

■

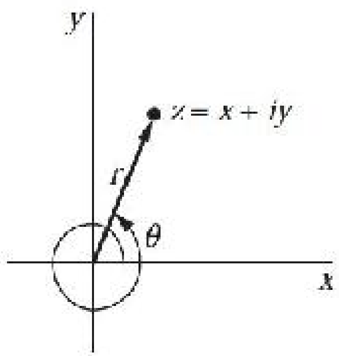
1.5 Bentuk Eksponensial

Misalkan r dan θ adalah koordinat polar dari (x, y) yang bersesuaian dengan bilangan kompleks tak nol $z = x + iy$. Karena $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, bilangan z dapat ditulis dalam bentuk polar sebagai

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1.45}$$

Jika $z = 0$, koordinat θ tidak terdefinisi; oleh karena itu diasumsikan bahwa $z \neq 0$ setiap kali koordinat polar digunakan.

Dalam analisis kompleks, bilangan real r tidak boleh negatif karena r merujuk pada panjang jari-jari vektor z; yaitu $r = |z|$. Bilangan real θ merepresentasikan suatu sudut yang dihitung dalam radian, yang dihitung dari sumbu real positif (lihat Gambar 1.6).



Gambar 1.6: Penyajian bilangan kompleks dalam koordinat polar

Seperti pada kalkulus, θ memiliki nilai tak hingga dari nilai yang mungkin, termasuk nilai yang negatif, yang berbeda secara keseluruhan dalam kelipatan 2π. Nilai-nilai tersebut dapat ditentukan dari persamaan $\tan\theta = \frac{y}{x}$, dimana letak kuadrannya mengacu pada titik-titik dari nilai z yang telah ditentukan. Setiap nilai θ disebut *argument* dari z, dan himpunan dari nilai-nilai tersebut dilambangkan dengan arg z. Nilai utama (*principal value*) dari arg z, dinotasikan dengan Arg z, adalah nilai khusus Θ yang berada pada selang $-\pi < \Theta \leq \pi$. Dalam hal ini,

$$\text{arg}z = \text{Arg}z + 2n\pi, \qquad n = (0, \pm 1, \pm 2, ...). \tag{1.46}$$

Ketika z adalah bilangan real negatif, maka Arg$z$ memiliki nilai π, bukan $-\pi$.

Contoh 1.8. *Bilangan kompleks $-1-i$ yang terletak di kuadran tiga, memiliki principal argument $\frac{-3\pi}{4}$, yaitu*

$$Arg(-1-i) = \frac{-3\pi}{4}.$$

■

Sebagai catatan, *principal argument* berada pada selang $-\pi < \theta \leq \pi$,sehingga tidak benar bahwa Arg$(-1-i) = \frac{5\pi}{4}$

Berdasarkan Persamaan 1.46,

$$\text{arg}(-1-i) = \frac{-3\pi}{4} + 2n\pi, \qquad n = (0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Perhatikan bahwa Arg z di ruas kanan pada Persamaan 1.46 dapat diganti dengan nilai tertentu pada arg z dan dapat ditulis sebagai berikut,

$$\text{arg}(-1-i) = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \qquad n = (0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Simbol $e^{i\theta}$ atau $\exp(i\theta)$, dapat didefinisikan dengan rumus Euler sebagai berikut,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \tag{1.47}$$

dimana θ adalah besaran sudut dalam radian. Ini memungkinkan untuk ditulis dalam bentuk polar pada Persamaan 1.45, lebih lengkapnya ditulis dalam bentuk eksponensial sebagai,

$$z = re^{i\theta}. \tag{1.48}$$

Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.9. *Bilangan* $-1-i$ *dalam Contoh 1.8 memiliki bentuk eksponensial*

$$-1-i = \sqrt{2}\exp\,[i(\frac{-3\pi}{4})]. \tag{1.49}$$

Dengan kesepakatan bahwa $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)}$, dapat ditulis $-1-i = \sqrt{2}e^{\frac{-i3\pi}{4}}$. Pernyataan 1.49 tentu saja hanyalah salah satu dari sejumlah tak hingga kemungkinan untuk bentuk eksponensial $-1-i$:

$$-1-i = \sqrt{2}\mathrm{exp}[i(\frac{-3\pi}{4} + 2n\pi)], \qquad n = (0, \pm 1, \pm 2, ...). \tag{1.50}$$

■

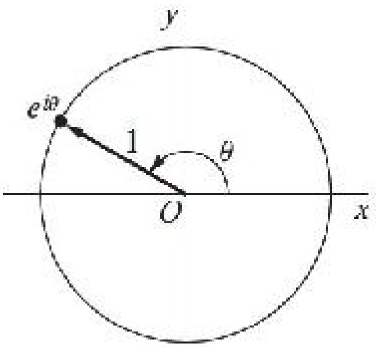
Perhatikan bagaimana Persamaan 1.48 dengan $r = 1$ memberikan deskripsi bahwa bilangan $e^{i\theta}$ berada pada lingkaran yang berpusat pada titik asal dengan panjang radius satu, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.7. Berdasarkan gambar tersebut, nilai $e^{i\theta}$ dapat dengan mudah ditentukan tanpa mengacu pada rumus Euler. Sebagai contoh,

$$e^{i\pi} = -1, \qquad e^{i\frac{-\pi}{2}} = -i, \qquad \text{dan} \qquad e^{-i4\pi} = 1 \tag{1.51}$$

Perhatikan juga pada persamaan

$$z = Re^{i\theta}, \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi). \tag{1.52}$$

adalah representasi parametrik dari lingkaran $|z| = R$, dengan pusat titik asal dan berjari-jari R. Ketika parameter θ berubah dari $\theta = 0$ sampai $\theta = 2\pi$, titik z akan dimulai dari sumbu bilangan real positif dan bergerak dalam bentuk lingkaran dengan arah berlawanan arah



Gambar 1.7: Bentuk eksponensial bilangan kompleks

jarum jam. Umumnya, lingkaran $|z - z_0| = R$, yang berpusat pada z_0 dan jari-jarinya adalah R, memiliki representasi parametrik

$$z = z_0 + Re^{i\theta}, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi). \tag{1.53}$$

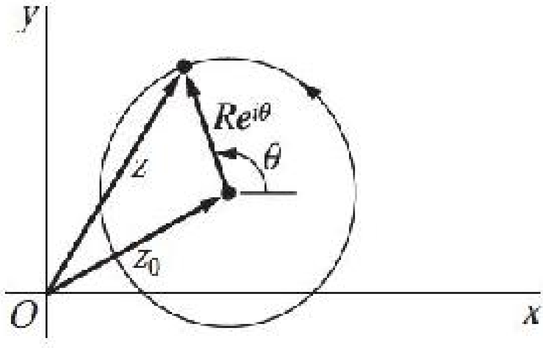
Hal ini dapat dilihat dengan vektor (lihat Gambar 1.8) dengan z sebagai titik yang bergerak dalam bentuk lingkaran $|z - z_0| = R$ dengan arah yang berlawanan dengan jarum jam yang berkorespondensi dengan jumlah dari vektor z_0 dan vektor dengan panjang R yang mempunyai sudut kemiringan θ dengan selang dari $\theta = 0$ sampai $\theta = 2\pi$.

1.6 Perkalian dan Perpangkatan dalam Bentuk Eksponensial

Dalam trigonometri kita mengetahui bahwa $e^{i\theta}$ memiliki sifat penjumlahan yang mirip dengan fungsi eksponensial di kalkulus:

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (cos\theta_1 + isin\theta_1)(cos\theta_2 + isin\theta_2) \\ &= (cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2) + i(sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2) \\ &= cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

jika $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, maka perkalian z_1z_2 memiliki bentuk



Gambar 1.8: Koordinat polar eksponensial

eksponensial:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta 2)} \tag{1.54}$$

Selain itu untuk

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.55}$$

Dari Persamaan 1.55 dan fakta bahwa $1 = 1e^0$, dapat dicari invers dari bilangan kompleks tidak nol $z = re^{i\theta}$ adalah

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \tag{1.56}$$

Persamaan 1.54, 1.55 dan 1.56 tentu mudah diingat dengan menggunakan aturan aljabar biasa untuk bilangan real dan e^x.

Hal penting lainnya yang diperoleh dengan menerapkan aturan untuk bilangan real ke $z = re^{i\theta}$ yakni

$$z^n = r^n e^{in\theta}(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{1.57}$$

Kita dapat dengan sangat mudah membuktikan bahwa persamaan tersebut berlaku untuk bilangan positif n dengan memakai induksi matematika. Secara khusus, dapat kita lihat bahwa ketika $n = 1$ maka Persamaan 1.57 menjadi $z = re^{i\theta}$. Selanjutnya kita asumsikan bahwa persamaan tersebut valid untuk $n = m$, dimana m adalah bilangan positif. Berdasarkan ekspresi pada Persamaan 1.54 untuk perkalian dua bilangan kompleks tak nol dalam bentuk eksponensial dimana $n = m + 1$, diperoleh:

$$z^{m+1} = zz^m = re^{i\theta}r^m e^{im\theta} = r^{m+1}e^{i(m+1)\theta}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa Persamaan 1.57 valid untuk n bilangan positif. Persamaan tersebut juga valid untuk $n = 0$, yaitu $z^0 = 1$. Selain itu, jika $n = -1. -2, \ldots$, kita definisikan z^n dalam bentuk perkalian invers dari z, dan ditulis

$$z^n = (z^{-1})^m \qquad \text{dimana} \qquad m = -n = 1, 2, ...$$

Selanjutnya, karena Persamaan 1.57 berlaku untuk bilangan positif, maka dari bentuk eksponensial pada Persamaan 1.56 dari z^{-1}, diperoleh

$z^n = [\frac{1}{r}e^{i(-\theta)}]^m = (\frac{1}{r})^m e^{im(-\theta)} = (\frac{1}{r})^{-n}e^{i(-n)(-\theta)} = r^n e^{in\theta}$ $(n = -1, -2, ..)$.

Ekspresi Persamaan 1.57 dapat diterapkan untuk semua bilangan (termasuk bilangan negatif). Persamaan 1.57 dapat digunakan untuk menemukan hasil perpangkatan dari bilangan kompleks walaupun dalam bentuk kartesius (*rectangular form*) dan hasil yang diinginkan juga dalam bentuk itu. Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.10. *Untuk menentukan* $(\sqrt{3}+i)^7$ *maka dapat ditulis dengan*

$$(\sqrt{3} + i)^7 = (2e^{\frac{i\pi}{6}})^7 = 2^7 e^{i\frac{7\pi}{6}} = (2^6 e^{i\pi})(2e^{i\frac{\pi}{6}}) = -64(\sqrt{3} + i).$$

■

Selanjutnya, jika $r = 1$, maka Persamaan 1.57 menjadi

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...), \tag{1.58}$$

dan ditulis dalam bentuk

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ..), \tag{1.59}$$

Rumus ini dikenal sebagai rumus de Moivre.. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.11. *Rumus pada Persamaan 1.59 untuk* $n = 2$ *akan menghasilkan*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

atau

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + i2\sin\theta\cos\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua bilangan kompleks, dipeoleh identitas trigonometri yang sudah familiar, yaitu

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

■

1.7 *Argument* dari Perkalian dan Pembagian

Misalkan bahwa $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, maka persamaan

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.60}$$

pada Subbab 1.6 dapat digunakan untuk mendapatkan identitas penting yang melibatkan *argument*:

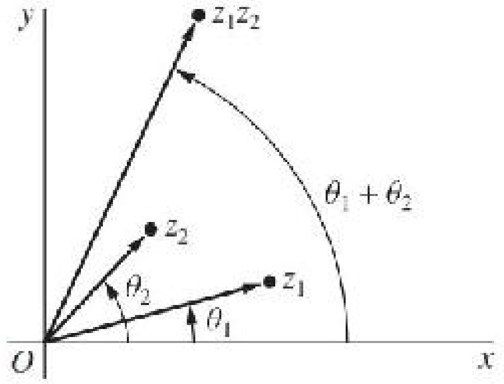
$$arg\ (z_1 z_2) = arg\ z_1 + arg\ z_2 \tag{1.61}$$

Hasil ini mengartikan bahwa jika nilai dari dua atau tiga (nilai banyak) argument ditentukan, maka ada nilai ke-tiga sedemikian hingga persamaan tersebut terpenuhi.

Kita mulai untuk pembuktian Persamaan 1.61 dengan memisalkan θ_1 dan θ_2 yang menunjukkan nilai sebarang dari $arg\ z_1$ dan $arg\ z_2$ beturut-turut. Persamaan 1.60 mengatakan bahwa θ_1 dan θ_2 adalah nilai dari $arg\ (z_1 z_2)$ (Lihat Gambar 1.9).

Di sisi lain, jika nilai dari $arg\ (z_1 z_2)$ dan $arg\ z_1$ sudah ditetapkan, nilai tersebut akan sesuai dengan beberapa pilihan dari n dan n_1 pada persamaan

$$arg\ (z_1 z_2) = (\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$



Gambar 1.9: Representasi z_1, z_2 dan z_1z_2

dan

$$arg\ z_1 = \theta_1 + +2n_1\pi \qquad (n_1 = 0, \pm1, \pm2, ...)$$

Karena

$$(\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi = (\theta_1 + 2n_1\pi) + [\theta_2 + 2(n - n_1)\pi]$$

Persamaan 1.61 akan terpenuhi ketika nilai

$$arg\ z_2 = \theta_2 + 2(n - n_1)\pi$$

yang dipilih. Pembuktian ketika nilai dari $arg\ (z_1z_2)$ dan $arg\ z_2$ sudah ditetapkan mengikuti alur pembuktian di atas.

Contoh 1.12. *Jika* $z_1 = -1$ *dan* $z_2 = i$, *maka* $Arg(z_1z_2) = Arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ *tetapi* $Arg\ z_1 + Arg\ z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

■

Pada Contoh 1.12, jika kita mengambil nilai-nilai $arg(z_1)$ dan $arg(z_2)$ yang barusan digunakan dan memilih nilai

$$Arg(z_1z_2) + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

dari $arg(z_1z_2)$, kita menemukan bahwa Persamaan 1.61 sesuai. Selain itu, Persamaan 1.61 juga menuntun kita pada ekspresi

$$Arg(\frac{z_1}{z_2}) = Argz_1(z_2)^{-1} = Argz_2 + Arg((z_2)^{-1})$$

dan karena

$$z_2^{-1} = \frac{1}{(r_2}e^{-i\theta_2}$$

kita dapat melihat bahwa

$$arg(z_2)^{-1} = argz_2 \tag{1.62}$$

maka

$$arg(\frac{z_1}{z_2}) = argz_1 - argz_2 \tag{1.63}$$

Persamaan 1.62 dapat diartikan bahwa himpunan semua nilai pada ruas kiri adalah sama dengan himpunan semua nilai di ruas kanan. Persamaan 1.63 juga dapat disimpulkan dengan cara yang sama dengan Persamaan 1.61. Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.13. *Temukan principal argument $Arg(z)$ dari*

$$z = \frac{-2}{1+\sqrt{3i}}$$

Jawab:
Dapat kita amati bahwa

$$argz = arg(-2) - arg(1+\sqrt{3i}).$$

Karena

$$Arg(-2) = \pi \text{ dan } Arg(1+\sqrt{3i}) = \tfrac{\pi}{3},$$

maka salah satu nilai dari $argz$ adalah $2\pi/3$. Karena $2\pi/3$ berada diantara $-\pi$ dan π, maka dapat disimpulkan bahwa $Arg(z) = 2\pi/3$.■

1.8 Akar Bilangan Kompleks

Jika diberikan suatu permasalahan sebagi berikut.

Contoh 1.14. *Tentukan nilai z yang memenuhi persamaan $z^2 = -21 - 20i$*

Jawab:
Permasalahan ini masih dapat dengan mudah diselesaikan dengan menggunakan sifat-sifat bilangan kompleks yang telah kita pelajari sebelumnya. Misalkan bahwa $z = x + iy$ maka

$$(x + iy)^2 = -21 - 20i \Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = -21 - 20i$$

Berdasarkan sifat kesamaan bilangan kompleks, diperoleh

$$x^2 - y^2 = -21 \qquad 2xy = -20 \tag{1.64}$$

Berdasarkan Ekspresi 1.64, diperoleh

$$x = -\frac{10}{y} \tag{1.65}$$

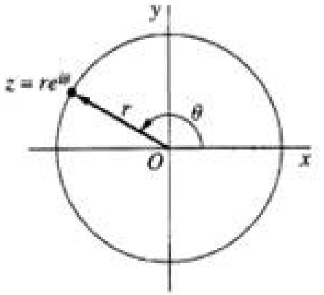
Dengan menyubstitusikan nilai x ke Ekspresi 1.64 bagian pertama, diperoleh

$$\frac{100}{y^2} - y^2 = -21 \Leftrightarrow 100 - y^4 = -21y^2$$

Sehingga dipeoleh nilai y yang memenuhi yaitu $y = 5$ atau $y = -5$. Jika nilai y ini disubstitusikan ke Persamaan 1.65, maka dipeoleh nilai $x = -2$ pada saat $y = 5$ atau $x = 2$ pada saat $y = -5$. Sehingga, nilai z yang memenuhi adalah $z = -2 + 5i$ atau $z = 2 - 5i$. ■

Pertanyaan lanjutannya adalah, bagaimana jika permasalahan tersebut kita ubah menjadi $z^5 = -21 - 20i$? Berapakah nilai z yang memenuhi?

Sekarang pertimbangkan sebuah titik $z = re^{i\theta}$, yang berada pada lingkaran dengan pusat titik asal dengan radius r (lihat Gambar 1.10). Pada saat nilai θ meningkat, z bergerak melingkar berlawanan arah dengan jarum jam. Pada saat tertentu, ketika nilai θ meningkat sampai pada 2π, maka z kembali ke titik awal, dan hal yang sama juga akan terjadi manakala nilai θ menurun sampai pada 2π.



Gambar 1.10: Ilustrasi akar bilangan kompleks

Berdasarkan gambar tersebut, dapat kita lihat bahwa *dua bilangan kompleks tidak nol*

$$z_1 = re^{i\theta} \qquad \text{dan} \qquad z_2 = re^{i\theta}$$

adalah sama jika dan hanya jika

$$r_1 = r_2 \qquad \text{dan} \qquad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$$

dimana k adalah bilangan bulat $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Observasi ini, dan fakta bahwa $z^n = r^n e^{in\theta}$ sebagai hasil pangkat n dari bilangan kompleks $z = re^{i\theta}$, sangat berguna dalam mencari akar pangkat ke-n dari sebarang bilangan kompleks tak nol $z_0 = re^{i\theta_0}$, dimana n memiliki sebuah nilai $n = 2, 3, \ldots$. Metode tersebut dimulai dengan sebuah fakta bahwa akar pangkat ke-n dari z_0 adalah sebuah bilangan tak nol $z = re^{i\theta}$ sedemikian sehingga $z^n = z_0$, atau

$$r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$$

Berdasarkan pada pernyataan yang telah di cetak miring sebelumnya, maka

$$r^n = r_0 \qquad \text{dan} \qquad n\theta = \theta_0 + 2k\pi$$

dimana k adalah sebarang bilangan bulat (k = 0, ±1, ±2, . . .). Jadi, $r = \sqrt[n]{r_0}$, dimana akar ini menotasikan bilangan positif real r_0 yang merupakan akar pangkat ke-n, dan

$$\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad \text{dimana} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

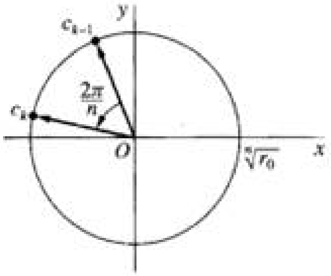
Sebagai konsekuensi, bilangan kompleks

$$z = \sqrt[n]{r_0} exp[i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n})] \qquad \text{dimana} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

adalah akar pangkat ke-n dari z_0. Kita dapat melihat dengan cepat dari bentuk eksponensial ini bahwa semua titik tersebut berada pada lingkaran $|z| = \sqrt[n]{r_0}$ dengan titik asal sebagai titik pusatnya dan daerahnya terbagi sama rata dengan jarak $\frac{2\pi}{n}$ radian, dimulai dengan nilai *argument* $\frac{\theta_0}{n}$. Sangat jelas bahwa semua akar-akar yang berbeda tersebut diperoleh ketika $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$, dan tidak ada akar-akar lainnya yang akan mucul dengan nilai k yang lain. Misalkan bahwa c_k untuk $(k = 0, 1, 2, ..., n - 1)$ menotasikan akar-akar yang berbeda tersebut, maka c_k dapat dituliskan sebagai berikut.

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} exp[i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n})] \qquad \text{dimana} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \quad (1.66)$$

Seperti yang terlihat pada Gambar 1.11.



Gambar 1.11: Posisi bilangan kompleks c_k

Bilangan $\sqrt[n]{r_0}$ adalah panjang dari setiap jari-jari vektor yang merepresentasikan akar ke-n. Akar pertama c_0 memiliki *argument* $\frac{\theta_0}{n}$, dan akar keduanya ketika $n = 2$ berada pada ujung yang berlawanan, yaitu pada sebuah diameter lingkaran $|z| = \sqrt[n]{r_0}$, sehingga akar keduanya menjadi $-c_0$. Ketika $n \geq 3$, akar-akarnya berada pada titik-titik suatu poligon segi n beraturan yang menyinggung lingkaran tersebut.

Kita misalkan bahwa $z_0^{\frac{1}{n}}$ menotasikan sebuah himpunan dari akar ke-n dari z_0. Khususnya, jika z_0 adalah sebuah bilangan real positif r_0, maka lambang $r_0^{\frac{1}{n}}$ menotasikan keseluruhan dari himpunan akar-akar, dan lambang $\sqrt[n]{r_0}$ pada Persamaan 1.66 disediakan untuk salah satu akar positif. Ketika nilai dari θ_0 digunakan dalam Persamaan 1.66 yang merupakan nilai *argument* utama (*the principal value*) dari $arg(z_0)$ $(-\pi < \theta_0 \leq \pi)$, bilangan kompleks c_0 dirujuk sebagai akar utama (*principal root*). Sehigga, ketika z_0 merupakan bilangan riil positif dari r_0, maka akar utamanya adalah $\sqrt[n]{r_0}$.

Perhatikan Persamaan 1.66, jika kita menulis persamaan tersebut dalam bentuk

$$c_k = \sqrt[n]{r_0}\ exp\left(i\frac{\theta_0}{n}\right) exp\left(\frac{i2k\pi}{n}\right) \qquad \text{dimana} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{1.67}$$

dan misalkan bahwa

$$\omega_n = exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$$

maka berdasarkan Persamaan 1.58, diperoleh

$$\omega_n^k = exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad \text{dimana} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{1.68}$$

dan oleh karenanya didapatkan

$$c_k = c_0\omega_n^k \qquad \text{dimana} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{1.69}$$

Bilangan kompleks c_0 tentunya dapat diganti dengan sebarang bilangan yang merupakan akar pangkat ke-n dari z_0, karena ω_n sendiri merepresentasikan suatu rotasi yang berlawanan arah dengan jarum jam sejauh $2\pi/n$ radian.

Akhirnya, cara termudah yang dapat digunakan untuk mengingat Persamaan 1.66 adalah dengan menuliskan z_0 dalam bentuk umum eksponensial

$$z_0 = r_0 e^{i(\theta_0 + 2k\pi)}, \qquad \text{dimana} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{1.70}$$

dan dengan menerapkan sifat pecahan eksponensial yang melibatkan bilangan riil, diperoleh (ingat bahwa tepat ada n akar yang berbeda):

$$\begin{aligned} z_0^{\frac{1}{n}} &= \left(r_0\ e^{i(\theta_0 + 2k\pi)}\right)^{1/n} \\ &= \sqrt[n]{r_0}\ exp\left(\frac{i(\theta_0 + 2k\pi)}{n}\right) \\ &= \sqrt[n]{r_0}\ exp\left(i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \qquad \text{dimana} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \end{aligned} \tag{1.71}$$

Jika kita gunakan Persamaan 1.59 dan fakta bahwa $z_0 = r_0(\cos\theta + i\sin\theta)$ sesuai Persamaan 1.45, maka diperoleh

$$\begin{aligned} z_0^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{r_0}\ exp\left(i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.72}$$

dimana $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Berikut diberikan beberapa contoh penyelesaian soal yang berhubungan dengan akar bilangan kompleks.

Contoh 1.15. *Tentukan nilai z yang memenuhi persamaan $z^n = 1$*

Jawab:
Persamaan $z^n = 1$ dapat kita tulis dalam bentuk $z = 1^{1/n}$. Jika kita misalkan bahwa $z_0 = 1$ maka kita peroleh nilai $\theta_0 = 0$ dan $r_0 = 1$, sehingga berdasarkan Persamaan 1.71 diperoleh

$$1^{1/n} = \sqrt[n]{1}\ exp\left(i\left(\frac{0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) = exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right), \tag{1.73}$$

dengan $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Ketika $n = 2$, maka akar-akar tersebut ada, dan akarnya adalah ± 1. Ketika $n \geq 3$, titik-titik akarnya berada pada poligon beraturan segi-n yang menyinggung lingkaran $|z| = 1$, dengan satu titik berkorespondensi dengan akar utama $z = 1$ pada saat $(k = 0)$. Jika kita misalkan bahwa

$$\omega_n = exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \tag{1.74}$$

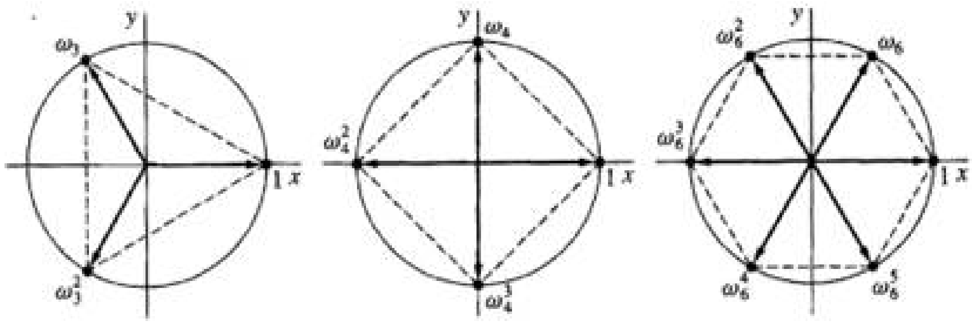
maka berdasarkan Persamaan 1.58, diperoleh

$$\omega_n^k = exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad \text{dimana} \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

Sehingga akar-akar ke-n berbeda yang memenuhi permasalahan tersebut adalah

$$1, \omega_n, \omega_n^2, ..., \omega_n^{n-1}$$

Lihatlah Gambar 1.12, dimana kasus $n = 3, 4$, dan 6 akan diilustrasikan. Perlu dicatat bahwa $\omega_n^n = 1$.



Gambar 1.12: Akar-akar dari $z^n = 1$ untuk kasus $n = 3, 4$, dan 6

Jika c adalah sembarang akar ke-n tertentu dari bilangan kompleks tak nol z_0, himpunan dari akar-akar ke-n dapat dituliskan dalam bentuk

$$c, c\omega_n, \omega_n^2, \ldots, c\omega_n^{n-1}$$

Ini dikarenakan perkalian dari sebarang bilangan kompleks tak nol oleh ω_n meningkatkan *argument* dari bilangan tersebut dengan $\frac{2\pi}{n}$, yang mana modulusnya tidak berubah.

Jika ingin menggunakan bentuk polar, kita dapat menggunakan Persamaan 1.72 untuk menemukan bilangan kompleks z yang memenuhi

$$\begin{aligned} z_k = 1^{1/n} &= \sqrt[n]{1}\ exp\left(i\left(\frac{0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ &= exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{aligned} \tag{1.75}$$

dengan $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. ■

Contoh 1.16. *Tentukan nilai z yang memenuhi persamaan $z^3 = -8i$*

Jawab:
Persamaan $z^3 = -8i$ dapat kita tulis dalam bentuk $z = (-8i)^{1/3}$. Jika kita misalkan bahwa $z_0 = -8i$ maka kita peroleh nilai $\theta_0 = -\pi/2$ dan $r_0 = 8$, sehingga z_0 dapat ditulis $z_0 = 8\ exp\left(i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$ dengan

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ dan berdasarkan Persamaan 1.67 diperoleh

$$\begin{aligned} c_k = (-8i)^{1/3} &= \sqrt[3]{8}\ exp\left(i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\ exp\left(i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \end{aligned}$$

dengan $k = 0, 1, 2$. Titik-titik akarnya berada pada segitiga sama sisi yang menyinggung lingkaran $|z| = 2$, dan membagi daerah menjadi tiga bagian yang sama mengelilingi lingkaran setiap $2\pi 3$ radian, dimulai dengan akar utama (lihat Gambar 1.13)

$$c_0 = 2\ exp\left(i\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$$

Tanpa menggunakan perhitungan yang lebih jauh lagi, dengan cepat dapat diketahui bahwa $c_1 = 2i$, dan karena c_2 simetris terhadap c_0 pada sumbu imaginernya, maka dapat disimpulkan bahwa $c_2 = \sqrt{3} - i$. Akar-akar ini tentunya juga bisa dituliskan dalam bentuk

$$c_0, c_0\omega_3, c_0\omega_3^2$$

dimana

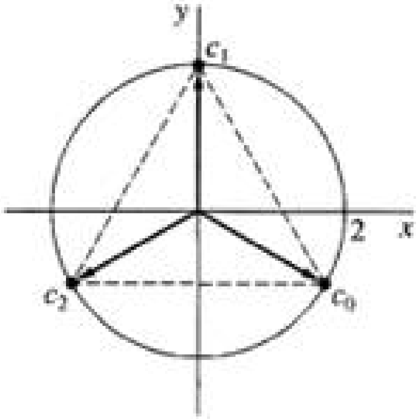
$$\omega_3^k = exp(i\frac{2\pi k}{3}) \qquad \text{dengan} \qquad k = 1, 2$$

(Lihat keterangan pada bagian akhir dari Contoh 1.15).

Contoh 1.17. *Tentukan nilai z yang memenuhi persamaan* $z^2 = \sqrt{3} + i$

Jawab:
Persamaan $z^2 = \sqrt{3} + i$ dapat kita tulis dalam bentuk $z = (\sqrt{3} + i)^{1/2}$. Jika kita misalkan bahwa $z_0 = \sqrt{3} + i$ maka kita peroleh nilai $\theta_0 = \pi/6$ dan $r_0 = 2$, sehingga z_0 dapat ditulis $z_0 = 2\ exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)\right)$ dengan $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ dan berdasarkan Persamaan 1.67 diperoleh

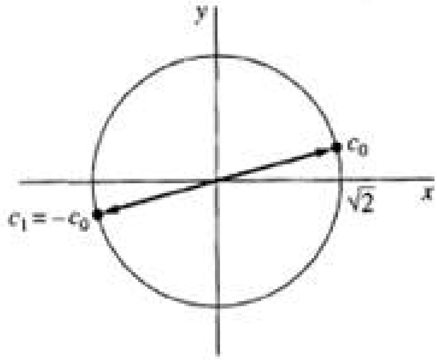
$$\begin{aligned} c_k = (\sqrt{3} + i)^{1/2} &= \sqrt[2]{2}\ exp\left(i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\ exp\left(i\left(\frac{\pi}{12} + k\pi\right)\right), \end{aligned}$$



Gambar 1.13: Ilustrasi akar pangkat tiga $z = (-8i)^{1/3}$

dengan $k = 0, 1$. Titik-titik akarnya berada pada diameter lingkaran $|z| = 2$, dan membagi daerah menjadi dua bagian yang sama mengelilingi lingkaran setiap π radian, dimulai dengan akar utama (lihat Gambar 1.14)

$$c_0 = \sqrt{2}\; exp\left(i\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$



Gambar 1.14: Ilustrasi akar pangkat dua bilangan kompleks $z = (\sqrt{3} + i)^{1/2}$

Berdasarkan identitas trigonometri, diketahui bahwa

$$cos^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 + cos\alpha}{2}, \qquad sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1 - cos\alpha}{2}$$

sehingga diperoleh

$$cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}(1 + cos\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}(1 - cos\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Akibatnya

$$c_0 = \sqrt{2}(\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} + i\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}})$$

Karena $c_1 = -c_0$, kedua akar kuadrat dari $\sqrt{3} + i$ adalah

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}).$$

■

1.9 Daerah dalam Bidang Kompleks

Pada subbab ini akan dibahas beberapa konsep topologi bilangan kompleks. Pembahasan topologi bilangan kompleks hanya menyangkut istilah dan ilustrasi geometris, tanpa analisis lebih dalam. Beberapa hal yang akan dibahas adalah: titik interior, titik eksterior dan titik batas suatu himpunan di bidang kompleks, cakram, himpunan terbuka, himpunan tertutup, closure, himpunan terhubung, dan domain.

Jika z_0 suatu titik di bidang kompleks dan $0 < r < \infty$, maka :

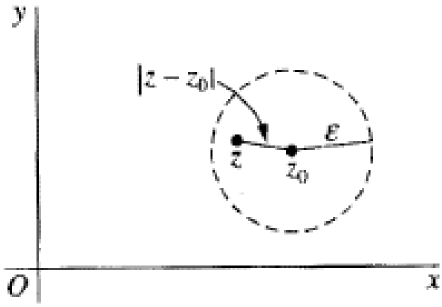
$$\Delta\ (z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$$
$$\Delta^*\ (z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\} \text{ - } \{z_0\}$$
$$\overline{\Delta} = \{z : |z - z_0| \leq r\}$$
$$K\ (z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$$

masing-masing disebut *cakram terbuka*, *cakram terbuka terhapus*, *cakram tertutup*, dan *lingkaran*. Titik z_0 disebut pusat lingkaran dan r adalah jari-jari. Cakram terbuka digunakan untuk mendefinisikan titik interior, titik eksterior dan titik batas himpunan.

Pada bagian ini, kita akan fokus membahas mengenai bilangan kompleks, atau titik pada bidang z dan kedekatan titik satu dengan titik yang lain. Dasar kita dalam pembahasan ini adalah konsep dari sebuah persekitaran ε

$$|z - z_0| < \varepsilon \tag{1.76}$$

dari titik tertentu z_0, dimana terdiri dari semua titik z dalam bidang tetapi tidak pada lingkaran yang berpusat di z_0 dan dengan sebuah tetapan jari-jari ε positif (lihat Gambar 1.15). Ketika nilai ε dipahami



Gambar 1.15: Representasi $|z - z_0|$

dan bernilai abstrak dalam pembahasan ini, himpunan pada Persamaan 1.76 sering disebut hanya sebagai persekitaran. Terkadang akan lebih mudah menyebutnya sebagai sebuah *deleted neighborhood.* Sedangkan

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon \tag{1.77}$$

terdiri dari semua titik z di persekitaran ε dari z_0 kecuali untuk titik z_0 itu sendiri.

Sebuah titik z_0 dikatakan *titik interior* atau *titik-dalam* himpunan S jika ada beberapa persekitaran dari z_0 yang hanya memuat titik-titik dari S. Sedangkan sebuah titik z_0 disebut *titik eksterior* atau *titk-luar* S ketika ada suatu persekitaran dari z_0 yang tidak berisi titik-titik di

S. Jika titik z_0 tidak masuk dalam keduanya yaitu interior maupun eksterior, maka titik z_0 tersebut disebut titik batas (*boundary point*) S. Sebuah titik batas adalah sebuah titik yang semua persekitarannya memuat minimal satu titik di S dan minimal satu titik tidak berada di S. Keseluruhan dari semua titik batas disebut batas (*boundary*) dari S. Lingkaran $|z| = 1$, misalnya, adalah batas masing-masing himpunan

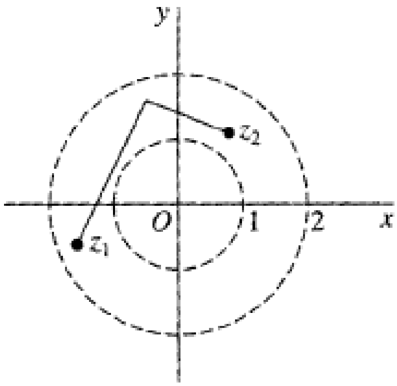
$$|z| < 1 \quad \text{dan} \quad |z| \leq 1 \tag{1.78}$$

Sebuah himpunan dikatakan *terbuka* jika himpunan tersebut tidak berisi satupun titik batas. Hal ini ditinggalkan sebagai latihan untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan terbuka jika dan hanya jika setiap titik adalah titik *interior*. Suatu himpunan dikatakan tertutup jika berisi semua titik-titik batas. *Closure* dari sebuah himpunan S, dinotasikan dengan $\overline{S}$, adalah himpunan tertutup yang terdiri atas semua titik di S bersama-sama dengan batas dari S. Perhatikan bahwa himpunan pertama pada Persamaan 1.78 adalah terbuka dan yang kedua adalah *closure*nya.

Terkadang beberapa himpunan bukan merupakan himpunan terbuka maupun tertutup. Untuk sebuah himpunan menjadi tidak terbuka, jika himpunan tersebut memuat titik batas dan jika himpunan tidak tertutup, maka ada titik batas yang tidak termuat dalam himpunan tersebut. Perhatikan bahwa cakram $0 < |z| \leq 1$ bukan merupakan himpunan terbuka maupun tertutup. Himpunan semua bilangan kompleks, di sisi lain, dapat dikatakan terbuka dan tertutup karena tidak memiliki titik-titik batas.

Sebuah himpunan terbuka S dikatakan terhubung (*connected*) jika setiap pasang titik z_1 dan z_2 dalam himpunan S dapat dihubungkan oleh garis poligon, yang terdiri dari sejumlah hingga segmen garis yang terhubung dari ujung ke ujung, yang terletak semuanya di S. Himpunan terbuka $|z| < 1$ adalah himpunan terhubung. Anulus $1 < |z| < 2$ adalah himpunan terbuka dan juga terhubung (lihat Gambar 1.16). Sebuah himpunan terbuka yang terhubung disebut domain. Perhatikan bahwa persekitaran apapun adalah domain. Sebuah domain dengan beberapa, tak satupun, atau semua dari titik batas disebut sebuah daerah (*region*).

Sebuah himpunan S dikatakan *terbatas* (*bounded*) jika ada bilangan real $R > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap titik S terletak dalam lingkaran $|z| = R$, jika tidak, himpunan tersebut dikatakan tak terbatas (*unbounded*). Kedua himpunan pada Persamaan 1.78 adalah



Gambar 1.16: Anulus Himpunan Terbuka dan Terhubung

daerah yang terbatas dan setengah bidang $Re(z) \geq 0$ adalah himpunan tak terbatas.

Sebuah titik z_0 dikatakan titik akumulasi atau titik limit dari himpunan S jika setiap *deleted neighborhood* dari z_0 setidaknya memuat satu titik dari S. Oleh karena itu jika suatu himpunan S tertutup, maka S memuat masing-masing titik akumulasinya. Jika titik akumulasi z_0 tidak berada di dalam S, maka z_0 menjadi titik batas S, tapi ini bertentangan dengan pernyataan bahwa suatu himpunan tertutup berisi semua titik-titik batasnya. Hal ini ditinggalkan sebagai latihan untuk menunjukkan bahwa kebalikan dari pernyataan di atas adalah benar. Dengan demikian, suatu himpunan tertutup jika dan hanya jika memuat semua titik-titik akumulasi.

Terbukti, sebuah titik z_0 bukan merupakan titik akumulasi dari himpunan S setiap kali ada beberapa *deleted neighborhood* dari z_0 yang tidak memuat sedikitnya satu titik dari S. Perhatikan bahwa titik asal merupakan satu-satunya titik akumulasi himpunan $z_n = i/n \quad (n = 1, 2, ...)$.

1.10 Rangkuman

1. Sifat-sifat bilangan penting kompleks.

   a. $|z| = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$.

b. $|\overline{z}| = |z|$.
c. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ dan $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
d. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
e. Jika $z \neq 0$ maka $Arg(\overline{z}) = -Arg(z)$.
f. $arg(z_1 \cdot z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$.

2. Kedudukan titik dalam himpunan bilangan kompleks.

   a. Titik $z_0 \in \mathbb{C}$ dikatakan *titik-dalam* (titik *interior*) himpunan S jika terdapat bilangan $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon \subset S$.
   b. Titik $z_0 \in \mathbb{C}$ dikatakan *titik-luar* (titik *eksterior*) himpunan S jika z_0 merupakan titik-dalam himpunan S^C.
   c. Titik $z_0 \in \mathbb{C}$ dikatakan *titik limit* himpunan S jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $z \in S$ dengan $z \neq z_0$ sehingga $z \in N_\varepsilon(z_0)$.

3. Himpunan di dalam himpunan bilangan kompleks.

   a. Himpunan $S \subset \mathbb{C}$ dikatakan *himpunan terbuka* jika setiap anggota S merupakan titik-dalam.
   b. Himpunan $S \subset \mathbb{C}$ dikatakan *himpunan tertutup* jika himpunan S^C terbuka.
   c. $\overline{S} = S \cup S'$.

1.11 Bahan Diskusi

Diskusikan permasalah-permasalahan berikut.

1. Sketsakan himpunan semua titik yang ditentukan dengan syarat

$$Re(\overline{z} - i) = 2.$$

2. Tunjukkan bahwa

$$|Re(2 + \overline{z} + z^3)| \leq 4, \qquad |z| \leq 1.$$

3. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} \cdots e^{i\theta_n} = e^{i\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n}.$$

4. Gunakan rumus de Moivre untuk membuktikan identitas trigonometri

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta.$$

1.12 Rujukan

1. Agarwal, R.P., Perera, K., dan Pinelas, S., 2011, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer Science+Business Media, London.

2. Brown, J. W, and Churchill, R. V., 2009, *Complex Variables and Applications*, 8th, McGraw-Hill Companies, Inc, New York.

3. Campuzano, J.C.P., 2016, *Complex Analysis Problems with Solutions*, Creative Commons Attribution, Queensland.

4. Murray R. Spiegel, 2009, *Schaum's Outlines: Complex Variables, Second Edition*, The McGraw-Hill Companies. Inc, New York.

1.13 Soal-soal Latihan

1. Gunakan dengan cara sekawan dan modulo pada Subbab 1.4 untuk membuktikannya

   (a) $\overline{\overline{z}+3i} = z - 3i$;

   (b) $\overline{iz} = -i\overline{z}$;

   (c) $\overline{(2+i)^2} = 3 - 4i$;

   (d) $|(2\overline{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$

2. Gambar grafik dari kondisi di bawah ini

   (a) $\mathrm{Re}(\overline{z}-1) = 2$;

   (b) $|2\overline{z}+i| = 4$

3. Selidik sekawannya dari Persamaan 1.38 dan 1.39 pada Subbab 1.4

4. Gunakan persamaan sekawan dari Persamaan 1.39 pada Subbab 1.4 untuk membuktikan

   (a) $\overline{z_1 z_2 z_3} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}\ \overline{z_3}$;

   (b) $\overline{z^4} = \overline{z}^4$.

5. Verifikasi sifat modulo dari Persamaan 1.44 pada Subbab 1.4

6. Dari hasil Subbab 1.4, jika z_2 dan z_3 adalah bilangan kompleks tak nol, buktikan bahwa

(a) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}\,\overline{z_3}}$;

(b) $\left|\frac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

7. Buktikan

$$|\text{Re}(2 + \overline{z} + z^3)| \leq 4 \qquad\qquad \text{jika } |z| \leq 1$$

8. Untuk memfaktorkan $z^4 - 4z^2 + 3$ kedalam faktor kuadrat dua, gunakan Pertidaksamaan 1.43, Subbab 1.3, kemudian buktikan bahwa jika z terletak pada lingkaran $|z| = 2$, maka

$$\left|\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leq \frac{1}{3}$$

9. Buktikan
   (a) z adalah real jika dan hanya jika $\overline{z} = z$;
   (b) z adalah bilangan real atau imajiner jika dan hanya jika $\overline{z}^2 = z^2$.

10. Gunakan induksi matematika untuk menunjukkan persamaan di bawah ini, ketika $n = 2, 3, \ldots$,
   (a) $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_n}$;
   (b) $\overline{z_1 z_2 \cdots z_3} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} \cdots \overline{z_n}$.

11. Misalkan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 1)$ menotasikan bilangan real, and misalkan pula bahwa z merupakan sembarang bilangan kompleks. dengan hasil yang ditunjukkan pada latihan No 10, buktikan bahwa

$$\overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{z^2} + \cdots + a_n \overline{z^n}.$$

12. Tunjukkan bahwa persamaan $|z - z_0| = R$ dari lingkaran, berpusat di z_0 dengan radius R, dapat dituliskan

$$|z|^2 - 2\text{Re}(z\overline{z_0}) + |z_0|^2 = R^2.$$

13. Dengan menggunakan Persamaan 1.41, untuk Re z dan Im z, tunjukkan bahwa hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$z^2 + \overline{z}^2 = 2.$$

14. Ikuti langkah-langkah untuk memberikan derivasi aljabar dari ketidaksamaan segitiga (Subbab 1.3)

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

    (a) Tunjukkan bahwa

    $$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) + z_2\overline{z_2}.$$

    (b) Tunjukkan mengapa

    $$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \le 2|z_1||z_2|.$$

    (c) Gunakan hasil pada bagian (a) dan (b) untuk mendapatkan pertidaksamaan

    $$|z_1 + z_2|^2 \le (|z_1| + |z_2|)^2.$$

    dan berikan alasan atas setiap langkah jawaban yang digunakan

15. Sketsakan bilangan-bilangan $z_1 + z_2$ dan $z_1 - z_2$ secara vektor

    (a) $z_1 = 2i, z_2 = \frac{2}{3} - i$;
    (b) $z_1 = (-\sqrt{3}, 1), z_2 = (\sqrt{3}, 0)$
    (c) $z_1 = (-3, 1), z_2 = (1, 4)$;
    (d) $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_1 - iy_1$

16. Tentukan $|z|$ untuk:

    (a) $z = \sqrt{2} + 3i$
    (b) $z = -5 - \sqrt{3}i$
    (c) $z = \cos x - i \sin x$

17. Tunjukkan bahwa $\sqrt{2}|z| \ge |Rez| + |Imz|$.
    Petunjuk : reduksi persamaan di atas sampai $(|x| - |y|)^2 \ge 0$.

18. Tentukan nilai argumen utama $Arg z$ ketika

    (a) $z = \frac{i}{-2-2i}$
    (b) $z = (\sqrt{3} - i)^6$

19. Tunjukkan bahwa

    (a) $|e^{i\theta}| = 1$
    (b) $|\overline{e^{i\theta}}| = e^{i\theta}$

20. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan:

$$e^{i\theta}e^{i\theta_2}...e^{i\theta n} = e\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n(n = 2, 3, ...)$$

21. Gunakan fakta bahwa modulus $|e^{i\theta} - 1|$ adalah jarak antara titik-titik $e^{i\theta}$ dan 1, berikan argumen geometris untuk menentukan nilai θ dalam interval $0 \leq \theta \leq \pi$ yang memenuhi persamaan $|e^{i\theta} - 1| = 2$.

22. Dengan menulis faktor-faktornya di sebelah kiri dalam bentuk eksponensial, lakukan operasi yang dibutuhkan, dan ubah kembali ke koordinat persegi panjang, kemudian tunjukkan bahwa

    (a) $i(1 - \sqrt{3i})(\sqrt{3} + i) = 2(1 + \sqrt{3i})$
    (b) $5i/(2 + i) = 1 + 2i$
    (c) $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$
    (d) $(1 + \sqrt{3i})^{-10} = 2^{-11}(-1 + \sqrt{3i})$

23. Tunjukkan bahwa jika $Re(z_1) > 0$ dan $Re(z_2) > 0$, maka

$$Arg(z_1z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2),$$

dengan menggunakan argument utama.

24. Misalkan z adalah bilangan kompleks tak nol dan n adalah bilangan bulat negatif $(n = -1, -2, ...)$. Juga $z = re^{i\theta}$ dan $m = -n = 1, 2, ...$. Gunakan persamaan

$$z^m = r^m e^{im\theta} \text{ dan } z^{-1} = (\tfrac{1}{r})e^{i(-\theta)},$$

untuk membuktikan bahwa $(z^m)^{-1} = (z^{-1})^m$ dan oleh sebab itu definisi $z^n = (z^{-1})^m$ dapat dituliskan dengan alternatif lain yaitu $z^n = (z^m)^{-1}$

25. Tunjukkan bahwa dua bilangan kompleks tak nol z_1 dan z_2 memiliki moduli yang sama jika dan hanya jika ada bilangan kompleks c_1 dan c_2 sedemikian hingga $z_1 = c_1 c_2$ dan $z_2 = c_1 \bar{c_2}$

    Tips: Sebagai catatan

$$exp\left(i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) exp\left(i\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = exp(i\theta_1)$$

    dan

$$exp\left(i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \overline{exp\left(i\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)} = exp(i\theta_1)$$

26. Gunakan Rumus de Moivre's untuk memperoleh identitas trigonometri dibawah ini:
    (a) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$
    (b) $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$
27. Carilah akar kuadrat dari $z = 2 + 2\sqrt{3}i$
28. Gambarkan himpunan berikut dan tentukan yang manakah yang merupakan suatu domain:
    (a) $|z - 2 + i| \leq 1$
    (b) $|2z + 3| > 4$
    (c) $Imz > 1$
    (d) $Imz = 1$
    (e) $0 \leq argz \leq \pi/4 \quad (z \neq 0)$
    (f) $|z - 4| \geq |z|$
29. Himpunan manakah pada soa1 No 28 yang bukan merupakan himpunan terbuka atau tertutup ?
30. Himpunan manakah pada soal No 28 yang terbatas ?
31. Pada soal, gambarkan klosur dari himpunan di bawah ini
    (a) $-\pi < argz < \pi \quad (z \neq 0)$
    (b) $|Rez| < |z|$
    (c) $Re(\frac{1}{z}) \leq \frac{1}{2}$
    (d) $Re(z)^2 > 0$

Bab 2

Fungsi Analitik

Pada bab ini kita akan mempelajari tentang fungsi variabel kompleks, nilai limitnya pada suatu titik tertentu, kekontinuannya, serta turunannya. Dalam bab ini juga akan diperkenalkan tentang fungsi analitik yang nantinya akan memberikan peranan yang penting dalam pembahasan bab-bab selanjutnya. Setelah mahasiswa membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah :

1. mampu berpikir secara kritis dan logis;
2. punya kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah-masalah yang relevan;
3. dapat bertanggungjawab dalam melaksanakan tugas;
4. bersifat jujur, etis, kreatif, dan mampu bekerjasama;
5. punya kemampuan dalam berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir mahasiswa yang diharapkan secara khusus adalah :

1. menjelaskan konsep yang berhubungan dengan limit, kekontinuan, dan turunan dari fungsi bilangan kompleks;
2. menganalisis dan membuktikan sifat-sifat yang berkaitan dengan limit, kekontinuan, dan turunan dari fungsi bilangan kompleks;

3. menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan konsep limit, kekontinuan, dan turunan dari fungsi bilangan kompleks;

4. menjelaskan konsep yang berhubungan dengan persamaan Cauchy-Riemann dan fungsi analitik;

5. menganalisa dan membuktikan sifat-sifat yang berkaitan dengan persamaan Cauchy-Riemann dan fungsi analitik;

6. menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan persamaan Cauchy-Riemann dan fungsi analitik;
   item menjelaskan konsep yang berhubungan dengan fungsi harmonik;

7. menganalisa dan membuktikan sifat-sifat yang berkaitan dengan fungsi harmonik;

8. menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan fungsi harmonik.

2.1 Fungsi Peubah Kompleks

Misalkan S adalah himpunan bilangan kompleks. Sebuah *fungsi* f yang didefinisikan pada S adalah suatu aturan yang diberikan ke setiap z di S ke bilangan kompleks w. Bilangan kompleks w disebut *nilai* f di z atau peta (*image*) dari z dan dilambangkan dengan $f(z)$, yaitu, $w = f(z)$. Himpunan S disebut *domain* dari f. Himpunan semua nilai f di S disebut sebagai daerah hasil (*range*).

Dalam hal ini, perlu ditekankan bahwa domain dan aturan tersebut diperlukan agar fungsi dapat didefinisikan dengan baik. Ketika domain tidak disebutkan, kita menganggap bahwa domain yang dimaksud adalah himpunan terbesar yang mungkin terjadi agar fungsi dapat terdefinisi dengan baik. Selain itu, tidak selalu nyaman menggunakan notasi yang membedakan antara fungsi yang diberikan dan nilai-nilainya.

Contoh 2.1. *Jika f didefinisikan pada himpunan $z \neq 0$ dengan aturan persamaan $w = \frac{1}{Z}$, maka hal ini mungkin hanya merujuk sebagai fungsi $w = \frac{1}{Z}$, atau hanya ditulis fungsi $\frac{1}{Z}$.*

■

Misalkan $w = u + iv$ adalah nilai dari fungsi f pada $z = x + iy$, sehingga

$$u + iv = f(x + iy)$$

Masing-masing dari bilangan real u dan v tergantung pada variabel real x dan y, dan karenanya $f(z)$ dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan fungsi bernilai real dari variabel real x dan y :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{2.1}$$

Jika koordinat yang digunakan bukan x dan y, melainkan koordinat polar, yaitu variabel r dan θ, maka

$$u + iv = f(re^{i\theta})$$

dimana $w = u + iv$ dan $z = re^{i\theta}$. Dalam hal ini, kita dapat menulis

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta) \tag{2.2}$$

Contoh 2.2. *Jika $f(z) = z^2$, maka*

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

sehingga

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad dan \quad v(x, y) = 2xy.$$

ketika koordinat polar yang digunakan, maka

$$f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta} = r^2 cos2\theta + ir^2 sin2\theta.$$

karena itu,

$$u(r, \theta) = r^2 cos2\theta \quad dan \quad v(r, \theta) = r^2 sin2\theta.$$

■

Jika pada salah satu dari Persamaan 2.1 dan 2.2, fungsi v selalu memiliki nilai nol, maka nilai f selalu bernilai real. Artinya, f adalah *fungsi bernilai real* dari variabel kompleks.

Contoh 2.3. *Sebuah fungsi bernilai real yang digunakan untuk menggambarkan beberapa konsep penting dalam bab ini adalah*

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + i0 = x^2 + y^2.$$

■

Jika n adalah nol atau bilangan bulat positif dan jika $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ adalah konstanta kompleks, dimana $a_n \neq 0$, maka fungsi

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

adalah *polinomial* berderajat n. Perhatikan bahwa penjumlahan dalam fungsi polinomial tersebut memiliki banyak suku yang berhingga dan domainnya adalah seluruh bidang z. Pecahan $\frac{P(z)}{Q(z)}$ dari polinomial disebut *fungsi rasional* dan terdefinisi di setiap titik z asalkan $Q(z) \neq 0$. Fungsi polinomial dan fungsi rasional merupakan hal dasar, namun penting, karena merupakan fungsi variabel kompleks yang sering dijumpai.

Sebuah generalisasi dari konsep fungsi adalah aturan yang memberikan lebih dari satu nilai ke titik z dalam domain yang didefinisikan. Generalisasi ini selanjutnya disebut sebagai fungsi bernilai ganda (*multiple-valued function*). *Fungsi-fungsi bernilai ganda* terjadi pada teori fungsi variabel kompleks, diturunkan dari kasus variabel real. Ketika fungsi bernilai ganda dipelajari, biasanya yang diambil hanyalah salah satu nilai yang mungkin, dan fungsi (bernilai tunggal) dibangun dari fungsi bernilai ganda tersebut.

Contoh 2.4. *Misalkan z menotasikan sembarang bilangan kompleks tak nol. Berdasarkan subbab sebelumnya (pada akar bilangan kompleks), kita tahu bahwa $z^{\frac{1}{2}}$ memiliki dua nilai, yaitu*

$$z^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{r}\ exp\left(i\frac{\Theta}{2}\right),$$

di mana $r = |z|$ dan Θ $(-\pi<\Theta<\pi)$ adalah nilai utama dari $arg(z)$. Tapi, jika kita memilih hanya nilai positif dari $\pm\sqrt{r}$ dan menulis fungsi tersebut dalam bentuk

$$f(z) = \sqrt{r}\ exp\left(i\frac{\Theta}{2}\right) \qquad (r>0, \Theta(-\pi<\Theta<\pi)), \qquad (2.3)$$

Fungsi bernilai tunggal pada Persamaan 2.3 didefinisikan dengan baik pada himpunan bilangan kompleks tak nol di bidang z. Karena nol adalah satu-satunya akar kuadrat dari nol, kita juga dapat menulis $f(0) = 0$. Dalam hal ini, fungsi f terdefinisi dengan baik pada seluruh bidang kompleks.

■

2.2 Limit Fungsi

Misalkan suatu fungsi f didefinisikan pada semua titik z di beberapa *deleted neighborhood* z_0. Pernyataan bahwa limit dari $f(z)$ sama dengan w_0 ketika z mendekati z_0, atau ditulis

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{2.4}$$

berarti bahwa titik $w = f(z)$ akan dekat ke bilangan kompleks w_0 ketika kita memilih titik z cukup dekat ke z_0 tetapi berbeda dari titik tersebut. Pengertian tersebut merupakan definisi informal dari $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Selanjutnya, kita akan menunjukkan definisi limit dalam bentuk dan penggunaan yang tepat

Pernyataan 2.4 berarti bahwa, untuk setiap bilangan positif ε, ada bilangan positif δ (yang nilainya bergantung pada ε) sedemikian sehingga

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \qquad \text{untuk setiap} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{2.5}$$

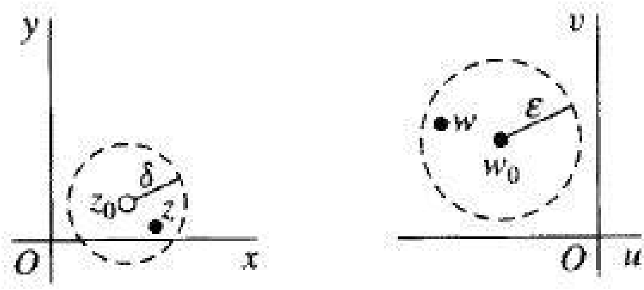
Secara geometris, definisi ini mengatakan bahwa untuk setiap persekitaran ε, $|f(z) - w_0| < \varepsilon$, dari w_0, ada *deleted neighborhood* δ, $0 < |z - z_0| < \delta$, dari z_0 sedemikian sehingga untuk setiap titik z di persekitaran tersebut memiliki sebuah peta $f(z)$ yang berada di persekitaran ε (lihat Gambar 2.1). Perhatikan bahwa meskipun semua titik pada *deleted neighborhood* $0 < |z - z_0| < \delta$ perlu dipertimbangkan, peta dari semua titik tersebut tidak perlu memenuhi semua persekitaran $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. Jika f memiliki nilai konstan w_0, misalnya, peta dari z selalu berada pada pusat persekitaran tersebut. Perhatikan juga, bahwa setelah δ ditemukan, nilai tersebut dapat digantikan oleh sembarang bilangan positif yang lebih kecil, seperti $\frac{\delta}{2}$.

Berikut merupakan penegasan bahwa limit suatu fungsi kompleks juga bernilai tunggal, layaknya nilai limit fungsi pada bilangan real.

Teorema 2.5. Jika limit suatu fungsi $f(z)$ ada di titik z_0, maka nilai limitnya tunggal

Bukti: Teorema ini akan kita buktikan dengan pembuktian kontradiksi. Andaikan bahwa limitnya tidak tunggal, maka sedikitnya ada dua bilangan kompleks w_0 dan w_1 sedemikian sehingga

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \qquad \text{dan} \qquad \lim_{z \to z_0} f(z) = w_1$$



Gambar 2.1: Persekitaran z_0 dan w_0

Sehingga, berdasarkan definisi limit pada Persamaan 2.5, untuk setiap bilangan positif ε, ada bilangan positif δ_0 dan δ_1 sedemikian sehingga

$$|f(z) - w_0 < \varepsilon \text{ dimana } 0 < |z - z_0| < \delta_0$$

dan

$$|f(z) - w_1 < \varepsilon \text{ dimana } 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

Jadi, jika $0 < |z - z_0| < \delta_1$, dimana δ adalah sembarang bilangan positif yang lebih kecil dari δ_0 dan δ_1, kita dapatkan bahwa,

$$\begin{aligned} |w_1 - w_0| &= |[f(z) - w_0] - [f(z) - w_0]| \\ &\leq |[f(z) - w_0]| + |f(z) - w_1| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

Tetapi, $|w_1 - w_0|$ adalah bilangan nonnegatif dan ε dapat kita pilih sekecil mungkin. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa

$$w_1 - w_0 = 0 \qquad \text{atau} \qquad w_1 = w_0$$

Ini kontradiksi dengan asumsi awal bahwa nilai limitnya tidak tunggal. ■

Definisi limit pada Persamaan 2.5 mengharuskan f agar terdefinisi pada beberapa *deleted neighborhood* dari z_0. *Deleted neighborhood* tersebut tentunya ada saat z_0 merupakan titik interior dari daerah dimana f didefinisikan. Kita dapat memperluas definisi limit untuk kasus-kasus dimana z_0 merupakan titik batas dari daerah dengan syarat bahwa Persamaan 2.5 harus dipenuhi terlebih dahulu oleh titik z yang terletak pada daerah dan *Deleted neighborhood.*

Contoh 2.6. Tunjukkan bahwa jika $f(z) = \frac{iz}{2}$ di dalam cakram terbuka $|z| < 1$, maka

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \frac{i}{2} \tag{2.6}$$

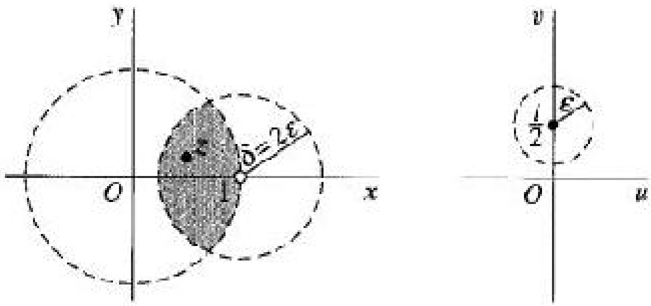
Jawab: Dalam hal ini, titik 1 merupakan titik batas pada batas domain yang didefinisikan di f. Perhatikan bahwa, pada saat z berada pada cakram $|z| < 1$,

$$|f(z) - \frac{i}{2}| = |\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}| = |\frac{z-1}{2}|$$

Oleh karena itu, untuk sembarang z dan setiap bilangan positif ε (lihat Gambar 2.2)

$$|f(z) - \frac{i}{z}| < \varepsilon \qquad \text{dimana} \qquad 0 < |z - 1| < 2\varepsilon$$

Dengan demikian, kondisi sesuai Persamaan 2.5 terpenuhi oleh titik-titik pada daerah $|z| < 1$ ketika δ sama dengan 2ε atau sembarang bilangan positif yang lebih kecil. ■



Gambar 2.2: Irisan himpunan terbuka

Jika limit pada Persamaan 2.4 ada, maka simbol $z \to z_0$ mengakibatkan bahwa z harus bisa mendekati z_0 dari arah mana saja, tidak hanya dari arah tertentu. Contoh berikut menekankan hal ini, yaitu manakala nilai limit dari pendekatan dua arah yang berbeda menghasilkan nilai yang berbeda.

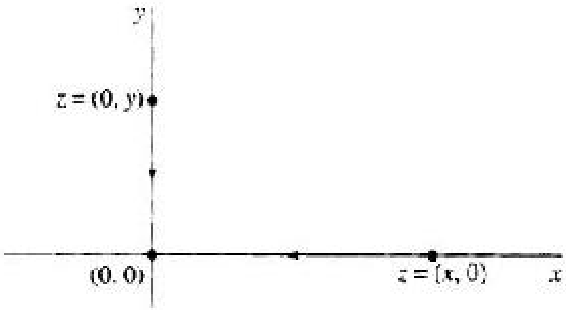
Contoh 2.7. Jika $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$, tentukan apakah $\lim_{z \to 0} f(z)$ ada atau tidak!

Jawab: Jika limitnya ada, maka limitnya bisa ditemukan dengan memisalkan titik $z = (x, y)$ mendekati titik asal dengan cara apapun. Tapi ketika $z = (x, 0)$ adalah titik tak nol pada sumbu real (lihat Gambar 2.3),

$$f(z) = \frac{x + i0}{x - i0} = 1$$

Dan apabila $z = (0, y)$ adalah titik tak nol pada sumbu imajiner,

$$f(z) = \frac{0 + iy}{0 - iy} = -1$$



Gambar 2.3: Ilustrasi $z = (x, 0)$ dan $z = (0, y)$ mendekati titik asal

Dengan demikian, dengan membiarkan z mendekati titik asal sepanjang sumbu real, kita akan menemukan bahwa limit yang diinginkan adalah 1. Pendekatan sepanjang sumbu imajiner pada sisi lain, menghasilkan limit -1. Karena nilai limit tunggal (berdasarkan Teorema 2.5), maka dapat kita simpulkan bahwa $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ tidak ada. ■

Definisi pada Persamaan 2.5 pada dasarnya hanya menyediakan cara untuk menguji bahwa titik w_0 merupakan sebuah limit. Persamaan tersebut tidak secara langsung memberikan metode bagaimana cara untuk menentukan limit. Teorema-teorema limit, yang akan dibahas pada bagian selanjutnya, akan memungkinkan kita untuk menemukan nilai dari suatu limit fungsi.

2.3 Teorema-teorema Limit

Pada dasarnya, teorema-teorema limit yang akan kita pelajari hampir sama dengan teorema-teorema limit di fungsi bilangan real. Beberapa teorema diperoleh dengan menghubungkan antara limit-limit dari fungsi-fungsi bilangan kompleks dan limit-limit dari fungsi bernilai real dari fungsi dua variabel real. Karena limit-limit pada tipe yang sebelumnya telah dipelajari dalam kalkulus,kita dapat menggunakan definisi tersebut dan sifat-sifatnya secara bebas.

Teorema 2.8. *Misalkan bahwa*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z_0 = x_0 + iy_0 \quad \textit{dan} \quad w_0 = u_0 + iv_0$$

Maka

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{2.7}$$

Jika dan hanya jika

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \ \textit{dan} \ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \tag{2.8}$$

Bukti: Untuk membuktikan teorema ini, pertama asumsikan bahwa limit pada Persamaan 2.8 benar dan akan dibuktikan limit pada Persamaan 2.7. Limit pada Persamaan 2.8 memberikan informasi kepada kita bahwa untuk setiap ε positif terdapat bilangan positif δ_1 dan δ_2 sehingga,

$$|u - u_0| < \frac{\varepsilon}{2} \ \textit{dimana} \ 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1 \tag{2.9}$$

dan

$$|v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} \ \textit{dimana} \ 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_2 \tag{2.10}$$

Misalkan bahwa δ adalah bilangan yang paling kecil dari dua bilangan δ_1 dan δ_2. Karena

$$|(u+iv) - (u_0 + iv_0)| = |(u-u_0) - i(v-v_0)| \leqslant |u-u_0| - |v-v_0|$$

dan

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = |(x-x_0) - i(y-y_0)| = |(x+iy) - (x_0+iy_0)|$$

Dari Persamaan 2.9 dan 2.10 diperoleh

$$|(u+iv)-(u_0+iv_0)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

dimana

$$0 < |(x+iy)-(x_0+iy_0)| < \delta$$

Jadi, limit pada 2.7 benar.

Selanjutnya, misalkan kita asumsikan bahwa limit 2.7 benar, akan kita buktikan bahwa limit pada Persamaan 2.8 juga benar. Dengan asumsi bahwa limit 2.7 benar, maka untuk setiap bilangan ε positif, terdapat bilangan positif δ sedemikian sehingga

$$|(u+iv)-(u_0+iv_0)| < \varepsilon \tag{2.11}$$

dimana

$$0 < |(x+iy)-(x_0+iy_0)| < \delta. \tag{2.12}$$

Tetapi

$$|u-u_0| \leqslant |(u-u_0)-i(v-v_0)| = |(u+iv)-(u_0+iv_0)|,$$

$$|v-v_0| \leqslant |(u-u_0)-i(v-v_0)| = |(u+iv)-(u_0+iv_0)|,$$

dan

$$|(x+iy)-(x_0+iy_0)| = |(x-x_0)+i(y-y_0)| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Sehingga, berdasarkan Persamaan 2.11 dan 2.12, diperoleh

$$|u-u_0| < \varepsilon \ \ dan \ \ |v-v_0| < \varepsilon$$

asalkan

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

Ini menunjukkan bahwa limit 2.8 telah dibuktikan, dan bukti teorema telah lengkap. ■

Teorema 2.9. *Misalkan bahwa*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \ \ dan \ \ \lim_{z\to z_0} F(z) = W_0 \tag{2.13}$$

maka

$$\lim_{z\to z_0} [f(z)+F(z)] = w_0 + W_0 \tag{2.14}$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z)F(z)] = w_0 W_0 \tag{2.15}$$

dan, jika $W_0 \neq 0$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0} \tag{2.16}$$

Teorema ini dapat dibuktikan secara langsung dengan menggunakan definisi limit dari fungsi variabel kompleks. Tetapi dengan bantuan Teorema 2.8, pembuktian akan menjadi lebih mudah.

Sebagai contoh, untuk membuktikan sifat pada Persamaan 2.15, terlebih dahulu, dapat kita tulis

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad F(z) = U(x,y) + iV(x,y),$$

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad w_0 = u_0 + iv_0, \quad W_0 = U_0 + iV_0.$$

Maka berdasarkan hipotesis Persamaan 2.13 limit (x,y) mendekati (x_0,y_0) dari fungsi u, v, U, dan V ada dan mempunyai nilai limit u_0, v_0, U_0, dan V_0 berturut-turut. Jadi komponen real dan imajiner yang diperoleh dari hasil perkaliannya

$$f(z)F(z) = (uU – vV) + i(vU + uV)$$

mempunyai limit $u_0U_0 – v_0V_0$ dan $v_0U_0 + u_0V_0$, secara berturut-turut, pada saat (x,y) mendekati (x_0,y_0). Sehingga, berdasarkan Teorema 2.8, $f(z)F(z)$ mempunyai limit

$$(u_0U_0 – v_0V_0) + i(v_0U_0 + u_0V_0)$$

Pada saat z mendekati z_0; dan ini sama dengan w_0W_0. Dalam hal ini, sifat pada Persamaan 2.15 telah dibuktikan. Dengan cara yang sama kita juga dapat memverivikasi sifat pada Persamaan 2.14 dan 2.16.
Bukti Sifat pada Persamaan 2.14:
Misalkan bahwa:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

dan

$$z_0 = x_0 + iy_0,\ w_0 = u_0 + iv_0,\ \text{dan } W_0 = U_0 + iV_0$$

Berdasarkan hipotesis pada Persamaan 2.13 limit (x,y) menuju (x_0,y_0) dari fungsi u, v, U, dan V ada dan mempunyai limit masing-masing secara berturut-turut yakni u_0, v_0, U_0, V_0. Jadi dapat diperoleh

bagian real dan imajiner dari penjumlahan $f(z) + F(z) = (u + U) + i(v + V)$, mempunyai limit $(u_0 + U_0) + i(v_0 + V_0)$, pada saat (x, y) mendekati (x_0, y_0). Dengan menggunakan Teorema 2.8, $f(z) + F(z)$ mempunyai limit $(u_0 + U_0) + i(v_0 + V_0)$ pada saat z mendekati z_0, dan ini sama dengan $w_0 + W_0$.
Bukti Sifat pada Persamaan 2.16:
Misalkan bahwa:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

dan

$$z_0 = x_0 + iy_0,\ w_0 = u_0 + iv_0,\ \text{dan } W_0 = U_0 + iV_0$$

Dengan cara serupa dapat diperoleh bagian real dan imajiner dari pembagian $\dfrac{f(z)}{F(z)} = \dfrac{u + iv}{U + iV}$, mempunyai limit $\dfrac{(u_0 + iv_0)}{(U_0 + iV_0)}$, pada saat (x, y) mendekati (x_0, y_0). Dengan menggunakan Teorema 2.8, $\dfrac{f(z)}{F(z)}$ mempunyai limit pada saat z mendekati z_0, dan limit ini sama dengan $\dfrac{w_0}{W_0}$.

Dengan menggunakan definisi pada Persamaan 2.5, maka dapat kita buktikan bahwa

$$\lim_{z \to z_0} c = c \quad dan \quad \lim_{z \to z_0} z = z_0,$$

dimana z_0 dan c_0 adalah sembarang bilangan kompleks, dan berdasarkan sifat pada Persamaan 2.15 dan induksi matematika, diperoleh

$$\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Juga, berdasarkan sifat pada Persamaan 2.14 dan 2.15, limit dari suatu polinomial

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_n z^n$$

saat z mendekati z_0 adalah nilai dari polinom dititik z_0, yakni:

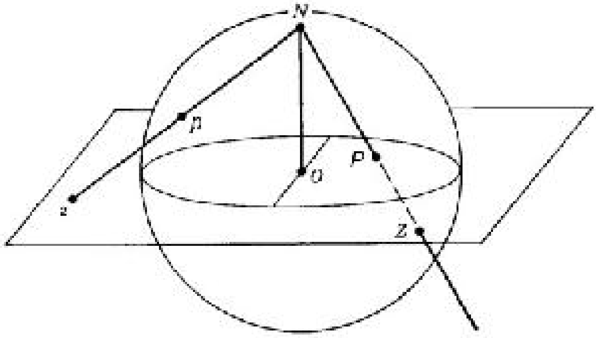
$$\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0).$$

2.4 Limit di Ketakhinggaan

Pada bilangan real, simbol ∞ merujuk pada bilangan real positif yang sangat besar sekali dan simbol $-\infty$ merujuk pada bilangan real negatif yang sangat kecil sekali. Bagaimanakah konsep ∞ pada bilangan kompleks? Tentunya agak berbeda dengan konsep pada bilangan real, karena pada bilangan kompleks suatu bilangan kompleks tidak dapat dikatakan lebih besar atau lebih kecil dari bilangan kompleks lainnya. Pada bilangan kompleks, simbol ∞ mengacu kepada bilangan kompleks yang modulusnya ∞, ini berarti bahwa ada banyak bilangan kompleks yang mengacu pada simbol tersebut. Secara geometris, titik tak hingga dan bidang kompleks disebut bidang kompleks yang diperluas (*extended complex plane*). Bidang kompleks yang diperluas ini merepresentasikan bilangan kompleks yang diperluas (*extended complex numbers*), yaitu bilangan kompleks dan ∞. Untuk memvisualisasi titik di ketakhinggaan, kita dapat membayangkan bidang kompleks yang memotong suatu bola dengan jari-jari 1 satuan unit dengan pusat titik asal pada bagian tengahnya (lihat Gambar 2.4). Setiap titik z di bidang kompleks berkorespondensi dengan tepat satu titik P pada permukaan bola. Titik P adalah titik interseksi dimana suatu garis ditarik dari titik z ke kutub utara N. Dengan cara yang sama, setiap titik P pada permukaan bola, selain kutub utara N, berkorespondensi dengan tepat satu titik z di bidang. Dengan memisalkan titik N dari bola berkorespondensi dengan titik tak hingga, kita dapatkan suatu korespondensi satu-satu antara titik-titik pada bola dan titik-titik pada bidang kompleks perluasan. Bola tersebut dikenal sebagai bola Riemann (*Riemann sphere*), dan korespondensinya disebut proyeksi stereografik.

Perhatikan bahwa, bagian luar dari lingkaran satuan yang berpusat pada titik asal bidang kompleks berkorespondensi dengan belahan bola bagian atas kecuali titik N. Sebagai tambahan, untuk setiap bilangan positif ε yang sangat kecil, titik-titik pada bidang kompleks bagian luar di lingkaran $|z| = \dfrac{1}{\varepsilon}$ berkorespondensi dengan titik-titik pada bola dekat ke N. Kita sebut himpunan $|z| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ sebagai persekitaran ε atau persekitaran dari ∞.

Perlu disepakati bahwa, ketika kita merujuk pada titik z, kita artikan bahwa titik tersebut berada di bidang hingga. Selanjutnya, jika



Gambar 2.4: Proyeksi stereografik pada *Riemann sphere*

kita akan menyebut titik di ketakhinggaan, maka akan dituliskan secara khusus.

Selanjutnya, kita akan membahas pernyataan

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

ketika salah satunya, yaitu z_0 atau w_0, atau mungkin keduanya diganti dengan titik takhingga. Dalam definisi limit pada Subbab 2.2, kita tinggal mengganti persekitaran dari z_0 dan w_0 dengan persekitaran dari ∞. Pembuktian dari teorema berikut akan menjelaskan bagaimana proses tersebut terjadi.

Teorema 2.10. Jika z_0 dan w_0 adalah titik di bidang z dan w, maka

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad \text{jika dan hanya jika} \quad \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0 \tag{2.17}$$

dan

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0 \quad \text{jika dan hanya jika} \quad \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0 \tag{2.18}$$

selain itu

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \quad \text{jika dan hanya jika} \quad \lim_{z \to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0 \tag{2.19}$$

Bukti: Kita mulai pembuktian dengan menunjukkan bahwa $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$ dari Persamaan 2.17. Ekspresi $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ menunjukkan bahwa untuk setiap bilangan positif ε, ada bilangan positif δ sedemikian sehingga

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{dimana} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \tag{2.20}$$

Dalam hal ini, titik $w = f(z)$ terletak dalam persekitaran ε dimana $|w| > 1/\varepsilon$ asalkan z terletak dalam *deleted neighborhood* $0 < |z - z_0| < \delta$ dari z_0. Karena itu, Persamaan 2.20 dapat ditulis

$$\left| \frac{1}{f(z)} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{dimana} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

sehingga terbukti bahwa $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Pembuktian untuk arah sebaliknya, diserahkan kepada pembaca.

Selanjutnya kita beralih ke pembuktian Persamaan 2.18. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$. Ekspresi $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$ dari persamaan tersebut menunjukkan bahwa untuk setiap bilangan positif ε, ada bilangan positif δ sedemikian sehingga

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{dimana} \quad |z| > \frac{1}{\delta}. \tag{2.21}$$

Dengan mengganti z dengan $1/z$ dalam Persamaan 2.21 dan kemudian menulis hasilnya sebagai

$$\left| f(\frac{1}{z}) - w_0 \right| < \varepsilon \quad \text{dimana} \quad 0 < |z - 0| < \delta$$

sehingga terbukti bahwa $\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$. maka $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Pembuktian untuk arah sebaliknya, diserahkan kepada pembaca.

Terakhir adalah pembuktian Persamaan 2.19. Akan dibuktikan bahwa $\lim_{z \to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$. Limit pertama dari Persamaan 2.19, yaitu $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$, harus ditafsirkan bahwa untuk setiap bilangan positif ε, ada bilangan positif δ sedemikian sehingga

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{dimana} \quad |z| > \frac{1}{\delta}. \tag{2.22}$$

Jika z digantikan oleh l/z, persamaan ini dapat ditulis ke dalam bentuk

$$\left| f(\frac{1}{f(1/z)}) - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{dimana} \quad 0 < |z - 0| < \delta$$

maka terbukti bahwa $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{f(1/z)} = 0$. Pembuktian untuk arah sebaliknya, diserahkan kepada pembaca. ∎

Contoh 2.11. *Perhatikan bahwa*

$$\lim_{z\to -1} \frac{iz+3}{z+1} = \infty \quad \textit{karena} \quad \lim_{z\to -1} \frac{z+1}{iz+3} = 0$$

$$\lim_{z\to \infty} \frac{2z+i}{z+1} = 2 \quad \textit{karena} \quad \lim_{z\to 0} \frac{(2/z)+i}{(1/z)+1} = \lim_{z\to 0} \frac{2+iz}{1+z} = 2$$

sehingga,

$$\lim_{z\to \infty} \frac{2z^3-1}{z^2+1} = \infty \quad \textit{karena} \quad \lim_{z\to 0} \frac{(1/z^2)+1}{(2/z^3)-1} = \lim_{z\to 0} \frac{z+z^3}{2-z^3} = 0.$$

∎

2.5 Kekontinuan Fungsi

Sama halnya dengan kekontinuan fungsi pada fungsi real, pada fungsi kompleks, suatu fungsi f dikatakan kontinu di titik z_0 jika memenuhi ketiga syarat berikut:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \quad \text{ada}, \tag{2.23}$$

$$f(z_0) \quad \text{ada}, \tag{2.24}$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{2.25}$$

Pernyataan pada Persamaan 2.25 jelas memuat pernyataan pada Persamaan 2.23 dan 2.24, karena secara implisit keberadaan nilai dari setiap sisi adalah sama. Pernyataan pada Persamaan 2.25 mengatakan bahwa, untuk setiap bilangan ε positif, terdapat suatu bilangan positif δ sedemikian sehingga

$$|f(z) - f(z_0) < \varepsilon \quad \text{asalkan } |z - z_0| < \delta. \tag{2.26}$$

Suatu fungsi dari variabel kompleks dikatakan *kontinu* dalam daerah R jika fungsi tersebut kontinu di setiap titik dalam R.

Jika dua fungsi f, g adalah kontinu di suatu titik, maka $f+g$ dan

$f.g$ juga kontinu di suatu titik; demikian juga f/g kontinu di suatu titik asalkan g tidak nol. Hal ini merupakan akibat dari Teorema 2.9. Selain itu, fungsi polinomial juga kontinu pada semua bidang kompleks berdasarkan Persamaan 2.3.

Selanjutnya kita beralih pada dua sifat dari fungsi kontinu yang pembuktiannya tidak langsung kita bahas pembuktian kami tergantung pada Definisi 2.26 kontinuitas dan menghasilkan teorema, yaitu:

Teorema 2.12. *Hasil komposisi dari fungsi-fungsi yang kontinu adalah kontinu.*

Bukti: Pembuktian dari teorema ini adalah sebagai berikut. Misalkan bahwa $w = f(z)$ merupakan fungsi yang didefinisikan untuk semua z pada persekitaran z_0, yaitu $|z - z_0| < \delta$, dan misalkan pula bahwa $W = g(w)$ merupakan fungsi yang domainnya memuat peta dari persekitaran f. Komposisi fungsi $W = g[f(z)]$ selanjutnya dapat didefinisikan untuk semua z pada persekitaran $|z - z_0| < \delta$. Misalkan bahwa f kontinu pada z_0 dan g kontinu pada titik $f(z_0)$ pada bidang w. Jika kita lihat kekontinuan g pada $f(z_0)$, ini berarti bahwa untuk setiap bilangan positif ε akan ada bilangan positif γ sedemikian sehingga

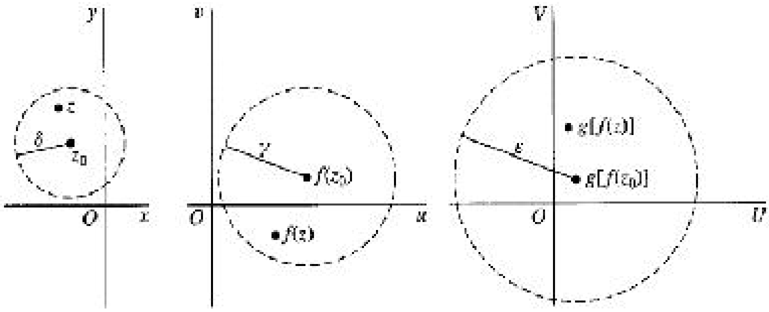
$$|g[f(z)] - g[f(z_0)]| < \varepsilon \quad dimana \quad |f(z) - f(z_0)| < \gamma$$

(Lihat Gambar 2.5). Akan tetapi kekontinuan f pada z_0 memastikan bahwa persekitaran $|z - z_0| < \delta$ bisa dibuat sekecil mungkin sehingga pertidaksamaan di atas dapat terpenuhi. Dengan begitu kekontinuan dari komposisi $g[f(z)]$ dapat terbukti. ∎

Teorema 2.13. *Jika sebuah fungsi $f(z)$ kontinu dan tidak bernilai nol di titik z_0, maka $f(z) \neq 0$ di beberapa persekitaran z_0.*

Bukti: Asumsikan bahwa $f(z)$ ada, kontinu dan tidak bernilai nol pada z_0, kita dapat membuktikan Teorema 2.13 dengan menentukan nilai positif $\dfrac{|f(z_0|}{2}$ untuk ε dalam Pernyataan 2.26. Ini dapat memberitahu kita bahwa terdapat sebuah bilangan positif δ sedemikian sehingga

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{|f(z_0|}{2} \quad jika \quad |z - z_0| < \delta.$$



Gambar 2.5: Pemetaan fungsi kontinu

Jadi, jika diandaikan ada titik z pada persekitaran $|z - z_0| < \delta$ yang memenuhi $f(z) = 0$, maka kita mendapatkan sebuah kontradiksi

$$|f(z_0)| < \frac{|f(z_0|}{2};$$

dan teorema terbukti. ■

Kekontinuan suatu fungsi

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.27}$$

berhubungan dengan kekontinuan dari komponennya yaitu fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$. Sebagai catatan, berdasarkan Teorema 2.8 dapat dikatakan bahwa *fungsi pada Persamaan 2.27 kontinu di titik* $z_0 = (x_0, y_0)$ *jika dan hanya jika fungsi komponennya kontinu disana.* Pembuktian pada teorema berikutnya menggambarkan penggunaan pernyataan ini. Teorema ini sangat penting dan akan sering digunakan dalam bab-bab selanjutnya, terutama dalam aplikasi. Sebelum menyatakan teorema, kita ingat kembali dari Subbab 1.9 bahwa daerah R tertutup jika memuat semua titik batas dan dikatakan terbatas jika R terletak di dalam lingkaran yang berpusat di titik asal.

Teorema 2.14. *Jika fungsi f kontinu di seluruh daerah R yang bersifat tertutup dan terbatas, maka terdapat bilangan real non negatif M sedemikian sehingga*

$$|f(z)| \leq M \quad \textit{untuk semua titik } z \textit{ di dalam } R \tag{2.28}$$

dimana tanda sama dengannya berlaku untuk setidaknya satu bilangan kompleks z.

Bukti: Untuk membuktikan teorema ini, kita asumsikan bahwa fungsi f pada persamaan 2.27 kontinu dan akibatnya fungsi

$$\sqrt{|u(x,y)|^2 + |v(x,y)|^2}$$

juga kontinu pada R dan menjangkau nilai maksimum M di R. Dengan demikian, Pertidaksamaan 2.28 terbukti dan dapat kita katakan bahwa f terbatas pada R ■

2.6 Turunan Fungsi

Misalkan f adalah fungsi dimana domainnya memuat sebuah persekitaran titik z_0, yaitu $|z - z_0| < \varepsilon$. Turunan dari fungsi f pada z_0, ditulis $f'(z_0)$ didefinisikan sebagai berikut

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{2.29}$$

Fungsi f dikatakan dapat diturunkan (*differentiable)* pada z_0 ketika turunan pada (z_0) ada ($f'(z_0)$ ada).

Dengan menyatakan variabel z pada definisi 2.29 dalam bentuk variabel komplek yang baru, yaitu

$$\Delta z = z - z_0 \qquad \textit{dengan} \qquad z \neq z_0$$

Kita dapat menuliskan definisi tersebut sebagai

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{2.30}$$

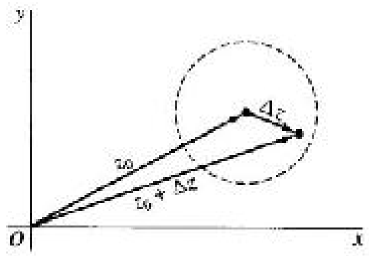
Ingat bahwa karena f didefinisikan sepanjang persekitaran dari z_0, maka bilangan kompleks $f(z_0 + \Delta z)$ selalu dapat didefinisikan untuk $|\Delta z|$ yang cukup kecil (lihat Gambar 2.6).

Ketika mengambil bentuk pada Persamaan 2.30 sebagai definisi turunan, kita sering menghilangkan subskrip 0 pada z_0 dan mengenalkan

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$$

yang menotasikan perubahan nilai dari $w = f(z)$ dan f yang berkorespondensi dengan perubahan Δz pada titik dimana f dievaluasi. Sehingga, jika kita menulis dw/dz untuk $f'(z)$ maka Persamaan 2.30 menjadi

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{2.31}$$



Gambar 2.6: Ilustrasi turunan fungsi

Contoh 2.15. *Gunakan definisi pada Persamaan 2.31 untuk mencari turunan dari fungsi $f(z) = z^2$ pada sembarang titik z*

Jawab: Misalkan bahwa $f(z) = z^2$, maka berdasarkan Persamaan 2.31, turunan fungsi f di sembarang titik z adalah

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} (2z - \Delta z) = 2z$$

Karena $2z + \Delta z$ adalah fungsi polinomial di Δz. Karena itu, $dw/dz = 2z$, atau $f'(z) = 2z$ ■

Contoh 2.16. *Misalkan bahwa $f(z) = \overline{z}$, tunjukkan bahwa $f'(z)$ tidak ada untuk sembarang bilangan kompleks z*

Jawab: Misalkan bahwa $f(z) = \overline{z}$, maka

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\overline{z + \Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{z} + \overline{\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \tag{2.32}$$

Jika limit $\Delta w/\Delta z$ ada, maka limit tersebut dapat diperoleh dengan membiarkan titik $\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$ mendekati titik asal $(0, 0)$ pada bidang Δz dalam arah manapun. Secara khusus, jika Δz mendekati titik $(0, 0)$ secara horizontal melalui titik $(\Delta x, 0)$ pada sumbu real, maka diperoleh

$$\overline{\Delta z} = \overline{\Delta x + i0} = \Delta x - i0 = \Delta z$$

Dengan demikian, dari Persamaan 2.32 diperoleh

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1$$

Jika limit $\Delta w/\Delta z$ ada, maka nilai limitnya adalah 1. Selanjutnya, ketika Δz mendekati titik $(0,0)$ secara vertikal melalui titik $(0,\Delta y)$ pada sumbu imajiner, diperoleh

$$\overline{\Delta z} = \overline{0 + i\Delta y} = 0 - i\Delta y = -(0 + i\Delta y) = -\Delta z$$

Dengan demikian, dari Persamaan 2.32 diperoleh

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{-\Delta z}{\Delta z} = -1$$

Berdasarkan persamaan di atas, Jika limit $\Delta w/\Delta z$ ada, maka nilai limitnya adalah -1. Berdasarkan Teorema 2.5, limit dari $\Delta w/\Delta z$ haruslah bernilai tunggal. Namun, dari dua fakta di atas, jelas bahwa limit $\Delta w/\Delta z$ tidak bernilai tunggal. Dengan demikian dapat kita simpulkan bahwa $f'(z)$ tidak ada untuk sembarang bilangan kompleks z.
■

Contoh 2.17. *Misalkan bahwa $f(z) = |z|^2$, tunjukkan bahwa $f'(z)$ tidak ada untuk sembarang bilangan kompleks z*

Jawab: Misalkan bahwa f adalah fungsi $f(z) = |z|^2$, maka diperoleh

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \tag{2.33}$$

Jika limit $\Delta w/\Delta z$ ada, maka limit tersebut dapat diperoleh dengan membiarkan titik $\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$ mendekati titik asal $(0,0)$ pada bidang Δz dalam arah manapun. Secara khusus, jika Δz mendekati titik $(0,0)$ secara horizontal melalui titik $(\Delta x, 0)$ pada sumbu real, maka diperoleh

$$\overline{\Delta z} = \overline{\Delta x + i0} = \Delta x - i0 = \Delta z$$

Sehingga

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{z} + \overline{\Delta z} + z \qquad \textit{dimana} \qquad \Delta z = (\Delta x, 0)$$

Ketika Δz mendekati titik $(0,0)$ secara vertikal melalui titik $(0,\Delta y)$ pada sumbu imajiner, diperoleh

$$\overline{\Delta z} = \overline{0 + i\Delta y} = 0 - i\Delta y = -(0 + i\Delta y) = -\Delta z$$

Sehingga didapatkan

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{z} + \overline{\Delta z} - z \qquad dimana \qquad \Delta z = (0, \Delta y)$$

Oleh karena itu, jika limit $\Delta w/\Delta z$ ada saat Δz mendekati 0, dan berdasarkan teorema ketunggalan limit, diperoleh

$$\overline{z} + z = \overline{z} - z$$

Persamaan di atas hanya bisa dipenuhi pada saat $z = 0$, dengan demikian dapat disimpulkan bahwa dw/dz ada hanya saat $z = 0$ dan nilai limitnya adalah 0.

Untuk mengecek bahwa dw/dz benar ada pada saat $z = 0$, kita hanya perlu menunjukkan bahwa pada saat $z = 0$, Persamaan 2.33 menjadi

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{\Delta z}$$

Sehingga kita dapat menyimpulkan bahwa dw/dz ada hanya saat $z = 0$ dan nilai limitnya adalah 0.. ■

Contoh 2.17 menunjukkan bahwa fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dapat diturunkan pada titik $z = (x, y)$ tetapi tidak pada titik lainnya pada persekitaran titik tersebut. Karena bagian real dan imajiner dari $f(z) = |z|^2$ adalah

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \qquad dan \qquad v(x, y) = 0 \tag{2.34}$$

Persamaan 2.34 menunjukkan bahwa komponen real dan imajiner dari suatu fungsi variabel komplek dapat memiliki turunan parsial yang kontinu untuk semua orde pada suatu titik $z = (x, y)$ dan ternyata fungsi tersebut tidak terdiferensialkan pada titik itu.

Fungsi $f(z) = |z|^2$ kontinu pada semua titik pada bidang karna komponen pada Persamaan 2.34 kontinu pada semua titik. Jadi, kontinuitas dari fungsi pada suatu titik tidak mengimplikasikan bahwa fungsi itu memiliki turunan pada titik tersebut. Pernyataan ini dirumuskan dalam bentuk teorema berikut

Teorema 2.18. *Jika suatu fungsi variabel kompleks dapat diturunkan pada suatu titik maka fungsi tersebut kontinu di titik itu*

Bukti: Untuk melihatnya, kita asumsikan bahwa $f'(z_0)$ ada , kemudian kita tulis:

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)] = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\lim_{z\to z_0}(z-z_0) = f'(z_0).0 = 0 \tag{2.35}$$

Yang mana menghasilkan

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{2.36}$$

Persamaan di atas adalah pernyataan dari kontinuitas dari fungsi f pada z_0. ■

2.7 Rumus Turunan Fungsi

Definisi turunan pada Subbab 2.6 identik dengan turunan dari fungsi bernilai real pada pokok bahasan bilangan real. Faktanya, rumus-rumus dasar turunan berikut ini dapat diturunkan dari definisi turunan fungsi variabel kompleks pada Subbab 2.6 dengan melakukan cara yang sama dengan yang digunakan di kalkulus. Dalam rumus turunan berikut ini, rumus turunan dari fungsi f di titik z dinotasikan dengan

$$\frac{d}{dz}f(z) \text{ atau } f'(z),$$

tergantung penulisan mana yang nyaman untuk digunakan.

Misal c adalah bilangan kompleks, dan misalkan pula bahwa f adalah fungsi yang turunannya ada di titik z. Dengan sangat mudah dapat ditunjukkan bahwa

$$\frac{d}{dz}c = 0, \qquad \frac{d}{dz}z = 1, \qquad \frac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z) \tag{2.37}$$

Begitu juga jika n adalah bilangan positif,

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1} \tag{2.38}$$

Rumus ini juga valid jika n adalah bilangan negatif, dengan syarat $z \neq 0$.

Jika turunan dari dua fungsi f dan g ada di titik z, maka

$$\frac{d}{dz}[f(z)+g(z)] = f'(z)+g'(z) \tag{2.39}$$

$$\frac{d}{dz}\left[f(z)g(z)\right] = f(z) + g'(z) + f'(z) + g(z) \tag{2.40}$$

dan, di saat $g(z) \neq 0$,

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} \tag{2.41}$$

Kita akan memverifikasi Persamaan 2.40. Untuk membuktikannya, kita mulai dengan memisalkan ekspresi perubahan dari perkalian fungsi $f(z)g(z) = w$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(z+\Delta z)g(z+\Delta z) - f(z)g(z)\\ &= f(z)[g(z+\Delta z) - g(z)] + [f(z+\Delta z - f(z))]g(z+\Delta z)\end{aligned}$$

Sehingga

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f(z)\frac{[g(z+\Delta z) - g(z)]}{\Delta z} + \frac{[f(z+\Delta z) - f(z)]}{\Delta z}g(z+\Delta z)$$

dan dengan mencari limit $\Delta w/\Delta z$, yaitu dengan membiarkan Δz mendekati 0, kita dapatkan rumus yang diharapkan untuk untuk turunan dari $f(Z)g(z)$. Dalam hal ini, kita menggunakan fakta bahwa g kontinu di titik z karena $g'(z)$ ada; kemudian $g(z+\Delta z)$ mendekati $g(z)$ ketika Δz mendekati 0.

Kita juga mempunya aturan rantai (*chain rule*) untuk menurunkan fungsi komposisi. Misalkan bahwa f mempunyai turunan di z_0 dan g mempunyai turunan di titik $f(z_0)$, maka fungsi $f(z) = g[f(z)]$ mempunyai turunan di z_0, dan

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0) \tag{2.42}$$

Jika kita tulis $w = f(z)$ dan $W = g(w)$, maka $W = f(z)$, aturan rantainya menjadi

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\frac{dw}{dz}$$

Contoh 2.19. *Cari turunan dari fungsi* $(2z^2+i)^5$

Jawab: Untuk menemukan turunan dari $(2z^2+i)^5$, misalkan bahwa $w = 2z^2 + i$ dan $W = w^5$. Maka

$$\frac{d}{dz}(2z^2+i)^5 = 5w^4 4z = 20z(2z^2+i)^4$$

■

Untuk memulai memverifikasi rumus pada Persamaan 2.42, pilih titik spesifik z_0 dimana $f'(z_0)$ ada. Misalkan bahwa $w_0 = f(z_0)$ dan misalkan juga anggap bahwa $g'(w_0)$ ada. Dengan begitu, ada beberapa persekitaran $|w - w_0| < \varepsilon$ dari w_0 sedemikian sehingga untuk semua titik w di dalam persekitaran itu, kita dapat mendefinisikan suatu fungsi ϕ yang mempunyai nilai $\phi(w_0) = 0$ dan

$$\phi(w) = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) \qquad \mathit{saat} \qquad w \neq w_0 \tag{2.43}$$

Sebagai catatan, menurut definisi dari turunan, diperoleh

$$\lim_{w\to w_0} \phi(w) = \lim_{w\to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - \lim_{w\to w_0} g'(w_0) = g'(w_0) - g'(w_0) = 0 \tag{2.44}$$

oleh sebab itu dapat disimpulkan bahwa ϕ kontinu pada titik w_0

Selanjutnya, pernyataan pada Persamaan 2.43 dapat ditulis dalam bentuk

$$g(w) - g(w_0) = [g'(w_0) + \phi(w)](w - w_0), \qquad (|w - w_0| < \varepsilon) \tag{2.45}$$

Form tersebut valid walaupun pada saat $w = w_0$ dan karena $f'(z_0)$ ada dan oleh karena itu f kontinu di z_0. Kita dapat memilih bilangan positif δ sedemikian sehingga titik $f(z)$ berada dalam persekitaran ε dari w_0, yaitu $|w - w_0| < \varepsilon$ jika z berada dalam persekitaran δ dari z_0, yaitu $|z - z_0| < \delta$. Jadi, tidaklah masalah jika mengganti variabel w pada Persamaan 2.45 dengan $f(z)$ dengan z adalah sembarang titik yang pada persekitaran $|z - z_0| < \delta$. Dengan substitusi tersebut, dan dengan fakta bahwa $w_0 = f(z_0)$ maka Persamaan 2.45 menjadi

$$\frac{g[f(z)] - g[f(z_0)]}{z - z_0} = \{g'[f(z_0) + \phi[f(z_0)]]\}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{2.46}$$

dengan $0 < |z - z_0| < \delta$, dan kita tetapkan bahwa $z \neq z0$, kita tidak menginginkan adanya pembagian dengan 0. Sebagai catatan, dalam hal ini f kontinu di z_0 dan ϕ kontinu di titik $w_0 = f(z0)$. Oleh karena itu, komposisi $\phi[f(z)]$ kontinu di z_0, dan karena $\phi(w_0) = 0$, maka

$$\lim_{z\to z_0} \phi[f(z)] = 0 \tag{2.47}$$

Jadi, Persamaan 2.46 menjadi Persamaan 2.42 ketika z mendekati z_0.

2.8 Persamaan Cauchy-Riemann

Pada materi persamaan Cauchy-Riemann ini, kita akan mendapatkan sepasang persamaan yang menyebabkan turunan parsial pertama dari fungsi komponen u dan v yang berasal dari fungsi

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.48}$$

harus memenuhi sepasang persamaan tersebut di titik $z_0 = (x_0, y_0)$ apabila turunan dari $f(z)$ ada. Kita juga akan menunjukkan cara untuk mengekspresikan $f'(z_0)$ dalam bentuk turunan parsial tersebut.

Kita mulai dengan memisalkan

$$z_0 = x_0 + iy_0, \qquad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

dan

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)\\ &= [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0 \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)].\end{aligned}$$

Jika kita asumsikan bahwa turunan dari f di titik z_0 ada, yaitu

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 2} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \tag{2.49}$$

maka berdasarkan Teorema 2.8, kita peroleh

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left(Re \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \right) + i \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left(Im \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \right) \tag{2.50}$$

Perhatikan bahwa ekspresi pada Persamaan 2.50 valid saat $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati $(0, 0)$ dari arah manapun. Secara khusus, misalkan bahwa $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati $(0, 0)$ dari arah horizontal melalui titik-titik $(\Delta x, 0)$. Pada saat $\Delta y = 0$, pecahan $\Delta w/\Delta z$ menjadi

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Jadi,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left(Re \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0)$$

dan

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Im\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)\right) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x} = v_x(x_0,y_0)$$

dimana $u_x(x_0, y_0)$ dan $v_x(x_0, y_0)$ menotasikan turunan parsial pertama terhadap x dari fungsi u dan v, secara berturut-turut, di titik (x_0, y_0). Dengan menyubstitusikan limit tersebut ke Persamaan 2.50, diperoleh

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \tag{2.51}$$

Selanjutnya kita misalkan bahwa $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati $(0, 0)$ dari arah vertikal melalui titik-titik $(0, \Delta y)$. Pada saat $\Delta x = 0$, pecahan $\Delta w/\Delta z$ menjadi

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{i\Delta y} + i\frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{i\Delta y} \\ &= \frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{\Delta y} - i\frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{\Delta y}\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Re\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)\right) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{\Delta y} = v_y(x_0,y_0)$$

dan

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(Im\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)\right) = -\lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{\Delta y} = -u_y(x_0,y_0)$$

Sehingga, berdasarkan ekspresi pada Persamaan 2.50, diperoleh

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \tag{2.52}$$

dimana $v_y(x_0, y_0)$ dan $u_y(x_0, y_0)$ menotasikan turunan parsial pertama terhadap y dari fungsi v dan u, secara berturut-turut. Dalam hal ini, Persamaan 2.52 juga dapat ditulis dalam bentuk

$$f'(z_0) = -i[u_y(x_0, y_0) - iv_y(x_0, y_0)].$$

Persamaan 2.51 dan 2.52 tidak hanya menunjukkan ekspresi lain dari $f'(z_0)$ dalam bentuk turunan parsial pertama dari fungsi u dan v, namun juga menyediakan syarat perlu bagi keberadaan $f'(z_0)$. Untuk mendapatkan syarat tersebut, kita hanya perlu menyamakan bagian real dan bagian emajiner pada sisi sebelah kanan dan kiri dari Persamaan 2.51 dan 2.52. Dalam hal ini, keberadaan $f'(z_0)$ memerlukan syarat

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \qquad \textit{dan} \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \quad (2.53)$$

Persamaan 2.53 selanjutnya dikenal dengan nama persamaan Cauchy–Riemann, nama ini diambil untuk menghormati matematiakawan dari Prancis, A. L. Cauchy (1789–1857), yang telah menemukan dan menggunakannya, serta juga untuk menghormati matematikawan dari Jerman bernama G. F. B. Riemann (1826–1866), yang telah membuat persamaan tersebut menjadi fundamental dalam perkembangan teori fungsi variabel kompleks.

Kita rangkum hasil di atas dalam bentuk teorema berikut

Teorema 2.20. *Misalkan bahwa*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

dan misalkan pula bahwa $f'(z)$ *ada di titik* $z_0 = x_0 + iy_0$. *Maka turunan parsial pertama dari* u *dan* v *pasti ada di* (x_0, y_0) *dan memenuhi persamaan Cauchy–Riemann*

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x \quad (2.54)$$

Selain itu, $f'(z)$ *juga dapat ditulis dalam bentuk*

$$f'(z) = u_x + iv_x \quad (2.55)$$

Dimana turunan parsial tersebut dievaluasi di titik (x_0, y_0).

Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.21. *Pada Contoh 2.15, kita telah menunjukkan bahwa fungsi*

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

dapat diturunkan dimana-mana dan turunanannya adalah $f'(z) = 2z$. *Verifikasi fakta tersebut dengan menunjukkan bahwa turunan parsialnya memenuhi persamaan Cauchy–Riemann!*

Jawab: Misalkan bahwa $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, maka fungsi u dan v dapat ditulis

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad \textit{dan} \qquad v(x, y) = 2xy$$

Turunan parsial dari u dan v terhadap x dan y adalah
$u_x = 2x$,
$u_y = -2y$,
$v_x = 2y$, dan
$v_y = 2x$

Jelas bahwa turunan parsial tersebut memenuhi persamaan Cauchy–Riemann, yaitu

$$u_x = 2x = v_y, \qquad dan \qquad u_y = -2y = -v_x$$

Selain itu, berdasarkan Persamaan 2.55,diperoleh

$$f'(z) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z$$

■

Karena persamaan Cauchy–Riemann merupakan syarat perlu untuk keberadaan turunan fungsi variabel kompleks f di titik z_0, jika dikontraposisikan, Teorema 2.20 juga dapat digunakan untuk menemukan titik-titik dimana f tidak dapat diturunkan. Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.22. *Pada Contoh 2.16, kita telah menunjukkan bahwa* $f(z) = overlinez$ *tidak terturunkan dimana-mana. Gunakan kontraposisi dari Teorema 2.20 untuk memverifikasi fakta tersebut!*

Jawab: Misalkan bahwa $f(z) = \overline{z}$ dengan $z = x + iy$, maka

$$f(z) = overlinez = \overline{x + iy} = x - iy$$

Sehingga kita peroleh fungsi u dan v sebagai berikut

$$u(x, y) = x, \qquad dan \qquad v(x, y) = -y$$

Turunan parsialnya adalah
$u_x = 1$,
$u_y = 0$,
$v_x = 0$, dan
$v_y = -1$

Jelas bahwa turunan parsial tersebut tidak memenuhi persamaan Cauchy–Riemann, yaitu

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

Oleh karenanya, dapat kita simpulkan bahwa $f(z)$ tidak dapat diturunkan di mana-mana. ■

Contoh berikut juga merupakan ilustrasi bahwa kita dapat menentukan di titik manakah suatu fungsi f tidak terturunkan

Contoh 2.23. *Pada Contoh 2.17, kita juga telah menunjukkan bahwa $f(z) = |z|^2$ tidak terturunkan dimana-mana kecuali di $z = 0$. Gunakan kontraposisi dari Teorema 2.20 untuk memverifikasi fakta tersebut!*

Jawab: Misalkan bahwa $f(z) = |z|^2$ dengan $z = x + iy$, maka

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

Sehingga kita peroleh fungsi u dan v sebagai berikut

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \qquad dan \qquad v(x, y) = 0$$

Turunan parsialnya adalah
$u_x = 2x$,
$u_y = 2y$,
$v_x = 0$, dan
$v_y = 0$

Berdasarkan turunan parsial tersebut, jika persamaan Cauchy–Riemann terpenuhi pada titik (x, y) maka

$$u_x = 2x = 0 = v_y \qquad dan \qquad u_y = 2y = -0 = 0 = -v_x$$

Persamaan di atas hanya dapat terpenuhi saat $x = 0$ dan $y = 0$. Oleh karenanya, dapat kita simpulkan bahwa $f(z)$ tidak dapat diturunkan di mana-mana kecuali di $x = 0$ dan $y = 0$, yaitu $z = 0 + i0 = 0$. ■

Berdasarkan Teorema 2.20, dapat kita lihat bahwa terpenuhinya persamaan Cauchy-Rieman pada titik $z_0 = (x_0, y_0)$ tidak cukup untuk memastikan bahwa $f(z)$ memiliki turunan pada titik tersebut. Tetapi dengan beberapa syarat kontinuitas tertentu didapatkan teorema penting seperti yang kita punya di bawah ini.

Teorema 2.24. *Misalkan bahwa*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

didefinisikan sepanjang beberapa persekitaran ε dari suatu titik $z_0 = x_0 + iy_0$, dan andaikan bahwa

(a) *turunan parsial pertama dari fungsi u dan v terhadap x dan y ada dimana-mana pada persekitaran tersebut.*

(b) *turunan-turunan parsial tersebut kontinu pada (x_0, y_0) dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann*

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

pada titik (x_0, y_0)

Maka $f'(z_0)$ ada, dan hasil turunannya adalah

$$f'(z) = u_x + iv_x$$

dimana turunan parsial tersebut dievaluasi di titik (x_0, y_0).

Bukti: Untuk memulai proses pembuktian, kita tulis $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, dimana $0 <| \Delta z |< \varepsilon$, dan

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

Maka

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v \tag{2.56}$$

dimana

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

dan

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$$

Asumsi bahwa turunan-turunan parsial orde pertama dari u dan v kontinu pada (x_0, y_0) maka Δu dan Δv dapat ditulis sebagai berikut.

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{2.57}$$

dan

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{2.58}$$

dimana ε_1 dan ε_2 mendekati 0, ketika $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati (0, 0) pada bidang Δz. Substitusikan Persamaan 2.57 dan 2.58 pada Persamaan 2.56 sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\Delta w = {} & u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ & + i[v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}]\end{aligned} \tag{2.59}$$

Asumsikan bahwa persamaan Cauchy-Riemann terpenuhi di (x_0, y_0), kita dapat mengganti $u_y(x_0, y_0)$ dengan $-v_x(x_0, y_0)$ dan $v_y(x_0, y_0)$ dengan $u_x(x_0, y_0)$ pada Persamaan 2.59 dan dibagi dengan Δz, maka diperoleh:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta y)^2}}{\Delta z} \tag{2.60}$$

Tetapi $\sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta y)^2} =\mid \Delta z \mid$, jadi

$$\left| \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta y)^2}}{\Delta z} \right| = 1$$

Juga, $\varepsilon_l + i\varepsilon_2$ cenderung sama dengan 0,ketika $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati $(0, 0)$. Sehingga, suku terakhir pada Persamaan 2.60 cenderung sama dengan 0 ketika $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ mendekati 0. Hal in berarti bahwa limit dari ruas kiri dari Persamaan 2.60 ada dan hasil turunannya adalah:

$$f'(z_0) = u_x + iv_x \tag{2.61}$$

dimana limit ruas kanan akan dievaluasi pada (x_0, y_0). ■

Sebagai ilustrasi dari Teorema 2.24, perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.25. *Tunjukkan bahwa $f(z) = e^z = e^x e^{iy}$ mempunyai turunan di setiap z, dan tentukan $f'(z)$.*

Jawab: Misal bahwa f merupakan fungsi eksponensial

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy}, (z = x + iy),$$

Akibat dari rumus Euler, fungsi ini dapat ditulis,

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

dimana y harus diambil di dalam bentuk radian ketika $\cos y$ dan $\sin y$ dievaluasi. Maka

$$u(x, y) = e^x \cos y, \text{ dan } v(x, y) = e^x \sin y.$$

Jika $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ dicari turunan parsial pertamanya terhadap x dan y, maka diperoleh
$u_x(x, y) = e^x \cos y$

$u_y(x, y) = -e^x \sin y$
$v_x(x, y) = e^x \sin y$
$v_y(x, y) = e^x \cos y$
Berdasarkan hasil turunan parsial tersebut, dapat kita lihat bahwa

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \qquad dan \qquad u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

Karena $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ untuk sembarang x dan y dan karena turunan-turunannya kontinu dimanapun, syarat-syarat di teorema sudah terpenuhi untuksemua titik dalam bidang kompleks. Jadi, $f'(z)$ ada di setiap titik z dan

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x cosy + ie^x siny$$

Perhatikan bahwa $f'(z) = f(z)$. ■

Contoh 2.26. *Tunjukkan bahwa $f(z) = z^2 + 1$ mempunyai turunan di setiap z, dan tentukan $f'(z)$.*

Jawab: Misalkan bahwa $f(z) = z^2 + 1$ dan $z = x + iy$, maka

$$f(z) = z^2 + 1 = (x^2 - y^2 + 1) + i2xy$$

dari persamaan di atas diperoleh

$$u(x, y) = (x^2 - y^2 + 1) \qquad dan \qquad v(x, y) = 2xy$$

Jika $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ dicari turunan parsial pertamanya terhadap x dan y, maka diperoleh
$u_x(x, y) = 2x$
$u_y(x, y) = 2y$
$v_x(x, y) = -2y$
$v_y(x, y) = 2x$
Berdasarkan hasil turunan parsial tersebut, dapat kita lihat bahwa

$$u_x = 2x = v_y, \qquad u_y = 2y = -v_x$$

Karena turunan parsial tersebut memenuhi persamaan Cauchy-Reimann, maka dapat disimpulkan bahwa $f'(z)$ ada dimana-mana dan turunannya adalah

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i2y = 2z$$

■

Contoh 2.27. *Tunjukkan bahwa* $f(z) = z^2 + 5iz + 3i$ *mempunyai turunan di setiap* z*, dan tentukan* $f'(z)$*.*

Jawab: Misalkan bahwa $f(z) = z^2 + 5iz + 3i$ dan $z = x + iy$, maka

$$\begin{aligned} f(z) &= (x - iy)^2 + 5i(x - iy) + 3i \\ &= (x^2 - 2iy + y^2) + (5ix - 5i^2 y) + 3i \\ &(x^2 - y^2 - 5y + 3) + (2xy + 5x - 1)i \end{aligned}$$

dari persamaan di atas diperoleh

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 5y + 3 \qquad dan \qquad v(x, y) = 2xy + 5x - 1$$

Jika $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ dicari turunan parsial pertamanya terhadap x dan y, maka diperoleh
$u_x(x, y) = 2x$
$u_y(x, y) = -2y - 5$
$v_x(x, y) = 2y + 5$
$v_y(x, y) = 2x$
Berdasarkan hasil turunan parsial tersebut, dapat kita lihat bahwa

$$u_x = 2x = v_y, \qquad u_y = -2y - 5 = -(2y + 5) = -v_x$$

Karena turunan parsial tersebut memenuhi persamaan Cauchy-Reimann, maka dapat disimpulkan bahwa $f'(z)$ ada dimana-mana dan turunannya adalah

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i(2y + 5)$$

■

2.9 Turunan dalam Koordinat Polar

Misalkan bahwa $z_0 \neq 0$, pada bagian ini kita akan menggunakan transformasi

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{2.62}$$

untuk menyatakan kembali persamaan Cauchy-Riemann dalam bentuk koordinat polar.

Jika kita menulis bilangan kompleks z dalam bentuk

$$z = x + iy \qquad \text{atau} \qquad z = re^{i\theta} \qquad (z \neq 0)$$

untuk fungsi $w = f(z)$, maka bagian real dan bagian imajiner dari $w = u + iv$ akan dinyatakan dalam bentuk salah satu variabel x dan y atau r dan θ. Misalkan bahwa turunan parsial orde pertama dari u dan v terhadap x dan y ada dimana-mana dalam beberapa persekitaran titik tak nol z_0 dan kontinu di titik tersebut. Turunan parsial orde pertama terhadap r dan θ juga mempunyai sifat yang sama, dan dengan aturan rantai untuk differensial fungsi bernilai real dari dua variabel real dapat digunakan untuk mendapatkan suku-sukunya terhadap variabel x dan y. Secara rinci, turunan parsial u dan v terhadap r dan θ dapat ditulis:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

dan

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Berdasarkan Persamaan 2.62, kita dapatkan bahwa $\partial x/\partial r = \cos\theta$, $\partial x/\partial\theta = -r\sin\theta$, $\partial y/\partial r = \sin\theta$, dan $\partial y/\partial\theta = r\cos\theta$. Dengan demikian, dengan menyubstitusikan hasil tersebut ke persamaan di atas dapat diperoleh

$$u_r = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta, \qquad u_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta, \tag{2.63}$$

dan

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta, \qquad v_\theta = -v_x r sin\theta + u_y r\cos\theta. \tag{2.64}$$

Jika turunan parsial u dan v terhadap x dan y juga memenuhi persamaan Cauchy-Riemann, berarti

$$u_x = v_y \text{dan} u_y = -v_x \tag{2.65}$$

di z_0, sehingga Persamaan 2.64 menjadi

$$v_r = -u_y\cos\theta + u_x\sin\theta, \qquad v_\theta = u_y r\sin\theta + u_x r\cos\theta \tag{2.66}$$

dititik z_0. Dengan demikian, jelas bahwa dari Persamaan 2.63 dan 2.66

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \qquad \frac{1}{r}u_\theta = -v_r$$

atau

$$ru_r = v_\theta, \qquad u_\theta = -rv_r \tag{2.67}$$

di titik z_0

Persamaan 2.67 merupakan suatu alternatif dari bentuk persamaan Cauchy-Riemann pada persamaan 2.65. Selanjutnya, kita dapat mengulangi Teorema 2.24 dengan menggunakan koordinat polar.

Teorema 2.28. *Misalkan fungsi*

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

didefinisikan sepanjang beberapa persekitaran ε *dari suatu titik* $z_0 = r_0\ exp(i\theta_0)$, *dan andaikan bahwa*

(a) turunan parsial pertama dari fungsi u *dan* v *terhadap* r *dan* θ *ada dimana-mana pada persekitaran tersebut.*

(b) turunan-turunan parsial tersebut kontinu pada (r_0, θ_0) *dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann*

$$ru_r = v_\theta, u_\theta = -rv_r$$

pada titik (r_0, θ_0)

Maka $f'(z_0)$ *ada, dan hasil turunannya adalah*

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$$

dimana turunan parsial tersebut dievaluasi di titik (r_0, θ_0).

Sebagai ilustrasi dari teorema tersebut, perhatikan contoh berikut

Contoh 2.29. *Tuliskan* $f(z) = \frac{1}{z}$ *dalam bentuk koordinat polar dan tunjukkan bahwa* $f(z)$ *mempunyai turunan di setiap* z, *dan tentukan* $f'(z)$.

Jawab: Misalkan bahwa $f(z) = \frac{1}{z}$ dan $z = re^{i\theta}$, maka

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \qquad (z \neq 0)$$

dari persamaan di atas diperoleh

$$u(r, \theta) = \frac{\cos\theta}{r} \qquad dan \qquad v(r, \theta) = -\frac{\sin\theta}{r}$$

Jika $u(r,\theta)$ dan $v(r,\theta)$ dicari turunan parsial pertamanya terhadap r dan θ, maka diperoleh
$u_r(r,\theta) = -\frac{\cos\theta}{r^2}$
$u_\theta(r,\theta) = -\frac{\sin\theta}{r}$
$v_r(r,\theta) = \frac{\sin\theta}{r^2}$
$v_\theta(r,\theta) = -\frac{\cos\theta}{r}$
Berdasarkan hasil turunan parsial tersebut, dapat kita lihat bahwa

$$ru_r = -\frac{\cos\theta}{r} = v_\theta, \qquad u_\theta = -\frac{\sin\theta}{r} = -rv_r$$

Karena turunan parsial tersebut memenuhi persamaan Cauchy-Reimann, maka dapat disimpulkan bahwa $f'(z)$ ada dimana-mana dan turunannya adalah

$$f'(z) = e^{-i\theta}(-\frac{\cos\theta}{r^2} + i\frac{\sin\theta}{r^2}) = -e^{-i\theta}\frac{e^{-i\theta}}{r^2} = -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}$$

■

Contoh 2.30. *Gunakan Teorema 2.28 untuk menunjukkan bahwa untuk suatu $\alpha \in \mathbb{R}$, fungsi*

$$f(z) = \sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}$$

dapat diturunkan dimana-mana.

Jawab: Misalkan bahwa $f(z) = \sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}$, maka

$$f(z) = \sqrt[3]{r}e^{i\theta/3} = f(z) = \sqrt[3]{r}(\cos\theta/3 + i\sin\theta/3)$$

dari persamaan di atas diperoleh

$$u(r,\theta) = \sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3} \qquad dan \qquad v(r,\theta) = \sqrt[3]{r}\sin\frac{\theta}{3}$$

Jika $u(r,\theta)$ dan $v(r,\theta)$ dicari turunan parsial pertamanya terhadap r dan θ, maka diperoleh
$u_r(r,\theta) = \frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}\cos\frac{\theta}{3}$
$u_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{3}r^{\frac{1}{3}}\sin\frac{\theta}{3}$
$v_r(r,\theta) = \frac{1}{3}r^{-\frac{2}{3}}\sin\frac{\theta}{3}$

$v_\theta(r,\theta) = \frac{1}{3} r^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\theta}{3}$
Berdasarkan hasil turunan parsial tersebut, dapat kita lihat bahwa

$$ru_r = \frac{1}{3} r^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\theta}{3} = v_\theta, \qquad u_\theta = -\frac{1}{3} r^{\frac{1}{3}} \sin\frac{\theta}{3} = -rv_r$$

Karena turunan parsial tersebut memenuhi persamaan Cauchy-Reimann, maka dapat disimpulkan bahwa $f'(z)$ ada dimana-mana dan turunannya adalah

$$f'(z) = e^{-i\theta}(\frac{1}{3} r^{-\frac{2}{3}} \cos\frac{\theta}{3} + i\frac{1}{3} r^{-\frac{2}{3}} \sin\frac{\theta}{3}$$

atau

$$f'(z) = \frac{e^{-i\theta}}{3(\sqrt[3]{r}ei\theta)^2} e^{i\theta} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{r}ei\theta)^2} = \frac{1}{3(f(z))^2}$$

Perhatikan bahwa ketika suatu nilai z tertentu diambil dari domain f, nilai $f(z)$ adalah salah satu nilai dari $z^{1/3}$ (lihat penjelasan pada akar bilangan kompleks). Sehingga, ekspresi terakhir untuk $f'(z)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{d}{dz} z^{1/3} = \frac{1}{3(z^{1/3})^2}$$

■

2.10 Fungsi Analitik

Pada bagian ini, kita akan membahas tentang konsep dari fungsi analitik. Sebuah fungsi f dari variabel kompleks z dikatakan *analitik* di titik z_0 jika fungsi tersebut memiliki turunan di setiap titik pada beberapa persekitaran dari z_0. Dengan demikian, jika f analitik pada titik z_0 maka f juga analitik di setiap titik pada bebrapa persekitaran dari z_0. Suatu fungsi f dikatakan analitik pada suatu himpunan terbuka jika fungsi tersebut memiliki turunan pada setiap titik dalam himpunan tersebut. Jika kita berbicara tentang fungsi f yang analitik di himpunan S yang tidak terbuka, maka perlu dipahami bahwa yang dimaksud dengan pernyataan tersebut adalah keanalitikan f pada himpunan terbuka yang memuat S. Jadi, kita katakan bahwa f analitik pada titik z_0 jika f analitik di seluruh persekitaran z_0.

Sebagai contoh, fungsi$f(z) = 1/z$ analitik di setiap titik tak nol pada bidang kompleks. Tetapi fungsi $f(z) = |z|^2$ tidak analitik pada setiap titik karena turunannya hanya ada di $z = 0$ dan pada titik z_0 tersebut, persekitarannya tidak dapat diturunkan. Itulah mengapa, walaupun $f(z) = |z|^2$ terturunkan di $z = 0$ tetapi fungsi tersebut tidak analitik di titik itu.

Fungsi penuh (*entire function*) adalah fungsi yang analitik di setiap titik pada seluruh bidang kompleks. Karena turunan polinomial dapat diturunkan di titik manapun pada bidang kompleks, maka jelas bahwa setiap polinomial adalah fungsi menyeluruh.

Jika sebuah fungsi f tidak analitik pada titik z_0 tetapi analitik di beberapa titik di persekitaran dari z_0, maka z_0 disebut *titik singular*. Titik $z = 0$ pada kenyataannya merupakan *titik singular* dari fungsi $f(z) = 1/z$. Di sisi lain, fungsi $f(z) = |x|^2$ tidak memiliki *titik singular* karena bukan merupakan fungsi analitik.

Syarat perlu, namun belum cukup, dari fungsi f menjadi analitik di domain D adalah f kontinu dari di semua titik pada D. Memenuhi persamaan Chauchy-Riemann merupakan syarat perlu, tetapi tidak cukup. Syarat cukup untuk keanalitikan f di D terdapat pada Teorema 2.24 dan 2.28 pada subbab sebelumnya. Sehingga, ketika fungsi diberikan dalam komponennya, yaitu fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$, keanalitikan fungsi tersebut dapat ditunjukkan dengan menerapkan persamaan Cauchy-Riemann.

Contoh 2.31. *Jika* $f(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$*, tentukan dimanakah* $f(z)$ *analitik? apakah* $f(z)$ *adalah entire function?*

Jawab: Misalkan bahwa $f(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$, maka

$$u(x, y) = \cosh x \cos y, \qquad \textit{dan} \qquad v(x, y) = \sinh x \sin y$$

Jika fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ diturunkan secara parsial terhadap variabel x dan y maka diperoleh
$u_x(x, y) = \sinh x \cos y$
$u_y(x, y) = -\cosh x \sin y$
$v_x(x, y) = \cosh x \sin y$, dan
$v_y(x, y) = \sinh x \cos y$
Berdasarkan hasil turunan tersebut, dapat dilihat bahwa

$$u_x = \sinh x \cos y = v_y, \qquad \textit{dan} \qquad u_y = -\cosh x \sin y = -v_x$$

Karena turunan parsialnya ada dimana-mana dan kontinu serta memenuhi persamaan Cauchy-Riemann, jelas bahwa $f(z)$ dapat diturunkan dimana-mana, oleh karena itu, $f(z)$ adalah *entire function.* ■

Syarat cukup lainnya yang berguna diperoleh dari rumus turunan pada Subbab 2.7. Dari subbab tersebut kita ketahui bahwa turunan dari penjumlahan dan perkalian dua fungsi ada asalkan masing-masing fungsi tersebut memiliki turunan. Dengan demikian, *Jika dua fungsi analitik pada domain D,penjumlaan dan perkalian keduanya juga analitik di D* . Demikian pula, *hasil baginya juga analitik pada D asalkan penyebutnya tidak sama dengan nol untuk setiap titik pada titik D.* Dalam hal ini, hasil bagi $P(z)/Q(z)$ dari dua polinomial tersebut analitik pada setiap domain asalkan $Q(z) \neq 0$.

Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut

Contoh 2.32. *Tentukan dimanakah fungsi $f(z)$ berikut analitik?*

$$f(z) = \frac{z^3 + 4}{(z^2 - 3)(z^2 + 1)}$$

Jawab: Fungsi $f(z)$ analitik kecuali ketika penyebutnya sama dengan nol, yaitu ketika $(z^2 - 3)(z^2 + 1) = 0$, dalam hal ini penyebut akan sama dengan nol pada saat $z = \pm\sqrt{3}$ atau $z = \pm i$. ■

Berdasarkan aturan rantai untuk turunan pada komposisi fungsi, kita dapatkan bahwa *komposisi dari dua buah fungsi yang analitik juga analitik.* Lebih tepatnya, misalkan sebuah fungsi $f(z)$ analitik di sebuah domain D dan peta dari D di bawah trasnformasi $w = f(z)$ termuat pada domain dari fungsi $g(w)$, maka komposisi $g[f(z)]$ analitik di D, dengan turunan:

$$\frac{d}{dz} = g[f(z)] = g'[f(z)]f'(z)$$

Berikut ini adalah teorema yang berkenaan dengan fungsi analitik.

Teorema 2.33. *Jika $f'(z) = 0$ untuk setiap z di domain D, maka $f(z)$ fungsi konstan di sepanjang D.*

Bukti: Kita akan mulai pembuktikan teorema ini dengan menuliskan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Asumsikan bahwa $f'(z) = 0$ di D, dalam hal ini kita tulis bahwa $u_x + iv_x = 0$ dan berdasarkan persamaan Cauch-Riemann, diperoleh $v_y - iu_y = 0$. Sehingga,

$$u_x = u_y = v_x = v_y$$

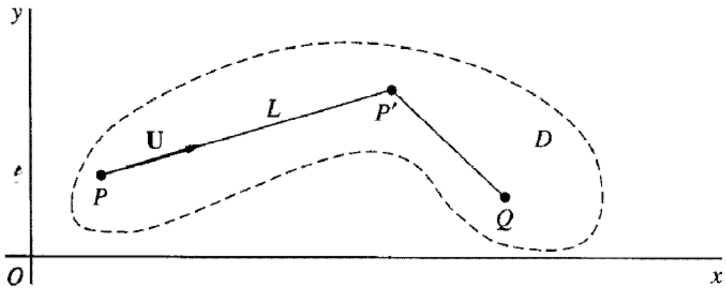
di setiap titik di domain D.

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bahwa $u(x, y)$ adalah konstan sepanjang segmen garis L yang diperpanjang dari titik P ke titik P' dan yang berada sepenuhnya di D. Misalkan bahwa s adalah jarak sepanjang segmen garis L dari titik P dan $\mathbf{U}$ adalah vektor satuan sepanjang L dalam arah s (lihat Gambar 2.7). Kita tahu dari kalkulus bahwa du/ds dapat ditulis sebagai perkalian titik

$$\frac{du}{ds} = (gradu).\mathbf{U} \tag{2.68}$$

dimana grad u adalah gradien vektor

$$grad\ u = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} \tag{2.69}$$



Gambar 2.7: Ilustrasi turunan fungsi konstan

karena u_x dan u_y bernilai 0 di semua D, maka grad u adalah vektor nol pada semua titik di L. Karenanya, dari Persamaan 2.68 dapat disimpulkan bahwa du/ds adalah nol sepanjang L dan ini berarti bahwa u konstan pada L.

Terakhir, karena ada sejumlah hingga segmen garis yang semacam itu, yang menghubungkan dua titik P dan Q di D, maka nilai dari u di P dan Q harus sama. Kita dapat menyimpulkan bahwa ada bilangan real konstan a sedemikian sehingga *u(x,y)=a* sepanjang domain D.

Demikian pula untuk $v(x,y)=b$, sehingga, dapat kita katakan bahwa $f(z)=a+bi$ di setiap titik di D. ■

Contoh berikut merupakan penerapan dari teorema di atas.

Contoh 2.34. *Misalkan bahwa fungsi*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

dan sekawannya

$$\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$$

keduanya analitik di domain D. Tunjukkan bahwa $f(z)$ merupakan fungsi konstan di sepanjang domain D.

Jawab: Untuk menjawab permasalahan ini, pertama-tama kita tulis $\overline{f(z)}$ dalam bentuk

$$\overline{f(z)} = U(x, y) + iV(x, y)$$

dimana

$$U(x, y) = u(x, y) \qquad dan \qquad V(x, y) = -v(x, y) \tag{2.70}$$

Karena $f(z)$ analitik maka turunan parsialnya memenuhi persamaan Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \qquad dan \qquad u_y = -v_x \tag{2.71}$$

Selain itu, karena $\overline{f(z)}$ juga analitik maka turunan parsialnya juga memenuhi persamaan Cauchy-Riemann

$$U_x = V_y \qquad dan \qquad U_y = -V_x \tag{2.72}$$

Berdasarkan Persamaan 2.70, maka Persamaan 2.72 dapat ditulis

$$u_x = -v_y \qquad dan \qquad u_y = v_x \tag{2.73}$$

Jika ruas yang berkorespondensi pada Persamaan 2.71 dan 2.73 pada bagian pertama, kita peroleh fakta bahwa $u_x = 0$ di D. Dengan cara yang sama, jika mengurangi ruas yang berkorespondensi pada bagian kedua di Persamaan 2.71 dan 2.73 didapatkan $v_x = 0$. Sehingga diperoleh nilai dari $f'(z)$ sebagai berikut

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0 + i0 = 0$$

dan menurut Teorema 2.33, jelas bahwa $f(z)$ adalah fungsi konstan disepanjang domain D. ■

Contoh 2.34 di atas dapat digunakan untuk menyelesaikan contoh berikut.

Contoh 2.35. *Buktikan bahwa jika modulus $|f(z)|$ konstan untuk setiap $z \in D$ maka $f(z)$ merupakan fungsi konstan pada D!*

Jawab: Untuk menyelesaikan permasalahan ini, misalkan bahwa

$$|f(z)| = c \qquad \text{untuk setiap } z \in D \tag{2.74}$$

dimana c adalah bilangan real yang konstan. Jika $c = 0$, maka jelas bahwa $f(z) = 0$ untuk setiap z di D. Jika $c \neq 0$, maka berdasarkan fakta bahwa $z\overline{z} = z^2$ maka hasil berikut

$$f(z)\overline{f(z)} = c^2$$

menunjukkan bahwa $f(z)$ tidak mungkin nol di D. Oleh karena itu,

$$\overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)} \qquad \text{untuk setiap } z \in D$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\overline{f(z)}$ analitik dimana-mana di D. Hasil dari Contoh 2.34 di atas menyimpulkan bahwa $f(z)$ merupakan fungsi konstan sepanjang domain D. ■

2.11 Fungsi Harmonik

Sebuah fungsi dua variabel bernilai real H dikatakan *fungsi harmonik* jika turunan parsial pertama dan kedua fungsi H ada dan kontinu serta memenuhi persamaan

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = 0 \tag{2.75}$$

yang dikenal dengan nama *Persamaan Laplace.*

Contoh 2.36. *Jika $T(x, y) = e^{-y} \sin x$, tunjukkan bahwa T adalah fungsi harmonik*

Jawab: Misalkan bahwa $T(x,y) = e^{-y}\sin x$, maka

$$T_x(x,y) = e^{-y}\cos x \qquad dan \qquad T_y(x,y) = -e^{-y}\sin x$$

dan

$$T_{xx}(x,y) = -e^{-y}\sin x \qquad dan \qquad T_{yy}(x,y) = e^{-y}\sin x$$

Jelas bahwa turunan parsial pertama dan kedua fungsi T ada dan kontinu serta memenuhi

$$T_{xx}(x,y) + T_{yy}(x,y) = -e^{-y}\sin x + e^{-y}\sin x = 0$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa T merupakan fungsi harmonik. ■

Selanjutnya perhatikan teorema berikut

Teorema 2.37. *Jika suatu fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik pada domain D maka komponen fungsi tersebut, yaitu fungsi u dan v juga harmonik di D.*

Bukti: Untuk membuktikan teorema ini, perlu dipahami bahwa jika suatu fungsi variabel kompleks analitik pada suatu titik maka bagian real dan imajinernya memiliki turunan parsial tingkat n dan kontinu di titik itu. Sehingga, jika diasumsikan bahwa f analitik di D, maka komponenya haruslah memenuhi persamaan Cauchy-Riemann sepanjang domain D:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x \tag{2.76}$$

dengan menurunkan kedua ruas pada persamaan di atas terhadap x diperoleh

$$u_{xx} = v_{yx}, \qquad u_{yx} = -v_{xx} \tag{2.77}$$

Dengan cara yang sama, turunan terhadap y adalah

$$u_{xy} = v_{yy}, \qquad u_{yy} = -v_{xy} \tag{2.78}$$

Berdasarkan teori pada kalkulus, jika turunan parsial dari u dan v kontinu maka berlaku $u_{yx} = u_{xy}$ dan $v_{yx} = v_{xy}$. Sehingga berdasarkan Persamaan 2.77 dan 2.78 diperoleh

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad dan \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Jadi, u dan v adalah fungsi harmonik. ■

Sebagai ilustrasi dari teorema tersebut, perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.38. *Tunjukkan bahwa komponen dari fungsi*

$$f(z) = e^{-y}\sin x - ie^{-y}\cos x$$

merupakan fungsi harmonik!

Jawab: Misalkan bahwa $f(z) = e^{-y}\sin x - ie^{-y}\cos x$, maka

$$u(x,y) = e^{-y}\sin x \qquad \textit{dan} \qquad v(x,y) = -e^{-y}\cos x$$

Turunan parsial dari $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ terhadap x dan y adalah
$u_x(x,y) = e^{-y}\cos x$,
$u_y(x,y) = -e^{-y}\sin x$,
$v_x(x,y) = e^{-y}\sin x$, dan
$v_y(x,y) = e^{-y}\cos x$.
Berdasarkan hasil turunan parsial tersebut, dapat dilihat bahwa

$$u_x = e^{-y}\cos x = v_y \qquad \textit{dan} \qquad u_y = -e^{-y}\sin x = -v_x$$

Karena turunan parsialnya ada dimana-mana dan kontinu serta memenuhi persamaan Cauchy-Riemann, jelas bahwa $f(z)$ dapat diturunkan dimana-mana, oleh karena itu, $f(z)$ adalah *entire function*, ini berarti bahwa $f(z)$ analitik dimana-mana. Sehingga, berdasarkan Teorema 2.37 dapat kita simpulkan bahwa $u(x,y) = e^{-y}\sin x$ dan $v(x,y) = -e^{-y}\cos x$,keduanya, merupakan fungsi harmonik. ■

Contoh 2.39. *Dengan cara yang sama dengan contoh di atas, dapat ditunjukkan bahwa fungsi $f(z) = 1/z^2$ analitik asalkan $z \neq 0$ dan karena*

$$\frac{i}{z^2} = \left(\frac{i}{z^2}\right)\left(\frac{\overline{z}^2}{\overline{z}^2}\right) = \frac{i\overline{z}^2}{(z\overline{z})^2} = \frac{i\overline{z}^2}{|z|^4} = \frac{2xy + i(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

maka komponen-komponennya adalah

$$u(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \textit{dan} \qquad v(x,y) = \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Dua fungsi tersebut merupakan fungsi harmonik dalam bidang xy asalkan tidak memuat titik asal.

■

Jika diberikan fungsi harmonik u dan v dalam domain D dan turunan parsial orde pertama memenuhi persamaan Cauchy-Riemann sepanjang D, maka v disebut *harmonik conjugate* dari u. Arti kata *conjugate* disini tidak sama dengan *conjugate* dalam Bab 1, yang didefinisikan pada $\overline{z}$.

Teorema 2.40. *Fungsi $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ analitik dalam domain D jika dan hanya jika v harmonik conjugate dari u.*

Bukti: Jika v adalah sekawan harmonik dari u di D, maka berdasarkan definisi fungsi harmonik dan fakta dari Teorema 2.24 tentang syarat cukup persamaan Chaucy-Riemann, dapat dikatakan bahwa f analitik sepanjang D. Sebaliknya jika f analitik sepanjang D, kita tahu bahwa dari Teorema 2.37 di atas bahwa u dan v adalah fungsi harmonik di D. ■

Contoh di bawah ini menunjukkan jika v adalah sekawan harmonik dari u di domain D, tidak berlaku sebaliknya, yaitu u bukan sekawan harmonik dari v

Contoh 2.41. *Misalkan bahwa $f(z) = z^2$ dan $z = x + iy$, maka dari penjabaran fungsi*

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

diperoleh komponen fungsi $f(z)$ yaitu

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad \text{dan} \qquad v(x, y) = 2xy$$

Tunjukkan bahwa v adalah sekawan harmonik dari u namun u bukan sekawan harmonik dari v!

Jawab: Fungsi $f(z)$, pada contoh bagian subbab turunan variabel kompleks, telah ditunjukkan sebagai fungsi yang dapat diturunkan dimana-mana. Oleh karena itu, jelas bahwa fungsi $f(z)$ adalah *entire function*, yang berarti bahwa fungsi $f(z)$ analitik dimana-mana. Sehingga, berdasarkan Teorema 2.37, dapat disimpulkan bahwa fungsi komponennya, yaitu $u(x, y)$ dan $v(x, y)$, merupakan fungsi harmonik. Selain itu, karena $f(z)$ dapat diturunkan dimana-mana, maka jelas bahwa $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ memenuhi persamaan Chaucy-Riemann. Dengan demikian, jelas bahwa $v(x, y)$ merupakan sekawan harmonik dari $u(x, y)$.

Namun tidak demikian jika terjadi sebaliknya, yaitu, misalkan bahwa

$$g(z) = 2xy + i(x^2 - y^2) = v(x, y) + iu(x, y)$$

karena
$v_x(x, y) = 2y$,
$v_y(x, y) = 2x$,
$u_x(x, y) = 2x$, dan
$u_y(x, y) = -2y$
maka jelas bahwa

$$v(x) = 2y \neq -2y = u_y \qquad dan \qquad v_y = 2x = \neq -u_x$$

(perlu dipahami bahwa simbol u dan v yang digunakan dalam pengecekan persamaan Chaucy-Riemann di atas berbeda dengan rumus pengecekan seperti pada subbab sebelumnya karena pada contoh ini, komponen fungsi $g(z)$ merupakan kebalikan dari komponen fungsi $f(z)$). Dalam hal ini, jelas bahwa komponen fungsi $g(z)$ tidak memenuhi persamaan Chaucy-Riemann. Dengan demikian $g(z)$ tidak analitik, yang berarti bahwa $u(x, y)$ bukan sekawan harmonik dari $v(x, y)$. ■

Pada contoh berikut, akan dijelaskan cara menentukan fungsi komponen $v(x, y)$ jika diberikan fungsi komponen $u(x, y)$ yang memiliki sifat bahwa $v(x, y)$ merupakan sekawan harmonik $u(x, y)$.

Contoh 2.42. *Temukan fungsi komponen $v(x, y)$ jika diketahui bahwa fungsi tersebut merupakan sekawan harmonik fungsi komponen*

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2y \tag{2.79}$$

Jawab: Karena $v(x, y)$ merupakan sekawan harmonik dari $u(x, y)$ maka u dan v memeunuhi persamaan Cauchy-Riemann berikut

$$u_x = v_y \qquad dan \qquad u_y = -v_x \tag{2.80}$$

Persamaan turunan pertamanya adalah

$$uy(x, y) = -6xy$$

Jika x dibuat tetap dan kita integralkan kedua ruas persamaan di atas terhadap y, maka diperoleh

$$v(x, y) = -3xy^2 + \phi(x) \tag{2.81}$$

dimana $\phi(x)$ merupakan fungsi sembarang yang bergantung pada variabel x. Dengan menggunakan bagian kedua dari Persamaan 2.80, didapat:

$$3y^2 - 3x^2 = 3y^2 + \phi'(x)$$

Atau $\phi'(x) = 3x^2$ dan ini berarti bahwa $\phi(x) = x^3 + C$, dimana C merupakan sembarang bilangan real. Berdasarkan Persamaan 2.81, maka fungsi

$$v(x, y) = -3xy2 + x3 + C \tag{2.82}$$

adalah *harmonik konjugate* dari $u(x, y)$. Jadi fungsi analitik yang diinginkan adalah

$$f(z) = (y3 - 3x2y) + i(-3xy2 + x3 + C) \tag{2.83}$$

■

2.12 Rangkuman

1. Misalkan bahwa

   $$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z_0 = x_0 + iy_0 \quad dan \quad w_0 = u_0 + iv_0$$

   Maka

   $$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

   jika dan hanya jika

   $$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \;\; dan \;\; \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$$

2. Jika z_0 dan w_0 adalah titik di bidang z dan w, maka

   $$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \;\; jika \;\; dan \;\; hanya \;\; jika \;\; \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

   dan

   $$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \;\; jika \;\; dan \;\; hanya \;\; jika \;\; \lim_{z \to z_0} f(\frac{1}{z}) = w_0$$

   Selain itu

   $$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \;\; jika \;\; dan \;\; hanya \;\; jika \;\; \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$$

3. Komposisi dari fungsi-fungsi kontinu adalah kontinu.

4. Jika sebuah fungsi f(z) kontinu dan tidak bernilai nol di titik z_0, maka $f(z) \neq 0$ di semua titik di sekitarnya.

5. Jika fungsi f kontinu di seluruh daerah R yang keduanya ditutup dan dibatasi, terdapat bilangan real bukan negatif M sehingga

$$|f(z)| \leq M \quad \textit{untuk semua titik } z \textit{ didalam } R \tag{2.84}$$

   di mana kesetaraan berlaku untuk setidaknya satu z tersebut.

6. Diberikan fungsi

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

   yang didefinisikan pada sepanjang suatu persekitaran ε dari suatu titik $z_0 = x_0 + iy_0$, dan andaikan turunan parsial orde pertama dari fungsi u dan v terhadap x dan y berada pada semua titik pada persekitaran tersebut. Jika turunan-turunan parsial tersebut kontinu pada (x_0, y_0) dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

   pada titik (x_0, y_0), maka $f'(z_0)$ ada.

7. Misalkan fungsi

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

   terdefinisi pada suatu lingkungan ε dari titik tak nol $z_0 = r_0 e^{(i\theta_0)}$. Misalkan pula bahwa turunan parsial orde pertama dari fungsi u dan v terhadap r dan θ ada dimana-mana dalam lingkungan tersebut dan kontinu dititik $(r_0\theta_0)$. Jika turunan parsial pertama memenuhi persamaan C-R dalam bentuk koordinat polar di (r_0, θ_0), maka turunan $f'(z_0)$ ada.

8. Jika $f'(z) = 0$ untuk setiap z di domain D,maka $f(z)$ fungsi konstan di sepanjang D.

9. Fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ adalah analitik dalam domain D jika dan hanya jika v konjugat harmonik dari u.

2.13 Bahan Diskusi

Diskusikan permasalahan-permasalahan berikut.

1. Tentukan dan sketsalah fungsi $f(z) = z^2$ dengan syarat

$$x^2 - y^2 = c_1 \qquad \text{dan} \qquad 2xy = c_2$$

   dengan $c_1 < 0$ dan $c_2 < 0$.

2. Gunakan induksi matematika dan sifat limit untuk menunjukkan bahwa

$$\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n.$$

3. Tunjukkan bahwa limit fungsi

$$f(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$$

   tidak ada apabila $z \to 0$

4. Buktikan bahwa himpunan S tak terbatas jika dan hanya jika setiap persekitaran dari titik di tak hingga memuat sedikitnya satu titik di S.

5. Buktikan rumus turunan dari jumlahan dua fungsi.

6. Buktikan bahwa komposisi dua fungsi penuh merupakan fungsi penuh.

2.14 Rujukan

1. Agarwal, R.P., Perera, K., dan Pinelas, S., 2011, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer Science+Business Media, London.

2. Brown, J. W, and Churchill, R. V., 2009, *Complex Variables and Applications*, 8th, McGraw-Hill Companies, Inc, New York.

3. Campuzano, J.C.P., 2016, *Complex Analysis Problems with Solutions*, Creative Commons Attribution, Queensland.

4. Murray R. Spiegel, 2009, *Schaum's Outlines: Complex Variables, Second Edition*, The McGraw-Hill Companies. Inc, New York.

2.15 Soal-soal Latihan

1. Gambarkan domain dari fungsi

$$f(z) = Arg\left(\frac{1}{z}\right)$$

2. Nyatakan fungsi

$$f(z) = z + \frac{1}{z}, \qquad z \neq 0$$

dalam bentuk $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

3. Tunjukkan bahwa garis $ay = x$ $(a \neq 0)$ dipetakan pada spiral $\gamma = e^{a\phi}$ oleh transformasi $w = e^z$ dimana $w = \gamma e^{i\phi}$.

4. Diberikan bilangan-bilangan kompleks a dan b. Gunakan definisi limit untuk menunjukkan bahwa

$$\lim_{z \to z_0} (az + b) = az_0 + b.$$

5. Jika $\Delta z = z - z_0$, tunjukkan bahwa

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

jika dan hanya jika

$$\lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0.$$

6. Gunakan teorema limit untuk menunjukkan

$$\lim_{z \to \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4.$$

7. Fungsi

$$g(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \qquad r > 0, -\pi < \theta < \pi$$

analitik di domainnya, dengan turunan

$$g'(z) = \frac{1}{2g(z)}.$$

Tunjukkan bahwa fungsi komposisi $F(z) = g(2z - 2 + i)$ analitik pada bidang $\{(x, y) : x > 1\}$ dengan turunannya

$$F'(z) = \frac{1}{g(2z - 2 + i)}.$$

Bab 3

Fungsi Elementer

Setelah mahasiswa membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah :

1. mampu berpikir secara kritis dan logis;
2. punya kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah-masalah yang relevan;
3. dapat bertanggungjawab dalam melaksanakan tugas;
4. bersifat jujur, etis, kreatif, dan mampu bekerjasama;
5. punya kemampuan dalam berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir mahasiswa yang diharapkan secara khusus adalah :

1. menjelaskan beberapa fungsi elementer, turunannya, dan inversnya;
2. menganalisa dan membuktikan sifat-sifat yang berkaitan dengan fungsi elementer, turunannya, dan inversnya;
3. menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan fungsi elementer, turunannya, dan inversnya.

3.1 Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial e^z didefinisikan sebagai

$$e^z = e^x e^{iy} \qquad (z = x + iy) \tag{3.1}$$

dengan menggunakan rumus Euler

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{3.2}$$

dan y diukur dalam radian. Pada definisi ini, e^z akan menjadi fungsi eksponensial biasa dalam kalkulus ketika diambil $y = 0$ dan untuk memudahkan penulisan, kita sering menulis e^z dalam bentuk $\exp z$.

Perhatikan bahwa karena akar positif ke-n, yaitu $\sqrt[n]{e}$ ditetapkan untuk e^x pada saat $x = \frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, ...)$, maka Ekpresi 3.1 menunjukkan bahwa fungsi eksponensial kompleks e^z juga dapat ditulis $\sqrt[n]{e}$ ketika $z = \frac{1}{n}$ $n = (2, 3, ...)$.

Menurut definisi 3.1, $e^x e^{iy} = e^{x+iy}$, dan berdasarkan sifat

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$$

maka

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \tag{3.3}$$

yang dapat ditunjukkan dengan mudah. Untuk memverifikasinya, misalkan bahwa

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad \text{dan} \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

maka

$$e^{z_1} e^{z_2} = (e^{x_1} e^{iy_1})(e^{x_2} e^{iy_2}) = e^{(x_1 + x_2)} e^{i(y_1 + y_2)}$$

dan karena

$$(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = z_1 + z_2$$

maka ruas kanan persamaan terakhir tersebut menjadi $e^{z_1 + z_2}$. Jadi, sifat pada Persamaan 3.3 telah terbukti.

Perhatikan bagaimana sifat pada Persamaan 3.3 memungkinkan kita untuk menulis $e^{z_1 - z_2} e^{z_2} = e^{z_1}$, atau

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2} \tag{3.4}$$

Dari persamaan di atas dan fakta bahwa $e^0 = 1$, maka $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Ada sejumlah sifat penting lainnya dari e^z, misalnya,

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z \tag{3.5}$$

Perhatikan bahwa turunan e^z untuk semua z memberi tahu kita bahwa e^z adalah *entire function.* Juga berlaku bahwa

$$e^z \neq 0 \tag{3.6}$$

untuk setiap bilangan kompleks z. Bukti dari pernyataan tersebut diperoleh dengan menulis Persamaan 3.1 dalam bentuk

$$e^z = \rho e^{i\phi} \qquad \text{dengan} \qquad \rho = e^x \text{ dan } \phi = y$$

yang menyatakan bahwa

$$|e^z| = e^x \qquad \text{dan} \qquad \arg(e^z) = y + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{3.7}$$

Jadi, pernyataan 3.6 merupakan akibat dari fakta bahwa $|e^z|$ selalu positif.

Sifat e^z, ditemukan berdasarkan fakta bahwa

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} \qquad \text{dan} \qquad e^{2\pi i} = 1$$

yaitu, e^z bersifat periodik, dengan periode imajiner $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \tag{3.8}$$

Untuk sifat lain dari e^z yang tidak dimiliki oleh e^x, kita lihat bahwa e^x selalu positif, namun e^z bisa negatif. Ingat bahwa $e^{i\pi} = -1$. Sehingga

$$e^{i(2n+1)\pi} = e^{i2n\pi + i\pi} = e^{i2n\pi}e^{i\pi} = (1)(-1) = -1 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Contoh 3.1. *Untuk menemukan bilangan kompleks $z = x + iy$ sedemikian sehingga*

$$e^z = 1 + i, \tag{3.9}$$

kita tulis Persamaan 3.9 sebagai

$$e^x e^{iy} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

sehingga berdasarkan kesamaan dua bilangan kompleks, diperoleh

$$e^x = \sqrt{2} \qquad \text{dan} \qquad y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Karena $\ln(e^x) = x$, *maka*

$$x = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2 \qquad \text{dan} \qquad y = (2n + \frac{1}{4})\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Jadi,

$$z = \frac{1}{2}\ln 2 + \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{3.10}$$

3.2 Fungsi Logaritma

Motivasi kita untuk mendefinisikan fungsi logaritma didasarkan pada pencarian solusi w pada persamaan

$$e^w = z \tag{3.11}$$

dengan z adalah bilangan kompleks tak nol. Kita mulai dengan memisalkan $z = re^{i\Theta}$ $(-\pi < \Theta \leq \pi)$ dan $w = u + iv$. Sehingga Persamaan 3.11 menjadi

$$e^u e^{iv} = re^{i\Theta}$$

Ingat bahwa

$$e^u = r \qquad \text{dan} \qquad v = \Theta + 2n\pi$$

dengan n adalah sembarang bilangan bulat. Karena persamaan $e^u = r$ sama dengan $u = \ln r$, maka Persamaan 3.11 dapat dipenuhi jika dan hanya jika w memiliki salah satu nilai dari

$$w = \ln r + i(\Theta + 2n\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

. Jadi, jika kita tulis

$$\log z = \ln r + i(\Theta + 2n\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{3.12}$$

maka Persamaan 3.11 memberitahu kita bahwa

$$e^{log z} = z \qquad (z \neq 0), \tag{3.13}$$

yang berfungsi untuk memotivasi Ekspresi 3.12 sebagai definisi fungsi logaritma (bernilai banyak) dari variabel kompleks tak nol $z = re^{i\Theta}$.

Contoh 3.2. *Jika* $z = -1 - \sqrt{3i}$, *maka* $r = 2$ *dan* $\Theta = \frac{-2\pi}{3}$. *Sehingga*

$$\log(-1 - \sqrt{3i}) = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right) = \ln 2 + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi i$$

dengan $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. ■

Harus ditekankan bahwa tidaklah benar ruas kiri Persamaan 3.13, yaitu eksponensial dan logaritma saling dicoret dan menghasilkan z. Lebih tepatnya, karena Ekspresi 3.12 dapat ditulis

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

dan karena

$$|e^z| = e^x \qquad dan \qquad \arg(e^z) = y + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

saat $z = x + iy$, kita tahu bahwa

$$\log(e^z) = ln|e^z| + i \arg(e^z) = \ln(e^x) + i(y + 2n\pi) = (x + iy) + 2n\pi i)$$

untuk $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.
Jadi,

$$\log(e^z) = z + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{3.14}$$

Nilai utama (*principal value*) dari $\log z$ adalah nilai yang diperoleh dari persamaan 3.12 ketika $n = 0$ dan dinotasikan dengan Log z. Jadi,

$$\text{Log } z = \ln r + i\Theta. \tag{3.15}$$

Perhatikan bahwa Log z terdefinisi dengan baik dan bernilai tunggal ketika $z \neq 0$. Sehingga

$$\log z = \text{Log } z + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{3.16}$$

Ketika z adalah bilangan real positif $z = r$ maka persamaan tersebut menjadi logaritma biasa dalam kalkulus. Untuk melihat ini, kita cukup memisalkan $z = re^{i0}$, pada kasus Persamaan 3.15 menjadi Log $z = \ln r$. Yaitu, Log $r = \ln r$.

Contoh 3.3. *Dari ekspresi Persamaan 3.15, kita dapatkan bahwa*

$$\log 1 = \ln 1 + i(0 + 2n\pi i) = 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Seperti yang telah diharapkan, yaitu $\text{Log}1 = 0$.

Contoh berikut menyatakan bahwa walaupun kita tidak dapat menemukan logaritma dari bilangan real negatif di kalkulus, namun pada bagian ini kita dapat menyatakannya.

Contoh 3.4. *Perhatikan bahwa*

$$\log(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2n\pi i) = (2n+1)\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Sehingga $\text{Log}(-1) = \pi i$

3.3 Branch dan Turunan Logaritma

Jika $z = re^{i\theta}$ adalah bilangan kompleks tak nol, argumen θ memiliki salah satu dari nilai-nilai $\theta = \Theta + 2n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, dimana $\Theta = \text{Arg } z$. Sehingga definisi

$$\log z = \ln r + i(\Theta + 2n\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

dari fungsi logaritma bernilai banyak dapat ditulis

$$\log z = \ln r + i\theta \tag{3.17}$$

Jika kita memisalkan α sebagai bilangan real dan membatasi nilai θ dalam Persamaan 3.17 sehingga $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, maka fungsi

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad (r > \theta, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi), \tag{3.18}$$

dengan komponen-komponen

$$u(r, \theta) = \ln r \qquad \text{dan} \qquad v(r, \theta) = \theta. \tag{3.19}$$

bernilai tunggal dan kontinu dalam domain yang telah didefinisikan. Perhatikan bahwa jika Fungsi 3.18 didefinisikan pada garis dengan sudut $\theta = \alpha$, maka fungsi tersebut tidak akan kontinu. Karena jika z adalah titik pada garis dengan sudut $\theta = \alpha$, maka ada titik-titik yang secara bebas dekat ke z pada saat nilai-nilai v mendekati α dan pada saat nilai-nilai v mendekati $\alpha + 2\pi$.

Fungsi 3.18 tidak hanya kontinu tetapi juga analitik di domain $r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ karena turunan parsial orde pertama dari u dan v kontinu sehingga memenuhi persamaan Cauchy-Riemann.

$$ru_r = v\theta, \qquad u\theta = -rv_r$$

Dengan demikian,

$$\frac{d}{dz}\log z = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + i\theta\right) = \frac{1}{re^{i\theta}}$$

atau

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z} \qquad (|z| > 0, \qquad \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi \tag{3.20}$$

Secara khusus

$$\frac{d}{dz}\text{Log } z = \frac{1}{z} \qquad (|z| > 0, -\pi < \text{Arg } z < \pi). \tag{3.21}$$

Sebuah cabang (*branch*) dari fungsi f bernilai ganda adalah Sembarang fungsi F bernilai tunggal yang analitik dalam beberapa domain di setiap titik z dengan $F(z)$ sebagai salah satu dari nilai-nilai f. Persyaratan keanalitikan mencegah F untuk mengambil nilai f secara acak. Perhatikan bahwa untuk setiap α yang tetap, Fungsi bernilai tunggal 3.18 merupakan suatu *branch* dari Fungsi bernilai ganda 3.17. Fungsi

$$\log z = \ln r + i\Theta(r > 0, -\pi < \Theta < \pi) \tag{3.22}$$

disebut cabang utama (*principal branch*).

Potongan cabang (*branch cut*) adalah bagian dari garis atau kurva yang diperkenalkan dalam rangka untuk mendefinisikan *branch* F dari fungsi f yang bernilai ganda. Titik-titik pada *branch cut* untuk F adalah titik-titik singular dari F, dan setiap titik yang merupakan *branch cut* dari f disebut sebagai titik cabang (*branch point*). Titik asal dan garis dengan sudut $\theta = \alpha$ merupakan *branch cut* dari Persamaan 3.18 pada fungsi logaritmia. *branch cut* untuk *principal branch* pada Persamaan 3.22 terdiri dari titik asal dan garis dengan sudut $\Theta = \pi$. Titik asal merupakan *branch cut* untuk cabang-cabang dari fungsi logaritmik bernilai ganda.

Perhatian khusus perlu diambil dalam menggunakan cabang dari fungsi logaritma, terutama karena identitas yang melibatkan logaritma tidak selalu dapat diterapkan dari kalkulus.

Contoh 3.5. *Ketika principal branch pada Persamaan 3.22 digunakan, maka dapat dilihat bahwa*

$$\text{Log } (i^3) = \text{Log}(-i) = \ln 1 - i\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}i$$

dan $3\text{Log } i = 3(\ln 1 + i\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}i$. *Sehingga,* $\text{Log}(i^3) \neq 3\text{Log } i$.

3.4 Identitas yang Melibatkan Logaritma

Jika z_1 dan z_2 menotasikan dua bilangan kompleks tak nol, maka sangatlah mudah untuk menunjukkan bahwa

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2. \tag{3.23}$$

Persamaan di atas melibatkan fungsi bernilai banyak, yang ditafsirkan dengan cara yang sama dengan pernyataan

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) \tag{3.24}$$

Artinya, jika nilai dua dari tiga logaritma ditentukan, maka nilai ketiga seperti persamaan 3.23 akan terpenuhi.

Verifikasi Persamaan 3.23 dapat didasarkan pada Persamaan 3.24 dengan cara berikut. Karena $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ dan karena semua modulinya adalah bilangan real positif, maka dari sifat logaritma seperti yang ada dalam kalkulus, diperoleh

$$\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|$$

Jadi, persamaan di atas dan Persamaan 3.24 mengakibatkan

$$\ln|z_1 z_2| + i\arg(z_1 z_2) = (\ln|z_1| + i\arg z_1) + (\ln|z_2| + i\arg z_2). \tag{3.25}$$

Akhirnya, dengan melihat cara penafsiran pada Persamaan 3.23 dan 3.24, maka dapat kita simpulkan bahwa Persamaan 3.25 sama dengan Persamaan 3.23.

Contoh 3.6. *Untuk mengilustrasikan pernyataan pada Persamaan 3.23, tulis* $z_1 = z_2 = -1$ *dan ingat bahwa*

$$\log 1 = 2n\pi i \qquad \text{dan} \qquad \log(-1) = (2n+1)\pi i$$

dengan $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. *Perhatikan bahwa* $z_1 z_2 = 1$ *dan dengan menggunakan nilai*

$$\log(z_1 z_2) = 0 \qquad \text{dan} \qquad \log z_1 = \pi i$$

maka Persamaan 3.23 terpenuhi manakala nilai $\log z_2 = -\pi i$ *yang dipilih.*

Di sisi lain, jika nilai-nilai utama

$$\text{Log } 1 = 0 \qquad \text{dan} \qquad \text{Log } (-1) = \pi i$$

digunakan, maka

$$\text{Log }(z_1 z_2) = 0 \qquad \textit{dan} \qquad \text{Log } z_1 + \log z_2 = 2\pi i$$

untuk bilangan kompleks $z_1$danz_2 yang sama. Jadi pernyataan pada Persamaan 3.23, yang kadang benar ketika log *digantikan oleh Log, tidak selalu benar ketika menggunakan nilai-nilai utamanya.*

■

Verifikasi pernyataan

$$\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2 \tag{3.26}$$

yang ditafsirkan dengan cara yang sama seperti Pernyataan 3.23, dapat dibuktikan sebagai latihan.

Selain itu, jika z adalah bilangan kompleks tak nol, maka

$$z^n = e^{n \log z} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{3.27}$$

untuk sembarang nilai $\log z$ yang diambil. Persamaan 3.27 dapat dibuktikan dengan mudah jika kita memisalkan $z = re^{i\theta}$ dan kedua ruas akan menjadi $r^n e^{in\theta}$.

Jika $z \neq 0$, maka

$$z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right) \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{3.28}$$

Dalam hal ini, suku pada ruas kanan memiliki n nilai yang berbeda, dan nilai-nilai tersebut adalah akar-akar dari z. Untuk membuktikan ini, kita misalkan $z = r\exp(i\Theta)$, dengan Θ sebagai nilai utama dari $\arg z$. Maka,

$$\exp\left(\frac{1}{n} \log z\right) = \exp\left[\frac{1}{n} \ln r + \frac{i(\Theta + 2k\pi)}{n}\right]$$

dengan $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Jadi,

$$\exp\left(\frac{1}{n} \log z\right) = \sqrt[n]{r} \exp\left[i\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{3.29}$$

Karena $\exp(i2k\pi/n)$ memiliki nilai yang berbeda hanya ketika $k = 0, 1, ..., n-1$, ruas kanan pada Persamaan 3.29 hanya memiliki n nilai. Persamaan pada ruas kanan, sebenarnya, merupakan ekspresi untuk akar-akar dari z, dan oleh karenanya dapat ditulis $z^{1/n}$. Hal ini mengakhiri pembuktian Persamaan 3.28, yang sebenarnya juga valid ketika n adalah bilangan bulat negatif.

3.5 Eksponen Bilangan Kompleks

Jika $z \neq 0$ dan eksponen c adalah bilangan kompleks, fungsi z^c di definisikan dengan persamaan

$$z^c = e^e \log z \tag{3.30}$$

Dimana $\log z$ menotasikan fungsi logaritma bernilai banyak. Persamaan 3.30 menyatakan suatu definisi yang konsisten dari z^c dalam arti bahwa z^c sudah diketahui berlaku ketika $c = n$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \dots)$ dan $c = \frac{1}{n}$ $(n = \pm1, \pm2, \dots)$.

Contoh 3.7. *Perpangkatan dari z, pada umumnya bernilai banyak, seperti yang diilustrasikan sebagai berikut. Misalkan bahwa*

$$i^{-2i} = \exp(-2i \log i)$$

dan jika $z = i$ maka

$$\log i = \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = (2n + \frac{1}{2})\pi i \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \dots.)$$

Ini menunjukkan bahwa

$$i^{-2i} = \exp[(4n+1)\pi] \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \dots) \tag{3.31}$$

Perhatikan bahwa semua nilai-nilai i^{-2i} adalah bilangan real.

Karena fungsi eksponensial memiliki sifat $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$, yaitu,

$$\frac{1}{z^c} = \frac{1}{exp(c \log z)} = \exp(-c \log z) = z^{-c}$$

maka $1/i^{2i}$ dapat ditulis $\frac{1}{i^{2i}} = i^{-2i}$. Menurut ekspresi pada Persamaan 3.31, maka

$$\frac{1}{i^{2i}} = \exp[(4n+1)\pi] \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \dots) \tag{3.32}$$

■

Jika $z = re^{i\theta}$ dan α adalah bilangan real, cabang (*branch*)

$$\log z = In\ r + i\theta \qquad (r > o, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

dari fungsi logaritmik bernilai tunggal dan analitik dalam domain yang telah didefinisikan. Ketika *branch* tersebut digunakan, maka fungsi

$z^c = \exp(c \log z)$ bernilai tunggal dan analitik dalam domain yang sama. Turunan dari *branch* dari z^c ditemukan menggunakan aturan rantai

$$\frac{d}{dz} z^c = \frac{d}{dz} \exp(c \log z) = \frac{c}{z} \exp(c \log z)$$

dan berdasarkan identitas $z = \exp(\log z)$, maka diperoleh

$$\frac{d}{dz} z^c = c \frac{\exp(c \log z)}{\exp(\log z)} = c \exp[(c-1) \log z]$$

atau

$$\frac{d}{dz} z^c = cz^{c-1} \qquad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi) \tag{3.33}$$

Nilai utama (*principal value*) dari z^c $(P \cdot V \cdot z^c)$ terjadi ketika $\log z$ digantikan oleh $Log\ z$ pada definisi Persamaan 3.30:

$$P \cdot V \cdot z^c = e^{c\ Log\ z} \tag{3.34}$$

Persamaan 3.34 juga berfungsi untuk mendefinisikan cabang utama (*principal branch*) dari fungsi z^c pada domain $|z| > 0, -\pi < Arg(z) < \pi$

Contoh 3.8. *Nilai utama dari* $(-i)^i$ *adalah*

$$exp[i \log(-i)] = \exp\left[i\left(\ln 1 - i\frac{\pi}{2}\right)\right] = \exp\frac{\pi}{2}$$

Jadi,

$$P \cdot V \cdot (-i)^i = \exp\frac{\pi}{2} \tag{3.35}$$

Contoh 3.9. *Cabang utama dari* $z^{\frac{2}{3}}$ *dapat ditulis*

$$\exp\left(\frac{2}{3}\ Log\ z\right) = \exp\left(\frac{2}{3} \in r + \frac{2}{3} i\Theta\right) = \sqrt[3]{r^2} \exp\left(i\frac{2\Theta}{3}\right)$$

Jadi,

$$P \cdot V \cdot z^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{r^2} \cos\frac{2\Theta}{3} + i\sqrt[3]{r^2} \sin\frac{2\Theta}{3} \tag{3.36}$$

fungsi ini analitik dalam domain $r > 0, -\pi < \Theta < \pi$

Contoh 3.10. *Misalkan bahwa z_1, z_2, dan z_3 adalah bilangan kompleks tidak nol*

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 1 - i, \qquad dan \qquad z_3 = -1 - i$$

Jika nilai-nilai utama dari perpangkatan diambil, maka

$$(z_1 z_2)^i = 2^i = e^{iLog\ 2} = e^{i(\ln 2 + i0)} = e^{iln2}$$

dan

$$z_1^i = e^{iLog(1+i)} = e^{i(ln\sqrt{2}+i\pi/4} = e^{-\pi/4}e^{i(ln2)/2}$$

$$z_2^i = e^{iLog(1-i)} = e^{i(ln\sqrt{2}-i\pi/4} = e^{\pi/4}e^{i(ln2)/2}$$

jadi,

$$(z_1 z_2)^i = z_1^i z_2^i \tag{3.37}$$

seperti yang mungkin telah diharapkan.

Di sisi lain, kita juga mendapatkan nilai-nilai utama dari

$$(z_2 z_3)^i = (-2)^i = e^{iLog(-2)} = e^{i(ln2+i\pi)} = e^{-\pi}e^{iln2}$$

dan

$$z_3^i = e^{ilog(-1-i)} = e^{i(ln\sqrt{2}-i\frac{3\pi}{4})} = e^{\frac{3\pi}{4}}e^{i(ln2)2}$$

Sehingga

$$(z_2 z_3)^i = [e^{\pi 4}e^{i(ln2)2}][e^{3\pi 4}e^{i(ln2)2}]e^{-2\pi}$$

atau

$$(z_2 z_3)^i = z_2^i z_3^i e^{-2\pi} \tag{3.38}$$

■

Menurut definisi pada Persamaan 3.30, fungsi eksponensial dengan basis c, dimana c adalah konstanta kompleks tak nol, dan ditulis

$$c^z = e^{z \log c} \tag{3.39}$$

Perhatikan bahwa meskipun e^z, secara umum, bernilai banyak menurut definisi pada Persamaan 3.39, interpretasi biasa dari e^z terjadi ketika nilai utama dari logaritma diambil. Ini karena nilai utama $\log e$ adalah 1.

Ketika nilai $\log c$ ditentukan, c^z adalah *entire function* dari z. Faktanya,

$$\frac{d}{dz}c^z = \frac{d}{dz}e^{z\log c} = e^{z\log c}\log c$$

dan ini menunjukkan bahwa

$$\frac{d}{dz}c^z = c^z \log c \tag{3.40}$$

3.6 Fungsi Trigonometri

Berdasarkan rumus Euler,

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad dan \qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

untuk setiap bilangan real x. Sehingga

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x \qquad dan \qquad e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$

jadi,

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad dan \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Oleh karena itu, tidak aneh untuk mendefinisikan fungsi sinus dan kosinus dari variabel kompleks z sebagai berikut:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad dan \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{3.41}$$

Fungsi-fungsi adalah *entire function* karena fungsi-fungsi tersebut adalah kombinasi linear dari *entire function* e^{iz} dan e^{-iz}. Dengan menggunakan hasil turunan fungsi-fungsi eksponensial

$$\frac{d}{dz}e^{iz} = ie^{iz} \qquad dan \qquad \frac{d}{dz}e^{-iz} = -ie^{-iz}$$

maka turunan dari Persamaan 3.41 adalah

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z \qquad dan \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z \tag{3.42}$$

Sangat mudah untuk melihat dari definisi pada Persamaan 3.41 bahwa fungsi sinus dan kosinus tetap merupakan fungsi ganjil dan genap, yaitu:

$$\sin(-z) = -\sin z, \qquad \cos(-z) = \cos z \tag{3.43}$$

selain itu,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{3.44}$$

hasil di atas merupakan rumus Euler ketika z adalah bilangan real.

Berbagai identitas yang berlaku dalam trigonometri adalah

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \tag{3.45}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2. \tag{3.46}$$

Berdasarkan persamaan tersebut, diperoleh

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \qquad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \tag{3.47}$$

$$\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z, \qquad \sin(z - \frac{\pi}{2}) = -\cos z, \tag{3.48}$$

dan

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \tag{3.49}$$

Karakter periodik dari $\sin z$ dan $\cos z$ juga berlaku:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \qquad \sin(z + \pi) = -\sin z, \tag{3.50}$$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \qquad \cos(z + \pi) = -\cos z. \tag{3.51}$$

Ketika y adalah bilangan real, definisi pada Persamaan 3.41 dan fungsi hiperbolik

$$\sinh y = \frac{e^y - e^- y}{2} \qquad dan \qquad \cosh y = \frac{e^y + e^- y}{2}$$

dari kalkulus dapat digunakan untuk mendapatkan

$$\sin(iy) = i \sinh y \qquad dan \qquad \cos(iy) = \cosh y \tag{3.52}$$

Selain itu, komponen real dan imajiner dari $\sin z$ dan $\cos z$ dapat ditampilkan dalam bentuk fungsi hiperbolik:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \tag{3.53}$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \tag{3.54}$$

dimana $z = x + iy$. Untuk mendapatkan Ekspresi 3.53 dan 3.54, kita tulis

$$z_1 = x \qquad dan \qquad z_2 = iy$$

dalam Identitas 3.45 dan 3.46 dan kemudian gunakan Persamaan 3.52. Perhatikan bahwa ketika Ekpresi 3.53 diperoleh, Persamaan 3.54 juga akan diperoleh berdasarkan fakta bahwa jika turunan fungsi

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ada pada suatu titik $z = (x, y)$, maka

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$$

Ekspresi 3.53 dan 3.54 dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \tag{3.55}$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \tag{3.56}$$

Akar dari fungsi $f(z)$ adalah bilangan kompleks z_0 sedemikian sehingga $f(z_0) = 0$. Karena $\sin z$ menjadi fungsi sinus biasa dalam kalkulus ketika z bilangan real, maka bilangan real $z = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ adalah akar dari $\sin z$. Untuk menunjukkan bahwa tidak ada akar lainnya, kita asumsikan bahwa $\sin z = 0$ dan dari Persamaan 3.55 diperoleh

$$\sin^2 x + \sinh^2 y = 0$$

Jumlah dua kuadrat tersebut menunjukkan bahwa

$$\sin x = 0 \qquad dan \qquad \sinh y = 0$$

Terbukti, kemudian, $x = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ dan $y = 0$; yaitu,

$$\sin z = 0 \qquad \text{jika dan hanya jika} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{3.57}$$

Karena,

$$\cos z = -\sin(z - \frac{\pi}{2})$$

berdasarkan identitas pada Persamaan 3.48 bagian kedua,

$$\cos z = 0 \qquad \text{jika dan hanya jika} \qquad z = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{3.58}$$

Jadi, seperti halnya dengan $\sin z$, akar dari $\cos z$ semuanya bilangan real.

Empat fungsi trigonometri lainnya didefinisikan dalam bentuk fungsi sinus dan kosinus sebagai berikut.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \tag{3.59}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z} \tag{3.60}$$

Perhatikan bahwa hasil bagi $\tan z$ dan $\sec z$ analitik di mana-mana kecuali di titik-titik singular.

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

yang merupakan akar dari $\cos z$. Demikian juga, $\cot z$ dan $\csc z$ memiliki titik-titik singular pada akar dari $\sin z$, yaitu

$$z = n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Dengan menurunkan ruas kanan pada Persamaan 3.59 dan 3.60, kita peroleh rumus turunan berikut

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z, \qquad \frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z \tag{3.61}$$

$$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z, \qquad \frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z \tag{3.62}$$

Karakter periodik masing-masing fungsi trigonometri yang didefinisikan oleh Persamaan 3.59 dan 3.60 mengikuti karakter periodik Persamaan 3.50 dan 3.51. Sebagai contoh,

$$\tan(z + \pi) = \tan z. \tag{3.63}$$

3.7 Fungsi Hiperbolik

Sinus hiperbolik dan kosinus hiperbolik dari variabel kompleks didefinisikan sama dengan di variabel real, yaitu

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{3.64}$$

Karena e^z dan e^{-z} *entire function*, maka jelas bahwa fungsi $\sinh z$ dan $\cosh z$ pada Persamaan 3.64 juga merupakan *entire function.* Selain itu, dapat kita tunjukkan bahwa

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z, \qquad \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z \tag{3.65}$$

Keberadaan fungsi eksponensial dalam Persamaan 3.64 dan dalam fungsi sinus $\sin z$ dan fungsi kosinus $\cos z$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

menyebabkan fungsi sinus dan kosinus hiperbolik memiliki hubungan yang erat dengan fungsi-fungsi trigonometri

$$-i\sinh(iz) = \sin z, \qquad \cosh(iz) = \cos z \tag{3.66}$$

$$-i\sin(iz) = \sinh z, \qquad \cos(iz) = \cosh z, \tag{3.67}$$

Beberapa identitas yang paling sering digunakan yang dalam sinus hiperbolik dan fungsi kosinus adalah:

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \cosh(-z) = \cosh z, \tag{3.68}$$

$$\cosh^2 z - sinh^2 z = 1, \tag{3.69}$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2, \tag{3.70}$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \tag{3.71}$$

dan

$$\sinh z = \sinh x cosy + i\cosh x \sin y, \tag{3.72}$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i\sinh x \sin y, \tag{3.73}$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x \sin^2 y, \tag{3.74}$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x \cos^2 y, \tag{3.75}$$

dengan $z = x+iy$. Identitas ini dapat dibuktikan langsung dari definisi pada Persamaan 3.64, Identitas-identitas tersebut biasanya lebih mudah diperoleh dari identitas trigonometri, dengan bantuan Persamaan 3.66 dan 3.67.

Contoh 3.11. *Untuk mengilustrasikan metode pembuktian yang baru saja disarankan, mari kita verifikasi identitas 3.74. Menurut Persamaan 3.67 bagian pertama,* $|\sinh z|^2 = |\sinh(iz)|^2$*. Jadi,*

$$|\sinh z|^2 = |\sinh(-y + ix)|^2 , \tag{3.76}$$

dengan $z = x + iy$*. Tetapi dari Persamaan 3.78, diketahui bahwa*

$$|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x \sinh^2 y$$

dan fakta ini memungkinkan kita untuk menulis Persamaan 3.76 dalam bentuk yang diinginkan, yaitu Persamaan 3.74.

■

Berdasarkan karakter periodik $\sin z$ dan $\cos z$ dan Persamaan 3.67 maka kita dapatkan karakter periodik $\sinh z$ dan $cosh z$, yaitu $2\pi i$. Persamaan 3.67 dan Persamaan 3.80 serta 3.81, menunjukkan bahwa

$$\sinh z = 0 \qquad \text{jika dan hanya jika} \qquad z = n\pi i (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...), \tag{3.77}$$

dan

$$\cosh z = 0 \qquad \text{jika dan hanya jika} \qquad z = \frac{\pi}{2} + n\pi)i(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{3.78}$$

Tangen hiperbolik z ditentukan oleh persamaan

$$\tanh x = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \tag{3.79}$$

dan fungsi ini analitik di setiap domain asalkan $\cosh z \neq 0$. Fungsi-fungsi $\cosh z$, $\operatorname{sech} z$, dan $\operatorname{csch} z$ secara berturut-turut adalah kebalikan dari $\tanh z$, $\cosh z$, dan $\sinh z$. Dengan mudah kita dapat membuktikan rumus turunan berikut, yang caranya sama dengan yang ada dalam kalkulus untuk fungsi yang pada variabel real:

$$\frac{d}{dz} \tanh z = sech^2 z, \qquad \frac{d}{dz} \coth z = -csch^2 z, \tag{3.80}$$

$$\frac{d}{dz} sechz = -sechz \tanh z, \qquad \frac{d}{dz} cschz = -cschz \coth z. \tag{3.81}$$

3.8 Invers Fungsi Trigonometri dan Hiperbolik

Invers fungsi trigonometri dan hiperbolik akan dijelaskan dalam bentuk logaritma. Untuk mendefinisikan invers fungsi sinus $\sin^{-1} z$, kita misalkan

$$w = \sin^{-1} z \qquad \text{ketika} \qquad z = \sin w$$

yaitu, $w = \sin^{-1} z$ ketika,

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

Jika kita menulis persamaan ini dalam bentuk,

$$(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0$$

yang merupakan kuadrat dari e^{iw}, maka kita dapatkan

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.82}$$

dalam hal ini, $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ merupakan fungsi bernilai ganda dari z. Dengan mengambil logaritma dari setiap ruas persamaan 3.82 dan adanya fakta bahwa $w = \sin^{-1} z$, maka didapatkan ekspresi

$$\sin^{-1} z = -i \log[iz + (1 - z^2]^{\frac{1}{2}} \tag{3.83}$$

Contoh berikut menekankan fakta bahwa $\sin^{-1} z$ adalah fungsi bernilai ganda dengan banyak nilai tanpa batas di setiap titik z.

Contoh 3.12. *Ekspresi 3.83 menunjukkan bahwa*

$$\sin^{-1}(-i) = -i \log(1 \pm \sqrt{2})$$

tetapi

$$\log(1 + \sqrt{2}) = \ln(1 + \sqrt{2}) + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

dan

$$\log(1 - \sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2} - 1) + (2n + 1)\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Karena

$$\ln(\sqrt{2} - 1) = \ln \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = -\ln(1 + \sqrt{2})$$

maka, bilangan kompleks

$$(-1)^n \ln(1+\sqrt{2}) + n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

Merupakan himpunan nilai $\log(1 \pm \sqrt{2})$. *Jadi, dalam bentuk persegi panjang,*

$$\sin^{-1}(-i) = n\pi + i(-1)^{n+1} \ln(1+\sqrt{2}) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

■

Kita dapat dapat menerapkan teknik yang digunakan dalam menurunkan Ekspresi 3.83 pada $\sin^{-1} z$ untuk menunjukkan bahwa

$$\cos^{-1} z = -i \log[z + i(1-2^2)^{\frac{1}{2}}] \tag{3.84}$$

dan

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log(\frac{i+z}{i-z}) \tag{3.85}$$

Dalam hal ini, $\cos^{-1} z$ dan $\tan^{-1} z$ merupakan fungsi yang bernilai banyak. Ketika *branch* tertentu dari fungsi akar kuadrat dan logaritmik digunakan, ketiga fungsi invers menjadi bernilai tunggal dan analitik karena fungsi-fungsi tersebut adalah komposisi fungsi analitik. Turunan dari ketiga fungsi ini mudah diperoleh dari ekspresi logaritmanya. Turunan dari

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.86}$$

$$\frac{d}{dz} \cos^{-1} z = \frac{-1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.87}$$

bergantung pada nilai akar kuadrat yang dipilih. Sedangkan turunan dari

$$\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{(1+z^2)} \tag{3.88}$$

bergantung pada fungsi bernilai tunggal manakah yang diambil.

Invers fungsi hiperbolik dapat diperlakukan dengan cara yang sesuai. Hasil inversnya adalah

$$\sinh^{-1} z = \log[z + (z^2+1)^{\frac{1}{2}}] \tag{3.89}$$

$$\cosh^{-1} z = \log[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}] \tag{3.90}$$

dan

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} \tag{3.91}$$

Notasi alternatif yang digunakan untuk semua fungsi invers tersebut adalah $\arcsin z$, $\arccos z$, $\arctan z$, dan seterusnya.

3.9 Rangkuman

1. Sifat-sifat eksponensial

   (a) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

   (b) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

2. Fungsi logaritma

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

3. Fungsi trigonometri

$$2 \sin z_1 \cos z_2 = \sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2),$$

3.10 Bahan Diskusi

Diskusikan permasalahan-permasalahan berikut:

1. Tunjukkan bahwa

$$|e^{z^2}| \leq e^{|z|^2}$$

2. Diskripsikan perilaku $e^z = e^x e^{iy}$ apabila $x \to -\infty$ dan juga bagaimana jika $y \to \infty$.

3. Tentukan semua akar dari persamaan

$$\log z = \frac{\pi i}{2}.$$

3.11 Rujukan

1. Agarwal, R.P., Perera, K., dan Pinelas, S., 2011, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer Science+Business Media, London.

2. Brown, J. W, and Churchill, R. V., 2009, *Complex Variables and Applications*, 8th, McGraw-Hill Companies, Inc, New York.

3. Campuzano, J.C.P., 2016, *Complex Analysis Problems with Solutions*, Creative Commons Attribution, Queensland.

4. Murray R. Spiegel, 2009, *Schaum's Outlines: Complex Variables, Second Edition*, The McGraw-Hill Companies. Inc, New York.

3.12 Soal-soal Latihan

1. Buktikan bahwa
$$|\exp(-2z)| < 1$$
jika dan hanya jika
$$Re\{z\} > 0.$$

2. Tunjukkan bahwa
$$Log(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{2}i.$$

3. Temukan nilai dari
   (a) i^i
   (b) $\left[\frac{e}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)\right]^{3\pi i}$
   (c) $(1-i)^{4i}$

Bab 4

Integral

Setelah mahasiswa membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah :

1. mampu berpikir secara kritis dan logis;
2. punya kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah-masalah yang relevan;
3. dapat bertanggungjawab dalam melaksanakan tugas;
4. bersifat jujur, etis, kreatif, dan mampu bekerjasama;
5. punya kemampuan dalam berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir mahasiswa yang diharapkan secara khusus adalah :

1. menjelaskan konsep yang berhubungan dengan integrasi fungsi kompleks dan teorema Green;
2. menganalisa dan membuktikan sifat-sifat yang berhubungan dengan integrasi fungsi kompleks dan teorema Green;
3. menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan integrasi fungsi kompleks dan teorema Green;
4. menjelaskan konsep yang berhubungan dengan integrasi fungsi pada daerah terhubung sederhana dan berganda;

5. menganalisa dan membuktikan sifat-sifat yang berhubungan dengan integrasi fungsi pada daerah terhubung sederhana dan berganda;

6. menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan integrasi fungsi pada daerah terhubung sederhana dan berganda;

7. menjelaskan konsep yang berhubungan dengan rumus integral Cauchy;

8. menganalisa dan membuktikan sifat-sifat yang berhubungan dengan rumus integral Cauchy;

9. menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan rumus integral Cauchy.

4.1 Turunan Fungsi

Pemahaman tentang limit dan kekontinuan fungsi pada bab sebelumnya sangat penting untuk memahami turunan fungsi peubah kompleks.

Definisi 4.1. *Diberikan f fungsi yang terdefinisi di titik z_0 dan pada persekitannya. Turunan fungsi f di titik z_0, ditulis $f'(z_0)$, didefinisikan sebagai*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{4.1}$$

asalkan limit di ruas kanan ada. Fungsi f dikatakan diferensiabel atau dapat diturunkan di z_0 bilamana turunan f di z_0 ada.

Bilamana diekspresikan $\Delta z = z - z_0$, persamaan (4.1) dapat dinyatakan sebagai

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

Sebagai ilustrasi, diberikan dua contoh fungsi yang mempunyai turunan di suatu titik dan yang tidak mempunyai turunan di suatu titik tertentu masing-masing diberikan dalam Contoh 4.2 dan Contoh 4.3.

Contoh 4.2. *Diberikan fungsi* $f(z) = z^2$. *Untuk setiap* $z \in \mathbb{C}$, *diperoleh*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z. \end{aligned}$$

Jadi dalam hal ini, jika $z_0 = 1 + i$, *maka* $f'(z_0) = 2 + 2i$, *dan sebagainya.*

Contoh 4.3. *Pandang fungsi* $f(z) = |z|^2$. *Di sini, untuk setiap* $z \in \mathbb{C}$ *diperoleh*

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} \\ &= \frac{(z + \Delta z)(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z} \\ &= \overline{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, jika diambil $\Delta z = i\Delta y$ *diperoleh*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \overline{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = z - \overline{z}.$$

Sedangkan, jika diambil $\Delta z = \Delta x$ *diperoleh*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \overline{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = z + \overline{z}.$$

Dari kedua hasil ini disimpulkan $\lim_{\Delta z \to 0} \overline{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ *tidak ada. Jadi dalam hal ini* $f'(z)$ *tidak ada untuk* $z \neq 0$. *Periksa bagaimana untuk* $f'(0)$.

Pandang turunan fungsi bernilai kompleks w atas peubah real t, dituliskan

$$w(t) = u(t) + iv(t) \tag{4.2}$$

dengan u dan v merupakan fungsi-fungsi bernilai real atas t. Turunan fungsi $w(t)$, ditulis $w'(t)$, atas fungsi (4.2) di titik t didefinisikan sebagai

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t) \tag{4.3}$$

asalkan u' dan v' di t ada. Dari definisi persamaan (4.3), untuk setiap konstanta kompleks $z_0 = z_0 + iy_0$, diperoleh

$$\begin{aligned}
[z_0 w(t)]' &= [(x_0 + iy_0)(u + iv)]' = [(x_0 u - y_0 v) + i(y_0 u + x_0 v)]' \\
&= (x_0 u - y_0 v)' + i(y_0 u + x_0 v)' \\
&= (x_0 u' - y_0 v') + i(y_0 u' + x_0 v') \\
&= (x_0 + iy_0)(u' + iv') = z_0 w'(t).
\end{aligned}$$

Definisi 4.4. *Diberikan $w(t)$ fungsi bernilai kompleks atas peubah real t yang dapat dituliskan*

$$w(t) = u(t) + iv(t)$$

dengan u dan v fungsi-fungsi bernilai real. Integral fungsi $w(t)$ pada selang $a \leq t \leq b$ didefinisikan sebagai

$$\int_a^b w(t)\ dt = \int_a^b u(t)\ dt + i \int_a^b v(t)\ dt \tag{4.4}$$

asalkan integral-integral di ruas kanan ada.

Contoh 4.5. *Evaluasi integral*

$$\int_0^1 (1 + it)^2\ dt$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1 - i2t)^2\ dt &= \int_0^1 [(1 - 4t^2) - i4t]\ dt = \int_0^1 (1 - 4t^2)\ dt - i \int_0^1 4t\ dt \\
&= \left(t - \frac{4}{3}t^3\right)_0^1 - i\left(2t^2\right)_0^1 \\
&= -\frac{1}{3} - 2i.
\end{aligned}$$

Sekarang, diberikan fungsi

$$w(t) = u(t) + iv(t)$$

dan

$$W(t) = U(t) + iV(t)$$

dengan u, v, U, dan V fungsi-fungsi bernilai real yang kontinu pada selang $a \leq t \leq b$. Jika $W'(t) = w(t)$ untuk setiap $t \in [a, b]$, maka $U'(t) = u(t)$ dan $V'(t) = v(t)$. Berdasarkan persamaan (4.4), diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_a^b w(t)\, dt &= U(t)\Big|_a^b + iV(t)\Big|_a^b \\
&= \big(U(b) - U(a)\big) + i\big(V(b) - V(a)\big) \\
&= \big(U(b) + iV(b)\big) - \big(U(a) + iV(a)\big) \\
&= W(b) - W(a) = W(t)\Big|_a^b
\end{aligned}$$

4.2 Integral Kontur

Busur C dikatakan *busur sederhana* jika ia tidak berpotongan dengan dirinya sendiri, yakni jika $z(t_1) \neq z(t_2)$ biamana $t_1 \neq t_2$. Bilamana C adalah busur sederhana kecuali $z(a) = z(b)$ dengan $t = a$ adalah titik awal dan $t = b$ adalah titik akhir, maka dikatakan C adalah *kurva/busur tertutup sederhana.*

Contoh 4.6. *Garis yang didefinisikan oleh persamaan*

$$z = \begin{cases} x + ix & , 0 \leq x \leq 1 \\ x + i & , 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

dan memuat segmen garis dari 0 *ke* $1 + i$ *lalu dilanjutkan dari* $1 + i$ *ke* $2 + i$ *diberikan dalam Gambar 4.1 merupakan busur sederhana.*

Contoh 4.7. *Lingkaran satuan*

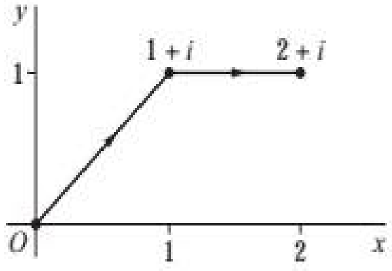
$$z = e^{i\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

yang berpusat di titik asal adalah kurva tertutup sederhana dengan arah berlawanan dengan arah jarum jam. Untuk lingkaran yang berpusat di z_0 *dengan jari-jari* R *dengan arah berlawanan arah jarum jam adalah*

$$z = z_0 + Re^{i\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Sedangkan lingkaran yang berpusat di z_0 *dengan jari-jari* R *dengan arah searah jarum jam adalah*

$$z = z_0 + Re^{-i\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$



Gambar 4.1: Busur sederhana berupa dua segmen garis

Untuk selanjutnya, bilamana suatu kontur tertutup dengan arah berlawanan dengan arah jarum jam dikatakan *arah positif* dan yang searah jarum jam disebut *arah negatif*.

Definisi 4.8. *Diberikan C kontur pada bidang kompleks dan fungsi $f(z)$ yang terdefinisi pada C. Integral garis f pada C (dari z_1 ke z_2) adalah*

$$\int_C f(z)\ dz,$$

atau bilamana integralnya tidak bergantung pada kontur C adalah

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\ dz.$$

Misal $z = z(t), a \leq t \leq b$ menyatakan kontur C dari $z_1 = z(a)$ ke $z_2 = z(b)$. Diberikan $f(z)$ fungsi kontinu pada C. Integral garis atau integral kontur f sepanjang C didefinisikan

$$\int_C f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\ dt.$$

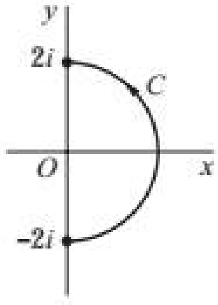
Contoh 4.9. *Evaluasi integral*

$$\int_C \overline{z}\ dz$$

dengan C adalah busur setengah lingkaran

$$z = 2e^{i\theta}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

dari titik $z = -2i$ ke titik $z = 2i$, seperti diberikan pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2: Busur setengah lingkaran

Penyelesaian:
Karena

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \text{dan} \qquad (e^{i\theta})' = ie^{i\theta},$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_C \overline{z}\, dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{2e^{i\theta}}(2e^{i\theta})'\, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2e^{-i\theta}(2ie^{i\theta})\, d\theta \\
&= 4i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 4\pi i.
\end{aligned}$$

Perlu diketahui bahwa integral fungsi f atas dua kontur berbeda meskipun titik awal dan titik akhir dua kontur tersebut sama, bisa jadi menghasilkan nilai integral yang berbeda seperti diberikan pada Contoh 4.10.

Contoh 4.10. *Evaluasi integral* $f(z) = y - x + ix^2$ *pada kontur* C_1 *sepanjang kurva* $y = x$ *dan integral* $f(z)$ *pada kontur* C_2 *sepanjang kurva* $y = x^2$ *dari titik* $z = 0$ *ke* $z = 1 + i$.

Penyelesaian:
Untuk kurva $y = x$, diperoleh $dz = dx + idy = dx + idx$. Oleh karena

itu

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z) &= \int_{C_1} [(y-x)+ix^2](dx+idy) \\
&= \int_{x=0}^{1} [(x-x)+ix^2](dx+idx) \\
&= i(1+i)\int_0^1 x^2 dx = (-1+i)\frac{1}{3}x^3\big|_0^1 = \frac{-1+i}{3}
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk kurva $y = x^2$, diperoleh $dz = dx + idy = dx + i2xdx$. Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} f(z)\ dz &= \int_{C_2} [(y-x)+ix^2](dx+idy) \\
&= \int_{x=0}^{1} [(x-x^2)+ix^2](dx+i2xdx) \\
&= \int_0^1 [(x-x^2-2x^3)+i(2x^2-2x^3+x^2)]dx \\
&= (\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4)\big|_0^1 + i(x^3-\frac{1}{2}x^4)\big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Selanjutnya dibahas satu sifat integral dari fungsi terbatas. Bilamana C menyatakan kontur $z = z(t)$ dengan $a \leq t \leq b$, berdasarkan sifat modulus diperoleh

$$\Big|\int_C f(z)\ dz\Big| = \Big|\int_a^b f[z(t)]z'(t)\ dt\Big| \leq \int_a^b |f[z(t)]||z'(t)|\ dt$$

Jadi, untuk setiap bilangan real nonnegatif M sedemikian hingga nilai f pada C memenuhi ketaksamaan $|f(z)| \leq M$, maka diperoleh

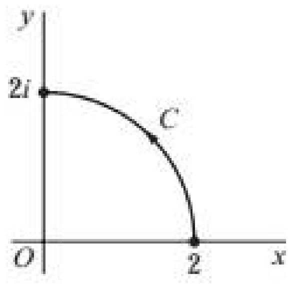
$$\Big|\int_C f(z)\ dz\Big| \leq M\int_a^b |z'(t)|\ dt.$$

Karena integral pada ruas kanan menyatakan panjang kontur, misalkan L, maka diperoleh

$$\Big|\int_C f(z)\ dz\Big| \leq ML. \tag{4.5}$$

Contoh 4.11. *Diberikan C busur lingkaran $|z| = 2$ dari titik $z = 2$ ke $z = 2i$ yang berada di kuadran pertama, seperti diberikan pada Gambar 4.3. Tanpa mengevaluasi integralnya, buktikan bahwa*

$$\Big|\int_C \frac{z+4}{z^3-1}\,dz\Big| \leq \frac{6\pi}{7}.$$



Gambar 4.3: Busur lingkaran $|z| = 2$ di kuadran pertama

Penyelesaian:
Diperhatikan bahwa

$$|z+4| \leq |z| + 4 = 2 + 4 = 6$$

dan

$$|z^3 - 1| \geq \big||z|^3 - 1\big| = |2^3 - 1| = 7.$$

Jadi, jika z di C maka berlaku

$$\Big|\frac{z+4}{z^3-1}\Big| = \frac{|z+4|}{|z^3-1|} \leq \frac{6}{7}.$$

Oleh karena itu dapat dipilih $M = \frac{6}{7}$.
Sedangkan, untuk panjang busur C adalah $L = \pi$.
Dengan demikian, diperoleh

$$\Big|\int_C \frac{z+4}{z^3-1}\,dz\Big| \leq ML = \frac{6\pi}{7}.$$

Meskipun, secara umum, integral $f(z)$ dari z_1 ke z_2 tergantung pada lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut (lihat Contoh 4.10), terdapat syarat-syarat tertentu sehingga integral $f(z)$ tidak lagi bergantung pada kontur/lintasan. Untuk itu, diberikan teorema berikut.

Teorema 4.12. *Diberikan $f(z)$ fungsi kontinu pada domain D. Pernyataan-pernyataan berikut ekivalen*

(i). $f(z)$ *mempunyai antiturunan* $F(z)$ *di* D*;*

(ii). $\int_{C_1} f(z)\ dz = \int_{C_2} f(z)\ dz$ *untuk setiap kontur* C_1 *dan* C_2 *yang berada di dalam* D *yang menghubungkan titik* z_1 *ke titik* z_2*;*

(iii). $\int_C f(z)\ dz = 0$ *untuk setiap kontur/lintasan tertutup* C *yang berada di dalam* D.

Contoh 4.13. *Fungsi kontinu* $f(z) = z^2$ *mempunyai antiturunan* $F(z) = z^3/3$ *untuk setiap* z. *Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 4.12, integral* $f(z)$ *dari titik* $z_1 = 0$ *ke titik* $z_2 = 1 + i$ *tidak bergantung pada kontur yang menghubungkan kedua titik tersebut. Misal dipilih kontur* C *berupa garis* $y = x$*, diperoleh*

$$\begin{aligned}
\int_{z_1}^{z_2} f(z)\ dz &= \int_C f(z)\ dz = \int_C (x+iy)^2\ (dx + idy) \\
&= \int_{x=0}^{x=1} [(x^2 - y^2) + i2xy](dx + idx) \\
&= 2i(1+i) \int_0^1 2x^2\ dx \\
&= (-2+2i)\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}(-1+i).
\end{aligned}$$

Pada Teorema 4.12, jika pernyataan (i) benar maka integral f tidak bergantung pada kontur yang menghubungkan kedua titik. Bilamana $f(z)$ disajikan dalam persamaan parametrik $z = z(t)$ $(a \le t \le b)$, diperoleh

$$\frac{d}{dt}F[z(t)] = F'[z(t)]z'(t) = f[z(t)]z'(t), \qquad a \le t \le b.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\ dz &= \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt = F[z(t)]\Big|_a^b \\
&= F[z(b)] - F[z(a)] = F(z_2) - F(z_1).
\end{aligned}$$

Dengan demikian, integral pada Contoh 4.13 dapat diselesaikan secara langsung

$$\begin{aligned}
\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz &= \int_0^{1+i} z^2\, dz \\
&= \frac{1}{3}z^3\Big|_0^{1+i} \\
&= \frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{2}{3}(-1+i).
\end{aligned}$$

Perlu diketahui, integral fungsi $f(z) = 1/z$ pada kontur tertutup yang memuat titik asal tidak dapat dievaluasi dengan cara seperti di atas. Fungsi $F(z) = \log z$ tidak diferensiabel (tidak dapat diturunkan) di sebarang cabang $F(z)$. Secara khusus, jika sinar $\theta = \theta_0$ berpangkal di titik asal, maka $F'(z)$ tidak ada di titik potong sinar $\theta = \theta_0$ dengan kontur C. Untuk mengevaluasi integral $f(z) = 1/z$ pada kontur tertutup yang memuat titik asal, diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 4.14. *Evaluasi*

$$\int_C \frac{1}{z}\, dz$$

dengan C *adalah lingkaran* $|z| = 1$ *dengan arah positif.*

Penyelesaian:
Cabang utama fungsi logaritma

$$\log z = \ln r + i\Theta, \qquad r > 0, -\pi < \Theta < \pi.$$

Kontur C dapat dinyatakan sebagai $C = C_1 + C_2$ dengan C_1 separuh lingkaran yang berpusat di titik asal dari $z = -i$ ke $z = i$ dan C_2 adalah separuh lingkaran yang berpusat di titik asal dari $z = i$ ke $z = -i$. Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \frac{1}{z}\, dz &= \log z\Big|_{-i}^{i} = \log(i) - \log(-i) \\
&= (\ln 1 + i\frac{\pi}{2}) - (\ln 1 - i\frac{\pi}{2}) = \pi i
\end{aligned}$$

dan di C_2 $(\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2})$

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \frac{1}{z}\, dz &= \log z\Big|_{i}^{-i} = \log(-i) - \log(i) \\
&= (\ln 1 + i\frac{3\pi}{2}) - (\ln 1 - i\frac{\pi}{2}) = \pi i.
\end{aligned}$$

Jadi

$$\int_C \frac{1}{z}\, dz = \int_{C_1} \frac{1}{z}\, dz + \int_{C_2} \frac{1}{z}\, dz = \pi i_\pi i = 2\pi i.$$

Teorema 4.15. Teorema Cauchy-Goursat *Jika f fungsi analitik di setiap titik-dalam dan di setiap titik pada kontur C, maka*

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Teorema 4.16. *Jika f fungsi analitik pada daerah terhubung sederhana D, maka*

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

untuk setiap kontur tertutup C di dalam D.

Bukti. Jika C adalah kontur tertutup sederhana di dalam D, dengan teorema Cauchy-Goursat menjamin persamaan tersebut. Jika C adalah kontur tertutup yang berpotongan dengan dirinya sebanyak berhingga kali, misal sebanyak n, dapat dipandang $C_1, C_2, \cdots, C_n$ merupakan kontur-kontur tertutup sederhana. Ilustrasi kasus seperti ini bisa dilihat pada Gambar 4.4. Karena nilai integral di setiap kontur C_k sama dengan 0 untuk setiap $k = 1, 2, \cdots, n$, sesuai dengan teorema Cauchy, diperoleh

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\, dz = 0.$$

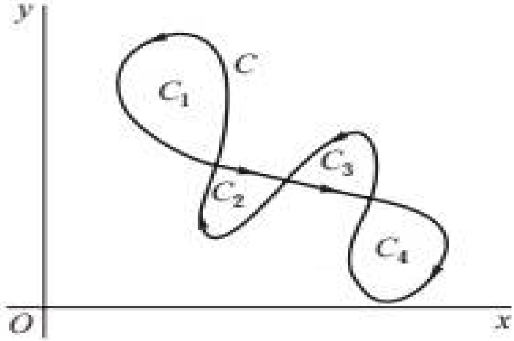
□

Akibat 4.17. *Jika f analitik pada daerah terhubung sederhana, maka f mempunyai antiturunan di setiap titik di dalam D.*

Teorema 4.18. *Diberikan*

(i). C kontur tertutup sederhana dengan arah positif;

(ii). C_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ kontur-kontur tertutup sederhana semuanya berada di dalam C dengan arah positif dan tidak memiliki titik-dalam bersama.



Gambar 4.4: Ilustrasi kontur tertutup dengan berhingga titik potong dengan dirinya sendiri

Jika f analitik pada semua kontur-kontur ini dan pada daerah terhubung berganda yang memuat semua titik di dalam C dan titik-luar di setiap C_k, maka

$$\int_C f(z)\ dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\ dz = 0.$$

Akibat 4.19. *Diberikan C_1 dan C_2 kontur-kontur tertutup sederhana dengan arah positif dengan C_2 berada di dalam C_1. Jika f analitik di daerah tertutup yang memuat kontur-kontur tersebut dan semua titik diantara keduanya, maka*

$$\int_{C_1} f(z)\ dz = \int_{C_2} f(z)\ dz.$$

Contoh 4.20. *Evaluasi integral*

$$\int_C \frac{1}{z}\ dz$$

dengan C adalah sebarang kontur tertutup sederhana yang memuat titik asal.

Penyelesaian:
Diambil C_1 lingkaran yang berpusat di titik asal dengan jari-jari R

yang cukup kecil sedemikian hingga C_1 berada di dalam C. Berdasarkan soal Contoh 4.14, diperoleh

$$\int_C \frac{1}{z}\, dz = \int_{C_1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i.$$

Selanjutnya dibahas rumus integral Cauchy yang tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 4.21. *Diberikan f fungsi analitik di setiap titik di dalam daerah yang dilingkupi dan pada kontur tertutup sederhana C dengan arah positif. Jika z_0 sebarang titik-dalam daerah yang dilingkupi C, maka*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \tag{4.6}$$

Rumus integral (4.6) disebut *integral Cauchy.* Rumus integral Cauchy ini dapat digunakan untuk mengevaluasi integral

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0)\frac{1}{2\pi i}.$$

Contoh 4.22. *Evaluasi integral*

$$\int_C \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)}\, dz$$

dengan C lingkaran $|z| = 2$ dengan arah positif.

Penyelesaian:
Diberikan C lingkaran $|z| = 2$ dengan arah positif dan pandang fungsi

$$f(z) = \frac{z}{9 - z^2}.$$

Karena f analitik di dalam dan pada C dan karena $z_0 = -i$ merupakan titik-dalam daerah di dalam C, berdasarkan rumus integral Cauchy diperoleh

$$\int_C \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)}\, dz = \int_C \frac{z/(9 - z^2)}{z - (-i)}\, dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i\left(\frac{-i}{10}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

Lemma 4.23. *Diberikan f fungsi analitik di setiap titik di dalam daerah yang dilingkupi dan pada kontur C dengan arah positif. Jika z_0 sebarang titik-dalam daerah yang dilingkupi C, maka*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t - z)^2}\, dt \qquad \text{dan} \qquad f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t - z)^3}\, dt \tag{4.7}$$

Rumus (4.7) dapat diperumum menjadi

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt.$$

4.3 Rangkuman

1. Diberikan f fungsi yang terdefinisi di titik z_0 dan pada persekitannya. Turunan fungsi f di titik z_0, ditulis $f'(z_0)$, didefinisikan sebagai
$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$
asalkan limit di ruas kanan ada.

2. Diberikan $f(z)$ fungsi kontinu pada domain D. Pernyataan-pernyataan berikut ekivalen
   (a) $f(z)$ mempunyai antiturunan $F(z)$ di D;
   (b) $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$ tidak bergantung lintasan yang berada di dalam D yang menghubungkan titik z_1 ke titik z_2;
   (c) $\int_C f(z)\, dz = 0$ untuk C sebarang lintasan tertutup yang berada di dalam D.

3. **Teorema Cauchy-Goursat** Jika f fungsi analitik di setiap titik-dalam dan di setiap titik pada kontur C, maka
$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

4. Jika f fungsi analitik pada daerah terhubung sederhana D, maka
$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$
untuk setiap kontur tertutup C di dalam D.

5. Diberikan
   (i). C kontur tertutup sederhana dengan arah positif;
   (ii). C_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ kontur-kontur tertutup sederhana semuanya berada di dalam C dengan arah positif dan tidak mempunyai titik-dalam bersama.

Jika f analitik pada semua kontur-kontur ini dan pada daerah terhubung berganda yang memuat semua titik di dalam C dan titik-luar di setiap C_k, maka

$$\int_C f(z)\ dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\ dz = 0.$$

6. Diberikan f fungsi analitik di setiap titik di dalam daerah yang dilingkupi dan pada kontur C dengan arah positif. Jika z_0 sebarang titik-dalam daerah yang dilingkupi C, maka

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\ dz$$

4.4 Bahan Diskusi

Diskusikan permasalahan-permasalahan berikut.

1. Diberikan C lingkaran $|z| = K$ dengan $K > 1$ dengan arah positif. Tunjukkan bahwa

$$\left| \int_C \frac{\log z}{z^2}\ dz \right| < 2\pi \Big(\frac{\pi + \ln K}{K} \Big),$$

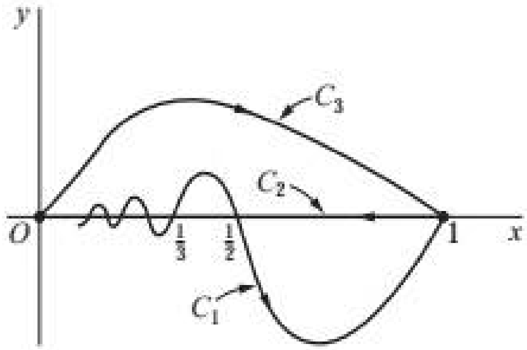
   dan gunakan aturan Hospital untuk menunjukkan bahwa nilai integral tersebut menuju 0 apabila $K \to \infty$.

2. Diberikan C_1 lintasan dari titik asal ke titik $z = 1$ sepanjang grafik fungsi yang diberikan dalam persamaan

$$y(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\pi/x) & , 0 < x \le 1 \\ 0 & , x = 0, \end{cases}$$

   dan diberikan C_2 lintasan berupa garis lurus dari titik $z = 1$ ke titik asal, dan C_3 kurva mulus dari titik asal ke titik $z = 1$ yang tidak berpotongan dengan dirinya sendiri maupun C_1 dan C_2 kecuali titik-titik ujung seperti diberikan pada Gambar 4.5. Gunakan teorema Cauchy-Goursat untuk menunjukkan bahwa jika f fungsi penuh, maka

$$\int_{C_1} f(z)\ dz = \int_{C_3} f(z)\ dz \qquad \text{dan} \qquad \int_{C_2} f(z)\ dz = -\int_{C_3} f(z)\ dz.$$



Gambar 4.5: Grafik tiga busur

3. Diberikan $f(z)$ fungsi penuh. Tunjukkan bahwa $f(z)$ merupakan fungsi konstan jika $|f(z)| \leq \ln(|z|+1)$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.

4. Diberikan C lingkaran satuan $z = e^{i\theta}$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$. Pertama, tunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan real a berlaku

$$\int_C \frac{e^{az}}{z}\, dz = 2\pi i.$$

Selanjutnya, tulislah integral di atas dalam suku-suku θ untuk menurunkan rumus integral

$$\int_0^\pi e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta)\, d\theta = \pi.$$

4.5 Rujukan

1. Agarwal, R.P., Perera, K., dan Pinelas, S., 2011, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer Science+Business Media, London.

2. Brown, J. W, and Churchill, R. V., 2009, *Complex Variables and Applications*, 8th, McGraw-Hill Companies, Inc, New York.

3. Campuzano, J.C.P., 2016, *Complex Analysis Problems with Solutions*, Creative Commons Attribution, Queensland.

4.6 Soal-soal Latihan

1. Evaluasi integral
$$\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$$

2. Buktikan, jika m dan n bilangan-bilangan bulat maka
$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta}\ d\theta \quad = \quad \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ 2\pi & , m = n. \end{cases}$$

3. Tunjukkan bahwa jika $w(t) = u(t) + iv(t)$ kontinu pada selang $a \leq t \leq b$, maka
$$\int_{-b}^{-a} w(-t)\ dt = \int_a^b w(\tau)\ d\tau.$$

4. Diberikan $f(z)$ fungsi analitik di $z_0 = z(t_0)$ sepanjang kurva mulus $z = z(t)$ $(a \leq t \leq b)$. Tunjukkan bahwa jika $w(t) = f[z(t)]$, maka
$$w'(t) = f'[z(t)]z'(t)$$
bilamana $t = t_0$.

5. Diberikan $y(x)$ fungsi bernilai real yang terdefinisi pada selang $0 \leq x \leq 1$ yang diberikan dalam persamaan
$$y(x) \quad = \quad \begin{cases} x^3 \sin(\pi/x) & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$
Tunjukkan bahwa persamaan
$$z = x + iy$$
merepresentasikan busur C yang berpotongan dengan sumbu real di titik $z = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ dan di $z = 0$.

6. Evaluasi integral
$$\int_C f(z)\ dz$$
dengan $f(z) = (z + 2)/z$ dan C adalah busur

   (a) semilingkaran $z = 2e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$;

(b) semilingkaran $z = 2e^{i\theta}$ $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$.

7. Evaluasi integral

$$\int_C f(z)\ dz$$

dengan

$$f(z) \quad = \quad \begin{cases} 1 & , y < 0 \\ 4y & , y > 0. \end{cases}$$

dan C adalah busur dari titik $z = -1 - i$ ke titik $z = 1 + i$ sepanjang kurva $y = x^3$.

8. Tanpa mengevaluasi integral, tunjukkan bahwa

$$\Big|\int_C \frac{dz}{z^2 - 1}\ dz\Big| \leq \frac{\pi}{3}$$

dengan C lingkaran $|z| = 2$ dari titik $z = 2$ ke titik $z = 2i$.

9. Tunjukkan bahwa jika C menyatakan kontur segitiga dengan titik-titik sudut di $(0, 0), (0, 3)$ dan $(-4, 0)$ dengan arah positif, maka

$$\Big|\int_C (e^z - \overline{z})\ dz\Big| \leq 60.$$

10. Dengan menentukan antiturunanya terlebih dahulu, evaluasi integral

$$\int_0^{\pi+2i} \cos(z/2)\ dz$$

11. Dengan menerapkan teorema Cauchy-Goursat, buktikan bahwa

$$\int_C \frac{z^2}{z - 3}\ dz = 0$$

dengan C adalah lingkaran $|z| = 1$ dengan arah positif.

12. Diberikan C_1 adalah lingkaran $|z| = 4$ dengan arah positif dan C_2 adalah sisi-sisi bujursangkar sepanjang garis $x = \pm 1, y = \pm 1$ dengan arah positif. Jika $f(z) = z/(1 - e^z)$, buktikan bahwa

$$\int_{C_1} f(z)\ dz = \int_{C_2} f(z)\ dz.$$

13. Diberikan C_1 lintasan berupa kurva $|x| + |y| = 2$ dengan arah positif dan C_2 lingkaran $|z| = 4$ dengan arah positif. Gunakan Teorema Integral Cauchy untuk membuktikan bahwa

$$\int_{C_1} \frac{z+2}{\sin z/2}\, dz = \int_{C_2} \frac{z+2}{\sin z/2}\, dz$$

14. Evaluasi

$$\int_C \frac{1}{z^2-1}\, dz$$

dengan C adalah lingkaran $|z| = 3$ dengan arah positif.

15. Evaluasi

$$\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2}\, dz$$

dengan C adalah lingkaran $|z - i| = 2$ dengan arah positif.

16. Diberikan C lingkaran $|z| = 3$ dengan arah positif. Tunjukkan bahwa jika

$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w}\, dz, \qquad |w| \neq 3,$$

maka $g(2) = 8\pi i$.
Bagaimana nilai $g(w)$ apabila $|w| > 3$?

17. Tunjukkan bahwa jika C adalah kontur tertutup sederhana dengan arah positif, maka luasan daerah yang dilingkupi oleh C dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{1}{2i} \int_C \overline{z}\, dz$$

18. Diberikan f fungsi kontinu pada C kontur tertutup sederhana. Buktikan bahwa fungsi

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{s-z}\, ds$$

analitik di setiap titik z titik-dalam C dan buktikan pula bahwa

$$g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2}\, ds.$$

19. Diberikan C_N batas dari daerah persegi

$$\{(x, y) : |x| \leq N\pi, |y| \leq N\pi\}$$

dengan arah positif dimana N bilangan asli. Tunjukkan bahwa

$$\lim_{N \to \infty} \int_{C_N} \frac{dz}{z^3 \cos z} = 0.$$

Bab 5

Deret

Setelah mahasiswa membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah :

1. mampu berpikir secara kritis dan logis;
2. punya kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah-masalah yang relevan;
3. dapat bertanggungjawab dalam melaksanakan tugas;
4. bersifat jujur, etis, kreatif, dan mampu bekerjasama;
5. punya kemampuan dalam berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir mahasiswa yang diharapkan secara khusus adalah :

1. menjelaskan konsep-konsep yang berhubungan dengan deret Taylor dan Laurent;
2. menganalisis dan membuktikan sifat-sifat yang berkaitan dengan deret Taylor dan Laurent;
3. menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan deret Taylor dan Laurent.

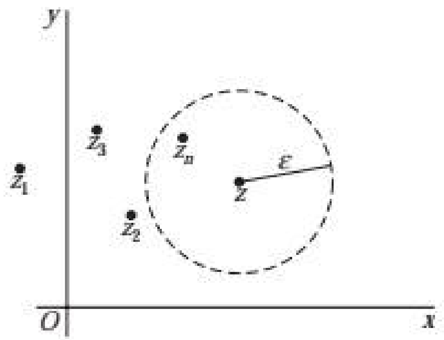
5.1 Kekonvergenan Barisan

Untuk mengawali subbab ini, diberikan pengertian barisan konvergen.

Definisi 5.1. *Barisan bilangan kompleks* $\{z_n\}$ *konvergen ke* $z \in \mathbb{C}$ *jika untuk setiap bilangan* $\epsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* n_0 *sedemikian hingga jika* $n \geq n_0$ *maka*

$$|z_n - z| < \epsilon.$$

Secara geometri, hal ini bermakna bahwa untuk n yang cukup besar, maka titik-titik z_n berada di dalam persekitaran z dengan jari-jari ϵ (Gambar 5.1).



Gambar 5.1: Barisan $\{z_n\}$ konvergen ke z

Untuk selanjutnya, jika barisan $\{z_n\}$ konvergen ke z dapat dituliskan sebagai

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Untuk ketunggalan limit barisan, diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 5.2. *Suatu barisan di* $\mathbb{C}$ *dapat memiliki paling banyak satu limit.*

Bukti. Misalkan z' dan z" adalah limit-limit barisan $\{z_n\}$. Untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_1$ berlaku

$$|z_n - z'| < \frac{\epsilon}{2}$$

dan terdapat $n_2 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_2$ berlaku

$$|z_n - z"| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Selanjutnya diambil bilangan $n_0 = maks\{n_1, n_2\}$. Oleh karena itu, untuk setiap $n \geq n_0$ didapatkan

$$|z' - z"| = |z' - z_n + z_n - z"| \leq |z_n - z'| + |z_n - z"| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Karena ketaksamaan di atas berlaku untuk sebarang $\epsilon > 0$, disimpulkan bahwa $z' = z"$. $\square$

Dari Definisi 5.1, selanjutnya dikembangkan salah satu sifat barisan konvergen dalam satu teorema berikut.

Teorema 5.3. *Diberikan* $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *dan* $z = x + iy$.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ jika dan hanya jika } \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ dan } \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diberikan $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Berdasarkan Definisi 5.1, untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sedemikian hingga berlaku

$$|z_n - z| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)| < \epsilon, \qquad \text{untuk setiap } n \geq n_0.$$

Karena

$$|x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|$$

dan

$$|y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|,$$

hal ini berarti $|x_n - x| < \epsilon$ dan $|y_n - y| < \epsilon$ atau dengan kata lain

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{dan} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

$(\Leftarrow)$ Sesuai dengan syarat $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, maka untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan-bilangan asli n_1 dan n_2 sedemikian hingga berlaku

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{untuk } n \geq n_1$$

dan
$$|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{untuk } n \geq n_2.$$
Diambil $n_0 = maks\{n_1, n_2\}$.
Oleh karena itu, jika $n \geq n_0$ maka berlaku $|x_n - x| < \epsilon/2$ dan $|y_n - y| < \epsilon/2$.
Jadi, jika $n \geq n_0$ diperoleh

$$\begin{aligned} |z_n - z| &= |(x_n + iy_n) - (x + iy)| \\ &< |(x_n - x) + i(y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

atau dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. □

Berikutnya diberikan pengertian penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian antar barisan bilangan kompleks. Jika $\{z_n\}$ dan $\{w_n\}$ adalah barisan-barisan bilangan kompleks, didefinisikan

$$\begin{aligned} c\{z_n\} &= \{cz_n\} \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N} \text{ dan } c \in \mathbb{C} \\ \{z_n\} + \{w_n\} &= \{z_n + w_n\} \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N} \\ \{z_n\} - \{w_n\} &= \{z_n - w_n\} \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N} \\ \{z_n\} \cdot \{w_n\} &= \{z_n \cdot w_n\} \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N} \\ \{z_n\}/\{w_n\} &= \{z_n/w_n\} \text{ dengan } w_n \neq 0 \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Teorema lain yang berkenaan dengan barisan bilangan kompleks yang konvergen diberikan berikut.

Teorema 5.4. *Jika $\{z_n\}$ dan $\{w_n\}$ barisan-barisan konvergen berturut-turut ke z dan w, dan jika c konstanta kompleks, maka*

i. barisan $\{cz_n\}$ konvergen ke cz;

ii. barisan $\{z_n + w_n\}$ konvergen ke $z + w$;

iii. barisan $\{z_n w_n\}$ konvergen ke zw;

iv. barisan $\{1/z_n\}$ konvergen ke $1/z$ asalkan $z_n \neq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $z \neq 0$.

5.2 Kekonvergenan Deret

Suatu deret tak hingga bilangan-bilangan kompleks

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots \tag{5.1}$$

konvergen ke jumlah S jika barisan jumlah parsial

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_N \tag{5.2}$$

konvergen ke S, dalam hal ini dituliskan

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Suatu deret dikatakan **divergen** jika barisan itu tidak konvergen.

Teorema 5.5. *Diberikan* $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *dan* $S = X + iY$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \textit{ jika dan hanya jika } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \textit{ dan } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$$

Bukti. Pandang jumlah parsial

$$S_N = X_N + iY_N$$

dengan

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \qquad \text{dan} \qquad Y_N = \sum_{n=1}^{N} y_n.$$

Dari hubungan S_N dan teorema barisan, berlaku $\lim_{N\to\infty} S_N = S$ jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty} X_N = X \text{ dan } \lim_{N\to\infty} Y_N = Y.$$

□

Contoh 5.6. *Untuk menunjukkan bahwa*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \textit{untuk } |z| < 1, \tag{5.3}$$

pertama pandang

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \qquad z \neq 1.$$

Selanjutnya, bentuk jumlah parsial

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}, \qquad z \neq 1.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$S_N(z) = \frac{1 - z^N}{1 - z}.$$

Jika

$$S(z) = \frac{1}{1 - z},$$

maka

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) = \frac{z^N}{1 - z}, \qquad z \neq 1.$$

Jadi

$$|\rho_N(z)| = \frac{|z|^N}{|1 - z|},$$

dan cukup jelas suku-suku sisa $\rho_N(z)$ konvergen ke 0 bilamana $|z| < 1$, tetapi tidak konvergen bilamana $|z| \geq 1$. Ini membuktikan persamaan (5.3) berlaku.

5.3 Deret Taylor

Salah satu yang paling penting dari bab ini adalah deret Taylor. Teorema berikut merupakan representasi dari deret Taylor.

Teorema 5.7. *Jika f fungsi analitik pada cakram $|z - z_0| < R_0$ (lihat Gambar 5.2), maka $f(z)$ mempunyai representasi deret kuasa*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

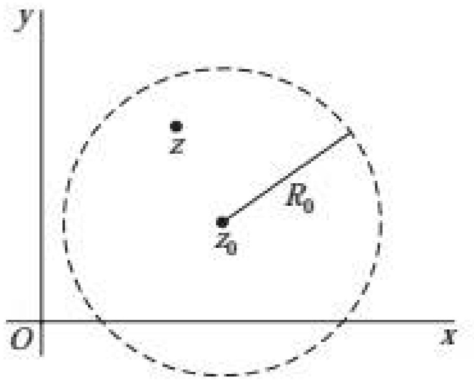
dengan

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Bukti. Untuk sebarang fungsi analitik di titik z_0 mempunyai deret Taylor di sekitar z_0. Jika f analitik di z_0, maka f analitik di suatu persekitaran $N_\epsilon(z_0)$.
Pertama akan dibuktikan terlebih dahulu jika $z_0 = 0$, sehingga diperoleh *deret Maclaurin*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \qquad |z| < R_0.$$

Diberikan $|z| = r$ dan diberikan C_0 lingkaran $|z| = r_0$ dengan $r < r_0 < R_0$ seperti diberikan pada Gambar 5.3. Karena f analitik di dalam dan



Gambar 5.2: Cakram terbuka $|z - z_0| < R_0$

pada lingkaran C_0 dan karena z_0 titik-dalam dari C_0, dengan integral Cauchy

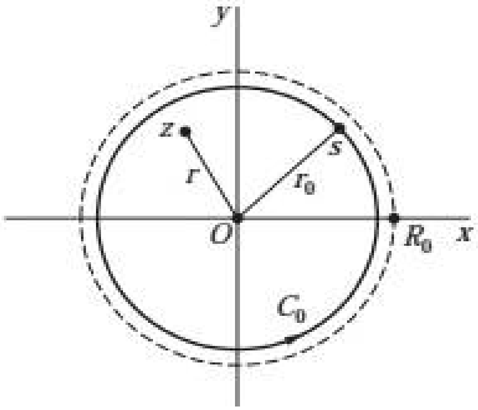
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)}{s - z} ds.$$

Faktor $1/(s - z)$ di dalam integran dapat dituliskan

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 - (z/s)}.$$

Karena

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{N-1} z^n + \frac{z^N}{1 - z}$$



Gambar 5.3: Kontur tertutup C_0

sehingga diperoleh

$$\frac{1}{s-z} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{s^{n+1}} z^n + z^N \frac{1}{(s-z)s^N}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \gamma_n(z)$$

dengan

$$\gamma_n(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(s)}{(s-z)s^N} ds.$$

□

Untuk memberikan ilustrasi dari deret Maclaurin, berikut diberikan dua contoh untuk kasus tersebut.

Contoh 5.8. *Karena $f(z) = e^z$ merupakan fungsi penuh, maka $f(z)$ mempunyai representasi deret Maclaurin yang valid untuk setiap z. Karena $f^{(n)}(z) = e^z$ dan $f^{(n)}(0) = 1$, diperoleh*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < \infty.$$

Contoh 5.9. *Dengan menggunakan Contoh 5.8 dan definisi* $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, *ekspansikan fungsi penuh* $f(z) = \sin z$.

Penyelesaian:
Berdasarkan Contoh 5.8, untuk setiap z ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi $f(z) = \sin z$ adalah

$$\begin{aligned}
\sin z &= = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\Big) \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \big(1 - (-1)^n\big)\frac{i^n z^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \big(1 - (-1)^{2n+1}\big)\frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

5.4 Deret Laurent

Jika fungsi f tidak analitik di titik z_0, teorema Taylor tidak dapat diaplikasikan di titik tersebut. Untuk menjelaskan hal itu diberikan teorema berikut.

Teorema 5.10. Teorema Laurent *Diberikan* D *adalah daerah anular* $R_1 < |z - z_0| < R_2$ *dan* C *kontur tertutup sederhana dengan arah positif yang berada di dalam* D *seperti pada Gambar 5.4. Jika* f *fungsi analitik pada* D, *maka untuk setiap* z *di dalam* D *fungsi* $f(z)$ *mempunyai representasi*

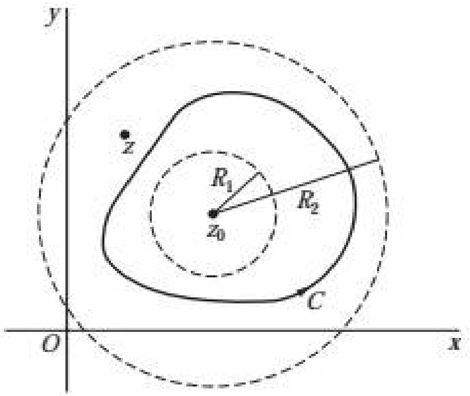
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{5.4}$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

dan

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$



Gambar 5.4: Kontur tertutup C di dalam anular $R_1 < |z - z_0| < R_2$

Ekspansi bentuk (5.4) seringkali ditulis

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{5.5}$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \qquad n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Bentuk (5.4) atau (5.5) ini disebut **deret Laurent**.

Contoh 5.11. *Dengan menggantikan z oleh $1/z$ dalam ekspansi deret Maclaurin*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \qquad |z| < \infty$$

diperoleh ekspansi deret Laurent untuk $e^{1/z}$ adalah

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots, \qquad |z| < \infty$$

5.5 Ketunggalan Representasi Deret

Ketunggalan representasi deret Taylor dan deret Laurent diberikan dalam teorema-teorema berikut. Pertama untuk ketunggalan deret Taylor:

Teorema 5.12. *Jika deret*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

konvergen ke $f(z)$ untuk setiap titik-dalam suatu lingkaran $|z-z_0| = R$, maka deret tersebut merupakan ekspansi deret Taylor untuk f di $z-z_0$.

Bukti. Pandang representasi deret dalam jumlahan m

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z-z_0)^m, \qquad |z-z_0| < R.$$

Dengan menerapkan integral Cauchy, diperoleh

$$\int_C g(z)f(z)\ dz = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_C g(z)(z-z_0)^m\ dz$$

dengan $g(z)$ adalah fungsi yang berbentuk

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

dengan C adalah suatu lingkaran yang berpusat di z_0 dengan jari-jari kurang dari R. Oleh karena itu, diperoleh

$$\int_C g(z)f(z)\ dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Jadi cukup jelas bahwa

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_C g(z)(z-z_0)^m\ dz = a_n.$$

□

Selanjutnya untuk ketunggalan deret Laurent diberikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 5.13. *Jika deret*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

konvergen ke $f(z)$ untuk setiap titik di dalam suatu domain anular sekitar z_0, maka deret tersebut merupakan ekspansi deret Laurent untuk f di $z-z_0$.

Bukti. Cara membuktikan teorema ini hampir serupa dengan teorema sebelumnya.
Tuliskan dalam bentuk deret

$$\int_C g(z)f(z)\, dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_C g(z)(z-z_0)^{n+1}\, dz$$

atau

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_C g(z)(z-z_0)^{n+1}\, dz.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = c_n.$$

□

Berikutnya dibahas deret dari perkalian antar fungsi dan pembagian antar fungsi.
Pandang setiap deret kuasa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{dan} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \tag{5.6}$$

yang keduanya konvergen pada suatu daerah lingkaran $|z-z_0| = R$.

Contoh 5.14. *Fungsi $e^z/(1+z)$ mempunyai titik singular di $z=-1$, oleh karena itu representasi deret Maclaurinnya valid di dalam cakram buka $|z|<1$. Dengan demikian dapat dituliskan*

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{1+z} &= e^z\frac{1}{1-(-z)}\\ &= \Big(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots\Big)(1-z+z^2-z^3+\cdots)\\ &= 1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots \qquad ,|z|<1.\end{aligned}$$

Contoh 5.15. *Pembuat nol fungsi penuh* $\sinh z$ *adalah $z = n\pi i$ dengan $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. Dengan demikian*

$$\frac{1}{z^2\sinh z} = \frac{1}{z^2(z+z^3/3!+z^5/5!+\cdots)}$$

dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3}\Big(\frac{1}{z + z^2/3! + z^4/5! + \cdots}\Big),$$

mempuyai representasi deret Laurent di z *yang memenuhi* $0 < |z| < \pi$. *Dengan melakukan pembagian sederhana, diperoleh*

$$\frac{1}{z + z^2/3! + z^4/5! + \cdots} = 1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \cdots \qquad , 0 < |z| < \pi.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \frac{7}{360}z + \cdots \qquad , 0 < |z| < \pi.$$

5.6 Rangkuman

1. Barisan bilangan kompleks $\{z_n\}$ konvergen ke $z \in \mathbb{C}$ jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sedemikian hingga jika $n \geq n_0$ maka

$$|z_n - z| < \epsilon.$$

2. Diberikan $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ dan $z = x + iy$.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ jika dan hanya jika } \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ dan } \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

3. Jika $\{z_n\}$ dan $\{w_n\}$ barisan-barisan konvergen berturut-turut ke z dan w, dan jika c konstanta kompleks, maka

   i. barisan $\{cz_n\}$ konvergen ke cz;
   ii. barisan $\{z_n + w_n\}$ konvergen ke $z + w$;
   iii. barisan $\{z_n w_n\}$ konvergen ke zw;
   iv. barisan $\{1/z_n\}$ konvergen ke $1/z$ asalkan $z_n \neq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $z \neq 0$.

4. Diberikan $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ dan $S = X + iY$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \text{ jika dan hanya jika } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \text{ dan } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$$

5. Jika f fungsi analitik pada cakram $|z - z_0| < R_0$, maka $f(z)$ mempunyai representasi deret kuasa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dengan

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

6. **Teorema Laurent** Diberikan D adalah daerah anular $R_1 < |z - z_0| < R_2$ dan C kontur tertutup sederhana dengan arah positif yang berada di dalam D. Jika f fungsi analitik pada D, maka untuk setiap z di dalam D fungsi $f(z)$ mempunyai representasi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

dan

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

7. Jika deret

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

konvergen ke $f(z)$ untuk setiap titik di dalam suatu domain anular sekitar z_0, maka deret tersebut merupakan ekspansi deret Laurent untuk f di $z - z_0$.

5.7 Bahan Diskusi

Diskusikan beberapa permasalahan berikut.

1. Representasikan dalam deret Maclaurin fungsi $f(z) = \sin(z^2)$, dan tunjukkan bagaimana bentuk deret jika

$$f^{(4n)}(0) = 0 \qquad \text{dan} \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

2. Derivasikan ekspansi

$$\frac{\sinh z}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+3)!}, \qquad 0 < |z|$$

3. (a.) Diberikan bilangan real $-1 < a < 1$, dan derivasikan representasi deret Laurent

$$\frac{a}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}, \qquad |a| < |z|$$

   (b.) Tuliskan $z = e^{i\theta}$ dalam persamaan yang diperoleh pada bagian (a), dan nyatakan bagian real dan imaginer pada setiap ruas hasil derivasinya dengan rumus

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a\cos\theta - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\theta = \frac{a\sin\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

dengan $-1 < a < 1$.

5.8 Rujukan

1. Agarwal, R.P., Perera, K., dan Pinelas, S., 2011, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer Science+Business Media, London.

2. Brown, J. W, and Churchill, R. V., 2009, *Complex Variables and Applications*, 8th, McGraw-Hill Companies, Inc, New York.

3. Campuzano, J.C.P., 2016, *Complex Analysis Problems with Solutions*, Creative Commons Attribution, Queensland.

5.9 Soal-soal Latihan

1. Tunjukkan dengan dua cara bahwa barisan $\{z_n\}$ yang didefinisikan
$$z_n = -2 + i\frac{(-1)^n}{n^2}, \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}$$
konvergen ke -2.

2. Buktikan bahwa jika $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, maka $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.

3. Buktikan bahwa jika
$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S,$$
maka
$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{S}.$$

4. Buktikan ekspansi deret Maclaurin $f(z) = z\cosh z^2$ adalah
$$z\cosh z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(2n)!}, \text{ untuk setiap } z.$$

5. Buktikan ekspansi deret Taylor $f(z) = e^z$ adalah
$$e^z = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}, \text{ untuk } |z-1| < \infty.$$

6. Tentukan ekspansi deret Maclaurin fungsi
$$f(z) = \frac{z}{z^4+9}$$

7. Tunjukkan, jika $0 < |z| < 4$ maka
$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+2}}.$$

8. Tentukan deret Laurent fungsi
$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$$
di dalam domain $0 < |z| < \infty$.

9. Representasikan fungsi
$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$$
ke dalam deret Laurent di dalam domain $|z| > 1$.

10. Dengan melakukan pendiferensialan representasi deret Maclaurin
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1,$$
buktikan bahwa
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \qquad |z| < 1$$
dan
$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) z^n, \qquad |z| < 1.$$

11. Buktikan bahwa jika
$$f(z) \quad = \quad \begin{cases} \frac{\cos z}{z^2 - (\pi/2)^2} & , z \neq \pm\pi/2 \\ -\frac{1}{\pi} & , z = \pm\pi/2, \end{cases}$$
maka f merupakan fungsi penuh.

12. Buktikan bahwa jika f analitik di z_0 dan $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m)}(z_0) = 0$, maka fungsi g yang didefinisikan oleh
$$g(z) \quad = \quad \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} & , z \neq z_0 \\ \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} & , z = z_0, \end{cases}$$
analitik di z_0.

13. Gunakan perkalian antar deret untuk menunjukkan bahwa
$$\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2} z - \frac{5}{6} z^2 + \cdots \qquad , 0 < |z| < 1.$$

14. Gunakan pembagian untuk mendapatkan representasi deret Laurent
$$\frac{1}{e^z - 1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} z - \frac{1}{720} z^3 + \cdots \qquad , 0 < |z| < 2\pi.$$

15. Evaluasi integral
$$\int_C \frac{dz}{z^2 \sinh z}$$
dengan C lingkaran satuan $|z| = 1$ dengan arah positif.
Petunjuk: gunakan ekspansi
$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \frac{7}{360}z + \cdots \qquad , 0 < |z| < \pi.$$

16. Tentukan banyaknya akar dari persamaan
$$2z^5 - 6z^2 + 1 = 0$$
di dalam anular $1 \le |z| < 2$.

17. Tunjukkan, jika c bilangan kompleks sedemikian hingga $|c| > e$, maka persamaan
$$cz^n = e^z$$
mempunyai n akar di dalam lingkaran $|z| = 1$.

18. Evaluasi integral
$$\int_C \frac{dz}{z^3 \cosh z}$$
dengan C lingkaran satuan $|z - i| = 1$ dengan arah positif.

19. Evaluasi integral
$$\int_C \frac{dz}{z \sinh^2 z}$$
dengan C lingkaran satuan $|z - 1| = 1$ dengan arah positif.

20. Evaluasi integral
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta}$$

21. Evaluasi integral
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta}$$

22. Evaluasi integral
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4\cos 2\theta}\, d\theta$$

23. Gunakan cara pembagian untuk mendapatkan deret Laurent

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z - \frac{1}{720}z^3 + \cdots, \qquad 0 < |z| < 2\pi.$$

24. Gunakan ekspansi deret

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{7}{360}z + \cdots, \qquad 0 < |z| < \pi$$

untuk mengevaluasi integral

$$\int_C \frac{dz}{z^2 \sinh z}$$

dengan C adalah kontur lingkaran satuan $|z| = 1$ arah positif.

Bab 6

Residu

Setelah mahasiswa membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah :

1. mampu berpikir secara kritis dan logis;
2. punya kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah-masalah yang relevan;
3. dapat bertanggungjawab dalam melaksanakan tugas;
4. bersifat jujur, etis, kreatif, dan mampu bekerjasama;
5. punya kemampuan dalam berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir mahasiswa yang diharapkan secara khusus adalah :

1. menjelaskan konsep-konsep yang berhubungan dengan teorema residu;
2. menganalisis dan membuktikan sifat-sifat yang berhubungan dengan teorema residu;
3. menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan teorema residu.

6.1 Residu

Perlu diingat kembali bahwa titik z_0 disebut titik singular fungsi f jika f tidak analitik di z_0 tetapi analitik di suatu titik di setiap persekitaran z_0. Titik singular z_0 dikatakan *terisolasi* jika terdapat persekitaran $N_\epsilon(z_0)$ yang dapat dihapus dimana f analitik.

Contoh 6.1. *Fungsi*

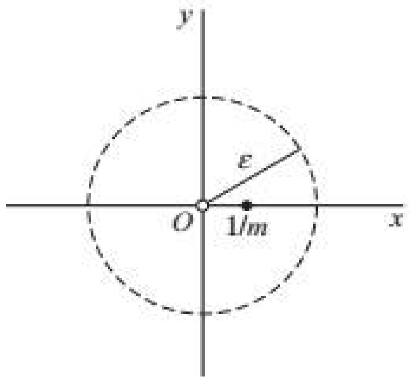
$$\frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$$

mempunyai tiga titik singular yang terisolasi, yakni $z = 0$ dan $z = \pm i$.

Contoh 6.2. *Fungsi*

$$\frac{1}{\sin(\pi/z)}$$

mempunyai titik singular $z = 0$ dan $z = 1/n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ yang semuanya berada pada garis sumbu real dari $z = -1$ ke $z = 1$. Setiap titik singular $z \neq 0$ merupakan terisolasi. Sedangkan titik singular $z = 0$ tidak terisolasi karena setiap persekitaran $N_\epsilon(0)$ memuat titik singular lain, yakni untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ pasti ada bilangan asli m sedemikian hingga $m > 1/\epsilon$ seperti diberikan pada Gambar 6.1.



Gambar 6.1: Setiap $\epsilon > 0$, persekitaran $N_\epsilon(0)$ memuat titik $(1/m, 0)$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$

Bilamana z_0 merupakan titik singular fungsi f, terdapat bilangan positif R sedemikian hingga f analitik di setiap z dengan $0 < |z - z_0| <$

R. Akibatnya, $f(z)$ dapat dinyatakan dalam deret Laurent

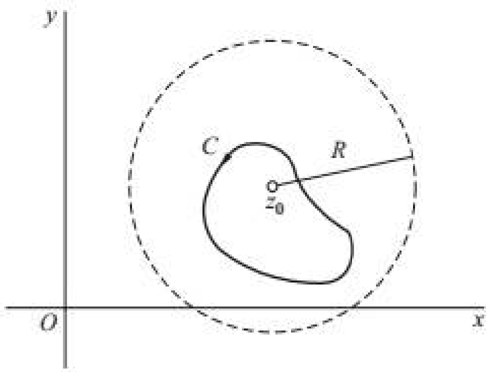
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots \tag{6.1}$$

dengan koefisien-koefisien a_n dan b_n mempuyai representasi integral. Khususnya,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} \, dz \tag{6.2}$$

dengan C sebarang kontur tertutup sederhana arah positif yang mengelilingi z_0 dan berada di dalam cakram $0 < |z - z_0| < R$ (lihat Gambar 6.2). Jika $n = 1$, ekspresi untuk b_n dapat dituliskan

$$\int_C f(z) \, dz = 2\pi i b_1. \tag{6.3}$$



Gambar 6.2: Kontur C berada di dalam cakram $0 < |z - z_0| < R$

Bilangan kompleks b_1 dalam ekspansi (6.1) disebut *residu* f di titik singular terisolasi z_0. Selanjutnya, jika b_1 adalah residu f di $z = z_0$ dituliskan dengan

$$Res_{z=z_0} f(z) = b_1.$$

Contoh 6.3. *Hitung*

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4}$$

dengan C *adalah lingkaran* $|z - 2| = 1$ *dengan arah positif*

Penyelesaian:
Karena integrannya berupa fungsi analitik pada bidang kompleks kecuali di titik $z = 0$ dan $z = 2$, maka integrannya adalah fungsi yang mempunyai represntasi deret Laurent yang valid pada cakram $0 < |z-2| < 2$. Untuk itu nilai integralnya adalah $2\pi i$ dikalikan residu integrannya di $z = 2$. Untuk menentukan residu integrannya, diperhatikan ekspansi deret Maclaurin

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1$$

sehingga dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-2)^4} &= \frac{1}{(z-2)^4} \cdot \frac{1}{2+(z-2)} \\ &= \frac{1}{2(z-2)^4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-2}{2}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^{n-4} \end{aligned}$$

Dengan demikian koefisien dari $1/(z-2)$ adalah $-1/16$ yang tidak lain merupakan residu integran. Oleh karena itu diperoleh

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4} = 2\pi i\Big(-\frac{1}{16}\Big) = -\frac{\pi i}{8}.$$

Teorema 6.4. Teorema residu Cauchy *Diberikan C kontur tertutup sederhana dengan arah positif. Jika fungsi f analitik di dalam dan pada C kecuali sejumlah hingga titik-titik singular z_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ di dalam C, maka*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f(z)$$

Untuk kejelasan penggunaan teorema residu Cauchy 6.4, diberikan contoh berikut.

Contoh 6.5. *Gunakan Teorema residu Cauchy untuk mengevaluasi integral*

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}\, dz$$

dengan C adalah lingkaran $|z| = 2$ dengan arah positif.

Penyelesaian:
Di sini integrannya memiliki dua titik singular terisolasi yakni $z = 0$ dan $z = 1$ dengan keduanya berada di dalam C. Untuk menentukan residu B_1 di $z = 0$ dan B_2 di $z = 1$, dapat menggunakan bantuan deret Maclaurin

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots, \qquad |z| < 1.$$

Pertama, pandang untuk $0 < |z| < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{5z-2}{z(z-1)} &= \frac{5z-2}{z} \cdot \frac{-1}{z-1} \\ &= \left(5 - \frac{2}{z}\right)(-1 - z - z^2 - \cdots) \\ &= \frac{2}{z} - 3 - 3z - 3z^2 - \cdots. \end{aligned}$$

Dengan mengidentifikasi koefisien $1/z$, diperoleh $B_1 = 2$.
Selanjutnya, karena

$$\begin{aligned} \frac{5z-2}{z(z-1)} &= \frac{5z-2}{z-1} \cdot \frac{1}{z} = \frac{5(z-1)+3}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)} \\ &= \left(5 + \frac{3}{z-1}\right)(1 - (z-1) + (z-1)^2 - \cdots), \end{aligned}$$

ini memberikan hasil $B_2 = 3$.
Jadi,

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i(B_1 + B_2) = 10\pi i.$$

Selanjutnya akan dijelaskan beberapa jenis titik terisolasi. Untuk mengawali hal itu, pandang kembali deret Laurent fungsi f yang mempunyai titik singular terisolasi di z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots \tag{6.4}$$

untuk $0 < |z - z_0| < R$. Misalkan terdapat bilangan asli m sedemikian hingga $b_m \neq 0$ dan $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$, maka ekspasnsi (6.4) menjadi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}. \tag{6.5}$$

Dalam kasus ini, titik singular terisolasi z_0 disebut *pole berderajat* m. Untuk kasus khusus $m = 1$ disebut *pole sederhana.*

Contoh 6.6. *Tentukan derajat pole dan residu fungsi*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2}$$

di $z_0 = 2$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} \\ &= \frac{z(z-2) + 3}{z - 2} \\ &= z + \frac{3}{z - 2} \\ &= 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2}. \end{aligned}$$

Jadi, f mempunyai pole derajat $m = 1$ dan residu $b_1 = 3$.

Bilamana pada persamaan (6.4) nilai $b_n = 0$ untuk setiap n, titik singular z_0 disebut *titik singular yang dapat dihapus.* Untuk menjelaskan titik singular yang dapat dihapus, diberikan sebuah contoh berikut.

Contoh 6.7. *Titik* $z_0 = 0$ *merupakan titik singular yang dapat dihapus dari fungsi*

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

karena

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos z}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\Big(1 - (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots)\Big) \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} = \frac{z^4}{6!} - \cdots, \qquad 0 < |z| < \infty \end{aligned}$$

Bilamana pada persamaan (6.4) nilai $b_n \neq 0$ tak berhingga banyaknya, titik singular z_0 disebut *titik singular esensial.*

Contoh 6.8. *Titik $z_0 = 0$ merupakan titik singular esensial dari fungsi*

$$f(z) = e^{1/z}$$

karena

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \cdots, \qquad 0 < |z| < \infty$$

Teorema 6.9. *Titik singular terisolasi z_0 dari fungsi f merupakan pole berderajat m jika dan hanya jika $f(z)$ dapat ditulis dalam bentuk*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$$

dengan $\phi(z)$ fungsi analitik di z_0 dan $\phi(z_0) \neq 0$. Lebih jauh,

$$Res_{z=z_0} f(z) = \phi(z_0), \qquad \text{jika } m = 1$$

dan

$$Res_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}, \qquad \text{jika } m \geq 2.$$

Bukti. Misalkan

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$$

dengan $\phi(z)$ fungsi analitik di z_0 dan $\phi(z_0) \neq 0$. Karena $\phi(z)$ analitik di z_0, maka $\phi(z)$ mempunyai representasi deret Taylor

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi(z_0) + \frac{\phi'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \end{aligned}$$

di suatu persekitaran $N_\epsilon(z_0)$). Oleh karena itu jika $z \in N_\epsilon(z_0), z \neq z_0$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)/1!}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{\phi''(z_0)/2!}{(z - z_0)^{m-2}} \\ &\quad + \cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{(z - z_0)} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m}. \end{aligned}$$

□

Contoh 6.10. *Fungsi* $f(z) = (z+1)/(z^2+9)$ *mempunyai titik singular terisolasi si* $z = 3i$ *dan* $f(z)$ *dapat dinyatakan sebagai*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - 3i}$$

dengan

$$\phi(z) = \frac{z + 1}{z + 3i}$$

Karena $\phi(z)$ *analitik di* $z = 3i$ *dan* $\phi(3i) = (3 - i)/6 \neq 0$, *maka titik* $z = 3i$ *merupakan pole sederhana fungsi* f. *Di sini mempunyai residu* $B_1 = (3 - i)/6$. *Titik* $z = -3i$ *juga merupakan pole sederhana fungsi* f, *dengan residu* $B_2 = (3 + i)/6$.

Contoh 6.11. *Jika* $f(z) = (z^3 + 2z)/(z - i)^3$, *maka*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - i)^3}$$

dengan

$$\phi(z) = z^3 + 2z$$

Fungsi $\phi(z)$ *merupakan fungsi penuh, dan* $\phi(i) = i \neq 0$. *Oleh karena itu,* f *mempunyai pole berorde* 3 *di* $z = i$. *Dalam hal ini, residunya adalah*

$$B = \frac{\phi''(i)}{2!} = 3i.$$

Contoh 6.12. *Diberikan fungsi*

$$f(z) = \frac{(\log z)^3}{z^2 + 1},$$

dengan cabang

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi).$$

Untuk menentukan residu f *di* $z = i$, *dituliskan*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - i}$$

dengan

$$\phi(z) = \frac{(\log z)^3}{z + i}.$$

Jelaslah bahwa fungsi $\phi(z)$ analitik di $z = i$. Karena

$$\phi(i) = \frac{(\log i)^3}{2i} = \frac{(\ln 1 + i\pi/2)^3}{2i} = -\frac{\pi^3}{16} \neq 0,$$

sehingga residunya adalah $B = \phi(i) = -\pi^3/16$.

Teorema 6.13. *Diberikan fungsi f dan titik z_0. Jika*

(i). f analitik di z_0;

(ii). $f(z_0) = 0$ tetapi $f(z) \neq 0$ untuk setiap $z \in N_\epsilon(z_0)$ dengan $z \neq z_0$,

maka $f(z) \neq 0$ untuk suatu persekitaran yang dapat dihapuskan $N_\epsilon(z_0)$.

Bukti. Diberikan fungsi f dan diperhatikan bahwa tidak semua turunan f di z_0 sama dengan 0. Cukup jelas dari definisi zeroes orde m, nahwa f bernilai 0 di suatu orde m di titik z_0. Sesuai teorema sebelumnya, diperoleh

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

dengan $g(z)$ fungsi analitik di z_0 dan $f(z_0) \neq 0$. Jadi g kontinu di z_0. Akibatnya, $f(z) \neq 0$ di dalam persekitaran yang dapat dihapus $0 < |z - z_0| < \epsilon$. □

6.2 Penggunaan Residu

Di dalam kalkulus, integral tak wajar fungsi kontinu $f(x)$ pada selang semi-takhingga $x \geq 0$ diartikan sebagai

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \lim_{P \to \infty} \int_0^P f(x)\ dx. \tag{6.6}$$

Bilamana limit ruas kanan persamaan (6.6) ada, maka integral tak wajar dikatakan *konvergen* ke limitnya. Jika $f(x)$ kontinu untuk semua x, integral tak wajar atas selang tak hingga $-\infty < x < \infty$ didefinisikan

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx = \lim_{P_1 \to \infty} \int_{-P_1}^0 f(x)\ dx + \lim_{P_2 \to \infty} \int_0^{P_2} f(x)\ dx, \tag{6.7}$$

asalkan limit di ruas kanan (6.7) keduanya ada.

Contoh 6.14. *Hitung integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\ dx.$$

Penyelesaian:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\ dx = \lim_{P\to\infty} \int_{-P}^{P} x\ dx = \lim_{P\to\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-P}^{P} = \lim_{P\to\infty} 0 = 0.$$

Di sisi lain, jika diperhatikan

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\ dx = \lim_{P_1\to\infty} \int_{-P_1}^{0} x\ dx + \lim_{P_2\to\infty} \int_{0}^{P_2} x\ dx = -\lim_{P_1\to\infty} \frac{P_1^2}{2} + \lim_{P_2\to\infty} \frac{P_2^2}{2},$$

dimana limit keduanya tidak ada, sehingga dikatakan integralnya tidak ada.

Teorema residu Cauchy dan representasi parametrik $z = x$ dengan $-R \le x \le R$ pada ruas garis sumbu real dapat dituliskan

$$\int_{-R}^{R} f(x)\ dx + \int_{C_R} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z=z_i} f(z),$$

atau

$$\int_{-R}^{R} f(x)\ dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z=z_i} f(z) - \int_{C_R} f(z)\ dz.$$

Jika

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\ dz = 0,$$

diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z=z_i} f(z).$$

Jika f fungsi genap, diperoleh

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\ dx = \pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z=z_i} f(z).$$

Contoh 6.15. *Untuk mengevaluasi integral*

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\ dx,$$

pertama pandang fungsi

$$f(z) = \frac{z^2}{z^6 + 1}$$

yang mana mempunyai titik singular terisolasi di -1 *dan di akar-akar yang lain fungsi* f *analitik. Akar-akar kompleks fungsi* f *selengkapnya adalah*

$$c_j = e^{i(\pi/6 + 2j\pi/6)}, \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, 5$$

6.3 Rangkuman

1. **Teorema residu Cauchy** Diberikan C kontur tertutup sederhana dengan arah positif. Jika fungsi f analitik di dalam dan pada C kecuali sejumlah hingga titik-titik singular z_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ di dalam C, maka

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f(z)$$

2. Titik singular terisolasi z_0 dari fungsi f merupakan pole berderajat m jika dan hanya jika $f(z)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$$

dengan $\phi(z)$ fungsi analitik di z_0 dan $\phi(z_0) \neq 0$. Lebih jauh,

$$Res_{z=z_0} f(z) = \phi(z_0), \qquad \text{jika } m = 1$$

dan

$$Res_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}, \qquad \text{jika } m \geq 2.$$

3. Diberikan fungsi f dan titik z_0. Jika

(i). f analitik di z_0;

(ii). $f(z_0) = 0$ tetapi $f(z) \neq 0$ untuk setiap $z \in N_\epsilon(z_0)$ dengan $z \neq z_0$,

maka $f(z) \neq 0$ untuk suatu persekitaran yang dapat dihapuskan $N_\epsilon(z_0)$.

6.4 Bahan Diskusi

Diskusikan permasalahan-permasalahan berikut:

1. Diberikan R adalah daerah yang memuat semua titik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C. Gunakan teorema Bolzano-Weiertrass dan kenyataan bahwa polenya merupakan titik-titik singular terisolasi untuk menunjukkan bahwa jika f analitik di R kecuali pole-pole di dalam C, maka banyaknya pole berhingga.

2. Gunakan residu dan kontur untuk menunjukkan bahwa
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6.5 Rujukan

1. Agarwal, R.P., Perera, K., dan Pinelas, S., 2011, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer Science+Business Media, London.

2. Brown, J. W, and Churchill, R. V., 2009, *Complex Variables and Applications*, 8th, McGraw-Hill Companies, Inc, New York.

3. Campuzano, J.C.P., 2016, *Complex Analysis Problems with Solutions*, Creative Commons Attribution, Queensland.

6.6 Soal-soal Latihan

1. Tentukan residu di $z = 0$ dari fungsi-fungsi berikut:
(a). $\frac{1}{z+z^2}$ (b). $\frac{z-\sin z}{z}$

2. Gunakan teorema residu Cauchy untuk mengevaluasi integral fungsi-fungsi berikut:
(a) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2}$ (b). $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$
dengan C adalah lingkaran $|z| = 3$ dengan arah positif.

3. Diberikan C adalah lingkaran $|z| = 1$ dengan arah positif. Tunjukkan bahwa
$$\int_C e^{z+1/z} dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

4. Tunjukkan bahwa titik singular dari fungsi-fungsi berikut merupakan pole. Tentukan orde m dari pole tersebut dan residu yang bersesuaian.
   (a). $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3}$ (b). $f(z) = \frac{2^{2z}}{(z-1)^2}$

5. Diberikan f fungsi analitik di z_0, dan tuliskan $g(z) = f(z)/(z - z_0)$. Buktikan bahwa
   (a) jika $f(z) \neq 0$, maka z_0 merupakan pole sederhana bagi g, dengan residu $f(z_0)$.
   (b) jika $f(z_0) = 0$, maka titik z_0 merupakan titik singular yang dapat dihapuskan bagi g.

6. Untuk setiap fungsi yang diberikan, tunjukkan bahwa setiap titik singularnya merupakan pole. Tentukan orde pole dan tentukan residunya untuk pole-pole yang bersesuaian.
   (a) $f(z) = \frac{z^2+2}{z-1}$
   (b) $g(z) = \frac{e^z}{z^2+\pi^2}$

7. Tunjukkan bahwa
$$Res_{z=-1} = \frac{z^{1/4}}{z+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \qquad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi)$$

8. Tunjukkan bahwa
$$Res_{z=i} = \frac{\log z}{(z^2+1)^2} = \frac{\pi + 2i}{8}.$$

9. Evaluasi integral
$$\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)} dz,$$
   dengan C adalah lingkaran $|z-2| = 2$ dengan arah positif.

10. Evaluasi integral
$$\int_C \frac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)} dz,$$
   dengan C adalah lingkaran $|z| = 2$ dengan arah positif.

Bab 7

Pemetaan Konformal

Setelah mahasiswa membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah :

1. mampu berpikir secara kritis dan logis;
2. punya kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah-masalah yang relevan;
3. dapat bertanggungjawab dalam melaksanakan tugas;
4. bersifat jujur, etis, kreatif, dan mampu bekerjasama;
5. punya kemampuan dalam berkomunikasi melalui diskusi materi.

Sedangkan kemampuan akhir mahasiswa yang diharapkan secara khusus adalah :

1. menjelaskan kembali konsep-konsep yang berhubungan dengan pemetaan konformal;
2. menganalisis dan membuktikan sifat-sifat yang berhubungan dengan pemetaan konformal;
3. menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan pemetaan konformal.

7.1 Preservasi Sudut

Suatu transformasi $w = f(z)$ dikatakan *konformal* di titik z_0 jika f analitik di titik tersebut dan $f'(z_0) \neq 0$. Transformasi $w = f(z)$ yang terdefinisi pada domain D dikatakan *pemetaan konformal* jika f konformal di setiap titik di D. Jadi, f merupakan pemetaan konformal pada D jika $f'(z)$ ada dan $f'(z) \neq 0$ setiap $z \in D$.

Contoh 7.1. *Pemetaan $w = e^z$ merupakan pemetaan konformal pada $\mathbb{C}$ karena $(e^z)' = e^z \neq 0$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$*

Diberikan f fungsi bukan konstan dan analitik di z_0. Jika, sebagai tambahan, $f'(z_0) = 0$, maka titik z_0 disebut *titik kritis* transformasi $w = f(z)$.

Contoh 7.2. *Titik $z = 1$ merupakan titik kritis transformasi*

$$w = z^2 - 2z + 3.$$

Satu sifat penting lain dari transformasi konformal $w = f(z)$ di titik z_0 diperoleh dengan memandang modulus $f'(z_0)$. Dari definisi turunan dan sifat limit yang melibatkan modulus yakni

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}. \tag{7.1}$$

Diperhatikan bahwa $|z - z_0|$ menyatakan panjang segmen garis yang menghubungkan titik z ke z_0 dan $|f(z) - f(z_0)|$ menyatakan panjang segmen garis yang menghubungkan titik $f(z_0)$ dan $f(z)$ di bidang w. Jika z cukup dekat ke z_0, rasio

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

merupakan pendekatan dari bilangan $|f'(z_0)|$. Perlu diketahui bahwa $|f'(z_0)|$ menyatakan perpanjangan jika ia lebih besar dari satu dan kontraksi jika ia kurang dari satu. Jadi $|f'(z)|$ merupakan *faktor skala.*

Contoh 7.3. *Untuk $f(z) = z^2$, transformasi*

$$w = f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$$

merupakan transformasi konformal di titik $z = 1 + i$, yang merupakan titik potong garis

$$y = x (x \geq 0) \text{ dan } x = 1 (x \geq 0).$$

Misalkan C_1 dan C_2 menyatakan garis-garis tersebut dengan arah positif ke atas, dan sudut yang dibentuk oleh C_1 dan C_2 adalah $\pi/4$ di titik potong tersebut. Karena peta dari titik $z = (x, y)$ adalah suatu titik di bidang w dimana koordinat-koordinat persegi panjang adalah

$$u = x^2 - y^2 \qquad \textit{dan} \qquad v = 2xy,$$

garis C_1 akan ditransformasi menjadi kurva Γ_1 dengan representasi parametrik

$$u = 0, \qquad , v = 2x^2, \qquad 0 \leq x. \tag{7.2}$$

Jadi Γ_1 adalah separuh bagian atas $v \geq 0$ pada sumbu-v. Garis C_2 akan ditransformasi menjadi kurva Γ_2 yang disajikan dalam persamaan

$$u = 1 - y^2, \qquad v = 2y \qquad 0 \leq y. \tag{7.3}$$

Karena Γ_2 separuh bagian atas parabola $v_2 = -4(u-1)$. Perlu diketahui, dalam setiap kasus, arah positif kurva peta yang dimaksudkan adalah ke atas.
Jika u dan v peubah-peubah di dalam representasi (7.3) untuk kurva peta Γ_2, maka

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dy}{du/dy} = \frac{2}{-2y} = -\frac{2}{v}.$$

Khususnya jika $du/dv = -1$ maka $v = 2$. Akibatnya, sudut kurva peta Γ_1 ke kurva peta Γ_2 di titik $w = f(1+i) = 2i$ adalah sebesar $\pi/4$. Sebagai antisipasi, sudut rotasi $\pi/4$ di titik $z = 1 + i$ adalah

$$\arg\left[f'(1+i)\right] = \arg\left[2(1+i)\right] = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots.$$

Faktor skala di titik tersebut adalah

$$|f'(1+i)| = |2(1+i)| = 2\sqrt{2}.$$

7.2 Transformasi Fungsi Harmonik

Untuk memahami transformasi fungsi harmonik, di sini diawali dengan suatu teorema berikut.

Teorema 7.4. *Diberikan fungsi analitik*

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

yang memetakan dari domain D_z dalam bidang z ke domain D_w dalam bidang w. Jika $h(u,v)$ fungsi harmonik yang terdefinisi pada D_w, maka fungsi

$$H(x,y) = h(u(x,y), v(x,y))$$

harmonik di D_z.

Teorema 7.5. *Diberikan transformasi konformal*

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

pada kurva C, dan diberikan Γ merupakan peta C oleh transformasi w. Jika fungsi $h(u,v)$ memenuhi salah satu syarat

$$h = h_1 \qquad \text{atau} \qquad \frac{dh}{dn} = 0,$$

dengan h_1 konstanta real dan dh/dn menyatakan normal turunan pada Γ, maka fungsi

$$H(x,y) = h(u(x,y), v(x,y))$$

memenuhi syarat yang bersesuaian

$$H = h_1 \qquad \text{atau} \qquad \frac{dH}{dN} = 0,$$

dimana dH/dN menyatakan normal turunan pada C.

Untuk lebih jelasnya, diberikan satu contoh berikut.

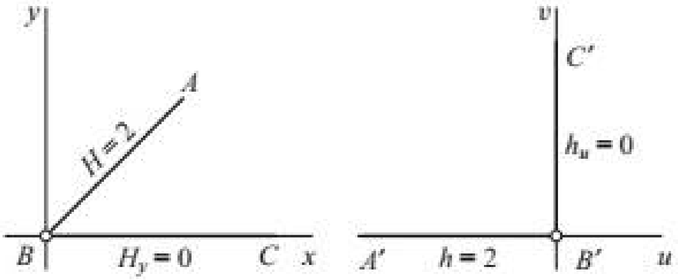
Contoh 7.6. *Pandang fungsi*

$$h(u,v) = v + 2.$$

Transformasi

$$w = iz^2 = -2xy + i(x^2 - y^2)$$

merupakan pemetaan konformal bilamana $z \neq 0$. Transformasi w memetakan garis $y = x$ $(x > 0)$ ke sumbu-u negatif, dimana $h = 2$, dan sumbu-x positif ke sumbu-v positif dengan $h_u = 0$ (lihat Gambar 7.1).



Gambar 7.1: Pemetaan konformal dari bidang z ke bidang w

7.3 Rangkuman

1. Diberikan fungsi analitik

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

yang memetakan dari domain D_z dalam bidang z ke domain D_w dalam bidang w. Jika $h(u, v)$ fungsi harmonik yang terdefinisi pada D_w, maka fungsi

$$H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$$

harmonik di D_z.

2. Diberikan transformasi konformal

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

pada kurva C, dan diberikan Γ merupakan peta C oleh transformasi w. Jika fungsi $h(u, v)$ memenuhi salah satu syarat

$$h = h_1 \qquad \text{atau} \qquad \frac{dh}{dn} = 0,$$

dengan h_1 konstanta real dan dh/dn menyatakan normal turunan pada Γ, maka fungsi

$$H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$$

memenuhi syarat yang bersesuaian

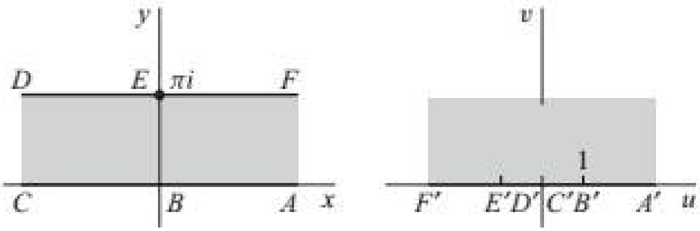
$$H = h_1 \qquad \text{atau} \qquad \frac{dH}{dN} = 0,$$

dimana dH/dN menyatakan normal turunan pada C.

7.4 Bahan Diskusi

1. Tunjukkan bahwa peta garis $y = x-1$ dan $y = 0$ oleh transformasi $w = 1/z$ masing-masing adalah lingkaran $u+2+v^2-u-v = 0$ dan garis $v = 0$. Sketsakan keempat kurva tersebut, tentukan arah-arah yang bersesuaian, dan periksa kekonformalan pemetaan di titik $z = 1$.

2. Transformasi $w = \exp z$ memetakan strip horisontal $0 < y < \pi$ ke separuh bidang bagian atas $v > 0$, seperti ditunjukkan pada Gambar 7.2.



Gambar 7.2: Transformasi $w = \exp z$

Diberikan fungsi harmonik

$$h(u, v) = Re\{w^2\} = u^2 - v^2$$

Buktikan bahwa fungsi

$$H(x, y) = e^{2x} \cos 2y$$

merupakan fungsi harmonik di strip tersebut. Verifikasi hasil ini secara langsung.

7.5 Rujukan

1. Agarwal, R.P., Perera, K., dan Pinelas, S., 2011, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer Science+Business Media, London.

2. Brown, J. W, and Churchill, R. V., 2009, *Complex Variables and Applications*, 8th, McGraw-Hill Companies, Inc, New York.

3. Campuzano, J.C.P., 2016, *Complex Analysis Problems with Solutions*, Creative Commons Attribution, Queensland.

7.6 Soal-soal Latihan

1. Tentukan sudut rotasi di titik $z = 2+i$ oleh transformasi $w = z^2$, dan ilustrasikan sudut tersebut untuk suatu kurva khusus. Tunjukkan bahwa faktor skala transformasi di titik tersebut adalah $2\sqrt{5}$.

2. Berapa sudut rotasi yang dihasilkan dari transformasi $w = 1/z$ di titik $z = 1$?

3. Tunjukkan bahwa transformasi
$$w = \sin z$$
merupakan transformasi konformal di sebarang titik $z \in \mathbb{C}$ kecuali titik-titik
$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

4. Tentukan invers lokal transformasi
$$w = z^2$$
di titik $z_0 = -i$.

5. Tunjukkan bahwa jika $z = g(w)$ invers lokal transformasi konformal $w = f(z)$ di titik z_0, maka
$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$
di titik w di persekitaran N dimana g analitik.

6. Berapa sudut rotasi yang dihasilkan dari transformasi $w = 1/z^2$ di titik $z = i$?

7. Tunjukkan bahwa transformasi
$$w = \cos^2 z$$
merupakan transformasi konformal di sebarang titik $z \in \mathbb{C}$ kecuali titik-titik
$$z = \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

8. Tentukan invers lokal transformasi

$$w = 2 + \sqrt{z}$$

di titik $z_0 = 1 + i$.

9. Tunjukkan bahwa sudut rotasi titik $z_0 = r_0 \exp i\theta_0 \neq 0$ oleh transformasi $w = z^n, n \in \mathbb{N}$ adalah

$$(n-1)\theta_0.$$

Daftar Pustaka

[1] Agarwal, R.P., Perera, K., dan Pinelas, S., 2011, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer Science+Business Media, London.

[2] Brown, J. W, and Churchill, R. V., 2009, *Complex Variables and Applications*, 8th, McGraw-Hill Companies, Inc, New York.

[3] Campuzano, J.C.P., 2016, *Complex Analysis Problems with Solutions*, Creative Commons Attribution, Queensland.

[4] Murray R. Spiegel, 2009, *Schaum's Outlines: Complex Variables, Second Edition*, The McGraw-Hill Companies. Inc, New York.

Glosarium

B

bilangan imajiner himpunan bilangan yang yang jika dikuadratkan menghasilkan bilangan real negatif.

bilangan kompleks himpunan bilangan yang terdiri atas bilangan real dan imajiner.

D

domain himpunan yang terbuka dan terhubung.

F

fungsi analitik fungsi yang memiliki turunan di setiap titik pada himpunan.

fungsi harmonik fungsi dua variabel yang turunan parsial pertama dan keduanya kontinu serta memenuhi persamaan Laplace.

fungsi kontinu fungsi yang nilai limitnya sama dengan nilai fungsinya.

fungsi penuh fungsi yang analitik di setiap titik pada bidang kompleks.

H

himpunan terbuka himpunan yang tidak memuat satupun titik batas atau himpunan yang setiap anggotanya merupakan titi-dalam (*interior point*).

himpunan terhubung himpunan yang setiap dua elemennya dapat dihubungkan oleh garis poligon yang terdiri dari sejumlah hingga segmen garis yang terhubung yang terletak pada himpunan tersebut.

himpunan tertutup himpunan yang memuat semua titik batas atau himpunan yang komplemennya terbuka.

K

kompleks sekawan bilangan kompleks yang diperoleh dari hasil pencerminan terhadap sumbu real.

M

modulus jarak antara titik yang merepresentasikan bilangan kompleks ke titik asal.

N

nilai utama suatu nilai yang berada pada selang $-\pi < \Theta \leq \pi$.

P

pemetaan konformal pemetaan yang setiap titik pada domainnya analitik dan nilai pemetaannya tidak sama dengan nol.

persekitaran himpunan titik-titik yang berada pada posisi kurang dari radius tertentu.

S

sumbu imajiner sumbu-y pada koordinat kartesius.

sumbu real sumbu-x pada koordinat kartesius.

T

titik batas titik yang bukan titik eksterior maupun titik interior.

titik eksterior titik yang beberapa persekitarannya tidak satupun memuat titik-titik pada himpunan.

titik interior titik yang beberapa persekitarannya hanya memuat titik-titik pada himpunan.

titik singular titik yang tidak analitik namun analitik pada persekitarannya.

Indeks

Biografi Penulis

Ikhsanul Halikin, lahir di pulau Giligenting Kabupaten Sumenep pada hari selasa tanggal 14 Oktober 1986, putra kedua dari Bapak Syamsuri dan Ibu Nurhayati yang beralamat di dusun Murassem Timur, desa Aenganyar, kecamatan Giligenting. Pendidikan sekolah dasar ditempuh di SDN Aenganyar II dan lulus pada tahun 1999, kemudian melanjutkan pendidikan di SLTPN 1 Giligenting dan lulus pada tahun 2002. Pada tahun 2005, lulus sekolah di SMAN 2 Sumenep kemudian melanjutkan kuliah S1 di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember. Setelah mendapatkan gelar sarjana, penulis melanjutkan kuliah S2 di program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Jember dan lulus pada tahun 2012. Pada tahun 2014 menikah dengan Siti Holifah dan pada tahun 2015 dikaruniai seorang anak laki-laki bernama Fahri Ahza Ihsani. Penulis aktif sebagai dosen di jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember sejak tahun 2014 hingga sekarang. Mata kuliah yang pernah di ampu adalah Kalkulus, Kalkulus Lanjut, Kalkulus Peubah Banyak, Kombinatorika, Teori Graf, Struktur Aljabar, Fungsi Peubah Kompleks, Pemodelan, dan Matematika Dasar.

Firdaus Ubaidillah Lahir di Lamongan tanggal 6 Juni 1970, menempuh pendidikan dasar di SD Alun-alun II Lamongan dan SD Dinoyo III Malang, pendidikan menengah di MTsN Malang II dan MAN Malang II Batu. Tahun 1989 melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya (UB) Malang lulus tahun 1994. Studi S2 ditempuh di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Institut Teknologi Bandung (ITB) lulus tahun 2004. Pendidikan S3 ditempuh di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta dan memperoleh gelar Doktor bidang matematika tahun 2016. Dalam kesehariannya, penulis aktif mengajar di prodi S1 dan S2 Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember dengan matakuliah yang diampu adalah Kalkulus, Analisis Real, Fungsi Peubah Kompleks, Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Aljabar Linear, dan lain-lain. Karya buku yang telah ditulis adalah Kalkulus Fungsi Satu Peubah.